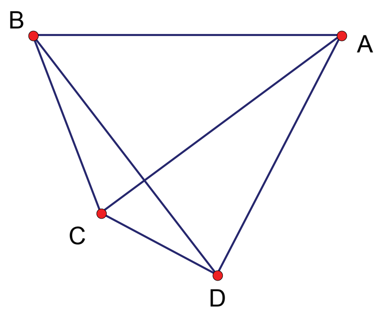
中學生通訊解題第五十七期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5701

在四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，∠ABD=60°，∠ADB=70°，∠BDC=40°，求∠DBC 是多少度？



參考解答：

延長 BD 至 E 使得 $\overline{DE}=\overline{CD}$

在ΔADE 與ΔADC 中

∠ADE=180°-∠ADB=180°- 70°= 110°

∠ADC=∠ADB+∠BDC=70°+40° = 110°

∴ ∠ADE = ∠ADC

$\overline{DE}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$

$\Delta ADE \cong \Delta ADC$ (SAS)

$\overline{AE}=\overline{AC}$，∠E=∠ACD，

∠EAD=∠CAD

∵∠ABD=60°，$\overline{AE}=\overline{AC}=\overline{AB}$，

∴ΔABE 為正三角形，

∴∠ACD=∠E=∠EAB=60°

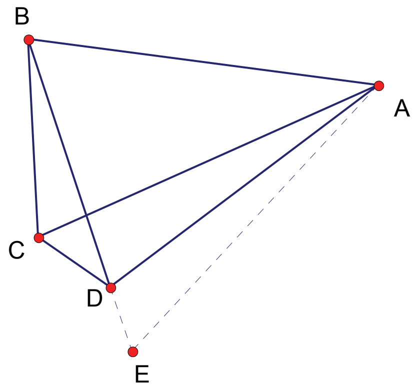
故 ∠CAD=180°-∠ADC-∠ACD=10°

∠CAB=∠EAB - ∠CAD-∠EAD=40°

$\angle\text{ABC}=\frac{1}{2}(180^0-\angle CAB)=70^0$

∠DBC=∠ABC - ∠ABD = 10°

故 ∠DBC 是 10 度 。



另一種參考解答：

如下圖，在 $\overrightarrow{DC}$ 上取一點 E 使得∠ABE=70°

在四邊形 ABED 中

∵ ∠ADE=∠ADB+∠BDE=70°+40°=110°

與對角∠ABE 互補，

∴ A,B,E,D 四點共圓

$$\because \begin{cases}\overset{\frown}{AB}=2\times\angle ADB=140^0\\ \overset{\frown}{AE}=2\times\angle ABE=140^0\end{cases},\therefore \overline{AB}=\overline{AE}$$

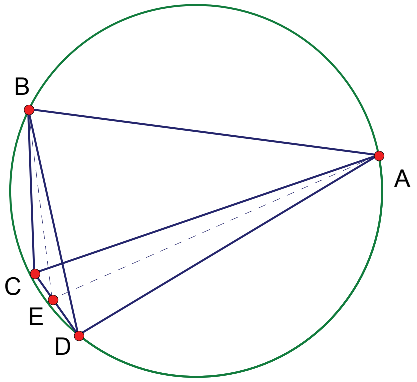
(等弧對等弦)

又 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\therefore \overline{AB}=\overline{AE}$，故 C 點與 E

點重合

∠DBC=∠DBE=∠ABE-∠ABD=70°-60°=10°

[台北市龍山國中華祥志同學提供]



解題評註：

本題利用全等三角形的方法來解題，因為目前國對於幾何證明的訓練較薄弱，且對於作輔助線解題的方法訓練不足，故少數學生只能做出角度的範圍而已，至於有些學生因提早學習，懂得利用圓內接四邊形對角互補的性質來證明計算或者用高中三角函數來解題，誠屬非常難得。在此希望國中學生能利用空閒時間，多練習幾何題目，加強自己的幾何概念與邏輯推理的能力。

問題編號 5702

下列四數：$a=3\sqrt{22}-14,\ b=9\sqrt{6}-22,\ c=3\sqrt{59}-23,\ d=11\sqrt{3}-19$，將此四數由大到小做正確的排列。

參考解答：

$$a=3\sqrt{22}-14=\sqrt{198}-\sqrt{196}=\frac{2}{\sqrt{198}+\sqrt{196}}$$

$$b=9\sqrt{6}-22=\sqrt{486}-\sqrt{484}=\frac{2}{\sqrt{486}+\sqrt{484}}$$

$$c=3\sqrt{59}-23=\sqrt{531}-\sqrt{529}=\frac{2}{\sqrt{531}+\sqrt{529}}$$

$$d=11\sqrt{3}-19=\sqrt{363}-\sqrt{361}=\frac{2}{\sqrt{363}+\sqrt{361}}$$

a、b、c、d 四數皆為 $\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ 的型式，所以 n 越大，值反而越小，因此 a＞d＞b＞c。

解題評注：

1. 有些同學觀察到 a、b、c、d 四數皆為 $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ 的型式，就直接寫所以 n 越大值越小，但這並不直觀，應該轉換成 $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ 才夠直觀可以看出 n 越大值越小，並可以得知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=0$。
2. 有些同學採取兩數相減若大於 0，則前數大於後數的做法，這個方法也很可取，因為他將判斷 $\sqrt{n}-\sqrt{m}+k$ 的正負轉化成判斷 $\sqrt{s}-t$ 的正負，進而得到答案，這就是將數學問題簡單化(做題目的技巧之一)，並且也巧妙利用到乘法公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，值得嘉勉。

問題編號
5703

已知圓周上有 12 個等分點

(1) 任取 4 個爲頂點，可決定幾個梯形？

(2) 任取 3 個爲頂點，可決定幾個直角三角形？

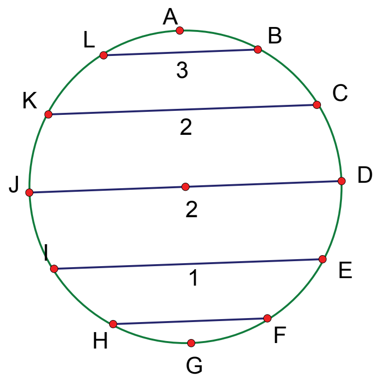
(3) 任取 3 個爲頂點，可決定幾個鈍角三角形？

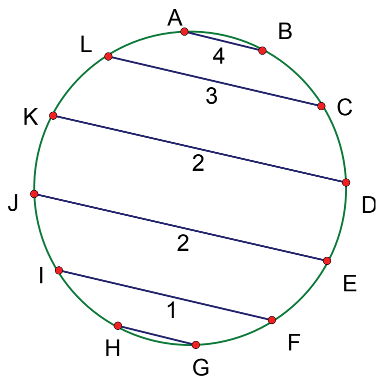
(4) 任取 3 個爲頂點，可決定幾個銳角三角形？

參考解答：

(1) 梯形個數：

因爲梯形的上底與下底平行，所以可分成以下兩種情形：





$6\times[(3+2+2+1)+(4+3+2+2+1)]$
$=120$

共可決定 120 個梯形。

(2) 直角三角形：

12 個等分點恰可決定 6 條直徑，每一直徑又可決定 10 個不同的直角三角形，所以共有 60 個不同的直角三角形。

(3) 鈍角三角形：

以 A 爲頂點的鈍角三角形：

$\angle A=150^\circ$ 的有 1 個，$\angle A=135^\circ$ 的有 2 個，$\angle A=120^\circ$ 的有 3 個，$\angle A=105^\circ$ 的有 4 個，所以共有 $1+2+3+4=10$ 個。可當鈍角頂點的有 12 個，所以共可決定 120 個鈍角三角形。

(4) 銳角三角形，因爲全部共有 $C_3^{12}=220$ 個三角形，其中直角與鈍角三角形分別有 60 及 120 個，所以銳角三角形有 $220-60-120=40$ 個。

問題編號
5704

已知 a,b,c,d 分別表示 0~9 的相異整數且兩位正整數 ad,bd 的乘績恰好是一個三位整數 ccc，試求 $a+b+c+d$ 的值。

參考解答：

$ccc=c\times111=c\times3\times37=ad\times bd$，由於 37 爲質數，故 $ad=37$ 或 $bd=37$ 即 $d=7$，原式

$= ad \times bd = (10a+7)(10b+d) = c \times 3 \times 37$
可解出 $10a+7$ 為 3 的倍數即 $a=2$ 或 5,8 或是 $10b+7$ 為 3 的倍數即 $b=2$ 或 5,8。經上述條件分析可得 $a=2$，$b=3$ 或是 $a=3, b=2$ 故得 c=9。
即 $a+b+c+d$ =2+3+9+7=21。

解題評註：

本題屬於整數的因倍數求解問題，並且可運要乘法性質加以簡化計算過程。此次共有 15 位同學參與此題徵答，全部學生均能將解答順利求出。但是其中邏輯推理過程仍欠缺完整性，有待老師從旁指導。

問題編號
5705

如果自然 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 滿足
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$
那麼 x_5 的最大值=？

參考解答：

由於上式是對稱式，而要求出 x_5 的最大值，可令 0 < $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$

$\Rightarrow 5x_1 \le x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \le 5x_5$

$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \le 5 \le x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$，

以下有兩種情形：

1. $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = 2 \Rightarrow x_5 = 2$

2. $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 \le 5$ 代入原式：

$$3 + x_4 + x_5 = x_4 \cdot x_5 \Rightarrow (x_4 - 1)(x_5 - 1) = 4$$

$$\begin{cases} x_4 = 2 \\ x_5 = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_4 = 3 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

∴由這兩種情形知 x_5 的 Max＝5。

解題評註：

此題共有 8 位同學參加解答，全對者有 5 位，答對率 62.5％。本題要利用 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的正整數排序，導出 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \le 5 \le x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$，進而討論 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的所有解。