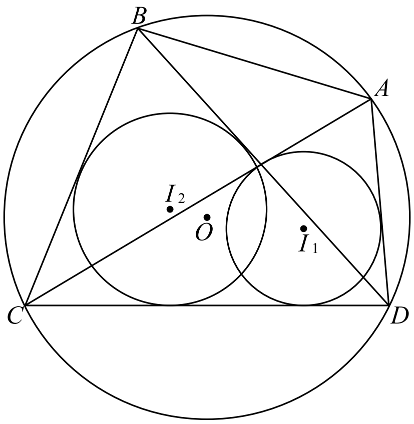
中學生通訊解題第五十六期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5601

已知圓內接四邊形 $ABCD$，O 爲外接圓圓心，R 爲外接圓半徑，I_1、I_2 分別爲ΔACD、ΔBCD 之內切圓圓心，r_1、r_2 分別爲ΔACD、ΔBCD 之內切圓半徑，$d_1=\overline{OI_1}$，$d_2=\overline{OI_2}$，

試證：$R=\sqrt{\dfrac{r_2d_1^2-r_1d_2^2}{r_2-r_1}}$



參考解答：

設ΔABC 之內心爲 I，連 $\overrightarrow{AI}$ 交ΔABC 之外接圓於 E，$\overline{AE}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於 D，R、r 分別爲ΔABC 之外接圓、內切圓半徑，

(1) 連接 $\overline{BE}$、$\overline{CE}$ $\because$ $\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{IE}$

$\therefore$ E 爲ΔBCI 之外心

(2) $\because \Delta ABD \sim \Delta AEC$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$

$\Rightarrow$ $\overline{AD}\times\overline{AE}=\overline{AB}\times\overline{AC}$

(3) 過 I 作 $\overline{IF}\perp\overline{AC}$ 於 F，則 $\overline{IF}=r$，

連接 $\overline{EO}$ 交ΔABC 之外接圓於 J，

則$\Delta AFI\sim\Delta JCE$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{JE}}=\dfrac{\overline{IF}}{\overline{CE}}$

$\Rightarrow \overline{AI}\times\overline{CE}=\overline{JE}\times\overline{IF}=2Rr$

(4) 設 $\overleftrightarrow{OI}$ 與ΔABC 之外接圓交於 M、N，

則 $2Rr=\overline{AI}\times\overline{IE}=\overline{IN}\times\overline{IM}$

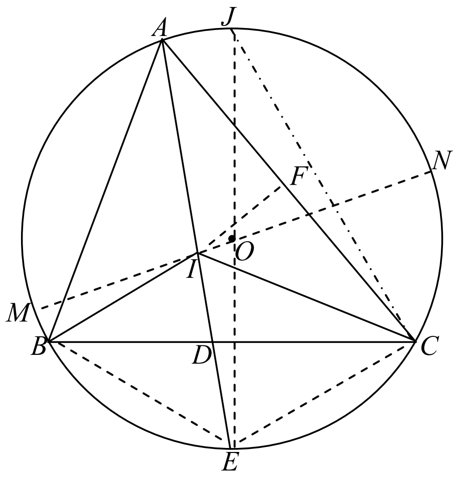
$=(R+\overline{OI})(R-\overline{OI})=R^2-\overline{OI}^2$

$\Rightarrow$ $\overline{OI}^2=R^2-2Rr$

$\Rightarrow R^2-d_1^2=2Rr_1$，$R^2-d_2^2=2Rr_2$

$\Rightarrow$ $\dfrac{R^2-d_1^2}{r_1}=2R=\dfrac{R^2-d_2^2}{r_2}$

$\Rightarrow R=\sqrt{\dfrac{r_2d_1^2-r_1d_2^2}{r_2-r_1}}$



解題評註：

解題重點：這是一個三角形內心與外心的混合性質，大致上分成四個步驟處理。過程中會用到的除了內心與外心的性質外，還得使用內冪性質，才能證出：

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr。$$

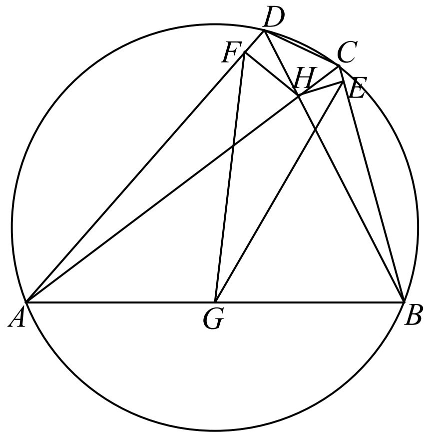
這結論使用兩次，即可證得

$$R = \sqrt{\frac{r_2 d_1^2 - r_1 d_2^2}{r_2 - r_1}}。$$

有一位同學在證明中使用了正弦定理，雖非純幾何證法，但也不失爲一個好方法。

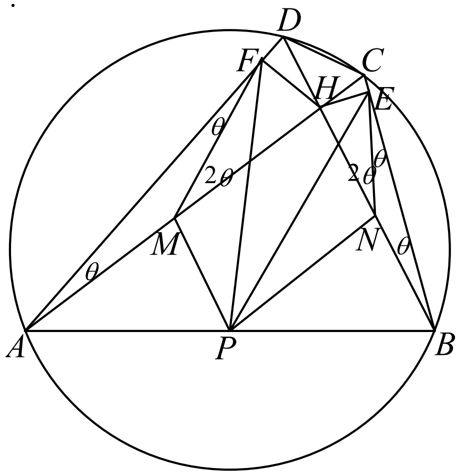
問題編號
5602

已知圓內接四邊形 $ABCD$，對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 相交於 H，$\overline{HE}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 E，$\overline{HF}$ 垂直 $\overline{AD}$ 於 F，若 G 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{GE} = \overline{GF}$，試證：$G$ 爲 $\overline{AB}$ 中點



參考解答：

取 $\overline{AB}$ 中點 P，再分別取 $\overline{HA}$、$\overline{HB}$ 中點 M、N，連接 $\overline{PN}$、$\overline{NE}$、$\overline{PM}$、$\overline{MF}$，如圖：



$\because \angle HMF=2\angle HAF=2\angle HBE=\angle HNE$……(1)

$\overline{PM} // \overline{HB}$，且 $\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{HB} = \overline{NE}$，

同理 $\overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{HA} = \overline{MF}$

$\therefore$ 四邊形 $PNHM$ 爲平行四邊形

$\therefore$ $\angle HMP = \angle HNP$ ……(2)

由(1)(2)$\Rightarrow \angle HMF+\angle HMP=\angle HNE+\angle HNP$

$\Delta PMF \cong \Delta ENP$ (SAS)

$\therefore \overline{PF} = \overline{PE}$

$\therefore$ P 是 $\overline{EF}$ 之中垂線與 $\overline{AB}$ 的唯一交點，

但已知 G 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{GE} = \overline{GF}$，

$\therefore$ 由同一法知 $P = G$　即 G 爲 $\overline{AB}$ 中點。

解題評注：

這是一個基本的幾何構造法的問題，只要將 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 看成是

3 個線段長就容易下手了，上述詳解提供了一個作法。

解題評註：

這是一個使用同一法的幾何證明題。同一法是一個很有用的幾何證明方法，有志於數學競賽的同學，宜多多研究、運用。本題的處理方法：先取 $\overline{AB}$ 中點 P，再證明 P、G 是同一點即可。

問題編號
5603

若 m 適合關係式

$$\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}$$
$$=\sqrt{x-200+y}\cdot\sqrt{200-x-y}$$

則 m 之值爲?

參考解答：

由二次根式定義

$$\begin{cases} x-200+y\geq 0 \\ 200-x-y\geq 0 \end{cases}\Rightarrow 200\leq x+y\leq 200$$

$$\therefore x+y=200$$

$$\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0$$

$$\begin{cases} 3x+5y=2+m \\ 2x+3y=m \end{cases}\Rightarrow x+2y=2$$

∴ m＝2x+3y＝（x+2y）＋（x+y）

＝2＋200＝202

解題評註：

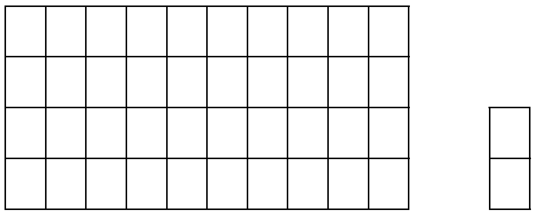
一般同學都能由根式的定義，找出 x＋y＝200，進而推導

$$\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0，$$

於是 m 值＝202

問題編號
5604

如圖，用 40 個同樣大小的小正方形排成一個 4×10 的長方形。用 20 個 1×2 的矩形舖滿，可以直排也可以橫排，試問共有幾種排法？



4×10 矩形　　2×1 矩形

參考解答：

18061

假設 a_n 爲排滿 $4\times n$ 矩形的所有方法數；b_n 爲排滿 $4\times n$ 矩形的方法中，無法被切割成 $4\times k$，$4\times(n-k)$ 矩形之所有方法數，其中 k 爲小於 n 的所有正整數。

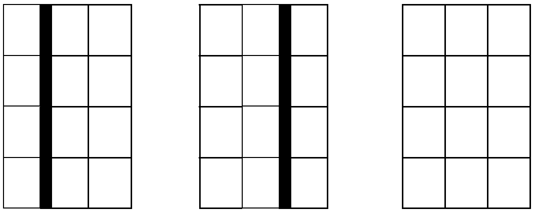
因此，可先計算得 $b_1=1$，$b_2=4$，$b_{2t+1}=2$，$b_{2t+2}=3$。

$n=1$： $a_1=1$

$n=2$： $a_2=1+b_2=5$

$n=3$： $a_3=b_1\cdot a_2+b_2\cdot a_1+b_3$
$=5+4+2=11$

可將所有排列狀況分成下列三類：



$b_1\cdot a_2$　　$b_2\cdot a_1$　　b_3

同理，可整理得一般狀況之遞迴式為

$$a_n=b_1\cdot a_{n-1}+b_2\cdot a_{n-2}+\cdots+b_k\cdot a_{n-k}+\cdots+b_{n-1}\cdot a_1+b_n$$

因此得 a_n 之數列為 1, 5, 11, 36, 95, 281, 781, 2245, 6336, 18061, ...。

問題編號
5605

已知 a,b,c 為正整數且滿足下列聯立方程式

$$(a-b)(b-c)(c+a)=-90$$
$$(a-b)(b+c)(c-a)=42$$
$$(a+b)(b-c)(c-a)=-60$$

試求 a,b,c 的值。

參考解答：

$(a-b)(b-c)(c+a)=-90$ ……(1)

$(a-b)(b+c)(c-a)=42$ ………(2)

$(a+b)(b-c)(c-a)=-60$ ……(3)

根據上面條件可判斷僅有 $b>a>c$ 或 $c>a>b$ 兩種情形會成立。

由(1)+(2) 得

$(a-b)^2c=2^3\times3$。……(4)

由(2)+(3) 得

$b(c-a)^2=3^2$。…………(5)

由(3)+(1) 得

$a(b-c)^2=3\times5^2$。……(6)

考慮(5) 已知 a,b,c 為正整數

所以 $c-a=\pm3$，

$b=1$ 或是 $b=3^2$

考慮(6) 已知 a,b,c 為正整數

所以 $b-c=\pm5$， $a=3$ 或是 $a=3\times5^2$ ，$b-c=1$

綜合 上述條件逐一分析可得

$a=3,b=1,c=6$

解題評註：

本題屬於方程組求整數解的問題，並且需要運用到因倍數相關性質以簡化計算過程。此次共有 14 位同學參與此題徵答，大多數學生均能將解答順利求出。但是許多過程的推理思考，仍欠缺完整性，有待未來繼續學習努力。