中學生通訊解題第五十五期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5501

解方程式 $\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}=x$

參考解答：

原式取倒數 $\Rightarrow\ \sqrt{x+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{x+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$

兩式相加　$\Rightarrow\ 2\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}=x+\frac{1}{x}\overset{令}{=}a$

$\Rightarrow a^2-4a-4=0$

$\Rightarrow a=2+2\sqrt{2}$ （負不合）

$\Rightarrow\ x+\frac{1}{x}=2+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2-2(1+\sqrt{2})x+1=0$

$\therefore x=1+\sqrt{2}\pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

解題評註：

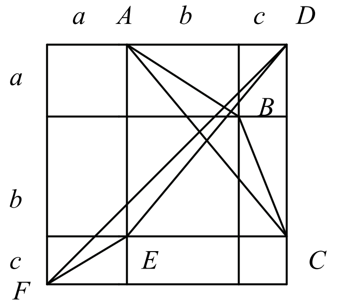
有些同學用硬拼的方式暴力解之，雖解出答案卻太辛苦了。這本是一個代數構造法的問題，構造一個共軛等式，解起來就輕鬆多了，請參考上述詳解。

問題編號
5502

已知正數 a,b,c 滿足 $a+b+c=1$，試求 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 之最小值。

參考解答：

構造一個邊長為 $a+b+c=1$ 正方形：



$\because\ \overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$ ，$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$ ，

$\overline{EF}=\sqrt{c^2+a^2}$

$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{EF}\geq\overline{CA}+\overline{EF}=\overline{DE}+\overline{EF}\geq\overline{DF}=\sqrt{2}$

解題評注：

這是一個基本的幾何構造法的問題，只要將 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 看成是 3 個線段長就容易下手了，上述詳解提供了一個作法。

問題編號
5503

ΔABC是直角三角形,斜邊長 13。兩股長是 a,b，且也是 x 的方程式 $x^2-(2m+7)x+4m(m-2)=0$ 的兩個根,試求ΔABC的面積。

參考解答：

(1) D＝$b^2-4ac\geq 0,$

$\Rightarrow(2m+7)^2-16m(m-2)\geq 0$

(2) ab＝4m(m－2)＞0

(3) a＋b＝2m＋7＞0

(4) $a^2+b^2=13^2\Rightarrow(a+b)^2-2ab=169$

$\Rightarrow(2m+7)^2-2\cdot 4m(m-2)=169$

$\Rightarrow m^2-11m+30=0\Rightarrow m=5\vee 6$

⇒（6 不滿足(1)) ⇒m＝5

ΔABC 面積＝$\frac{1}{2}ab$＝2m(m－2)＝30

解題評註：

此題共有 12 人參與作答，答對率 75％，顯然同學們在二次方程式的根與係數，及商高定理應用都有不錯的理解。

問題編號
5504

已知一個凸八邊形中的任意 3 條對角線不交於形內一點，求這些對角線將凸八邊形分成的區域的個數？

參考解答：

$$\frac{1}{24}(8-1)(8-2)(8^2-3\cdot 8+12)=91$$

法 1. 在凸 n 邊形中，任選 4 頂點所連對角線恰有一交點，所以 n 邊形內有 C_4^n 個交點，每一交點皆爲 4 條線段之一端點，又從凸 n 邊形每個頂點出發有 $n-3$ 條對角線，但因每個線段皆被計算了兩次，所以凸 n 邊形內部線段共有 $\frac{1}{2}[4\cdot C_4^n+n(n-3)]$。假設凸 n 邊形內部被分割之區域數爲 S，利用歐拉公式 $V-E+F=2$ 得

$$[n+C_4^n]-\{\frac{1}{2}[4\cdot C_4^n+n(n-3)]+n\}+(S+1)=2$$

，整理後可得

$$S=\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)。$$

法 2. 在凸 n 邊形中的對角線個數爲 C_2^n-n，設 a_i 爲畫上第 i 條對角線後，所增加的交點個數，因 (增加之區欲數) = (增加交點數 + 1)，所以凸 n 邊形內部被分割之區域數

$$S = 1 + \sum_{i=1}^{C_2^n - n}(a_i + 1) = 1 + \sum_{i=1}^{C_2^n - n} a_i + C_2^n - n,$$

其中 $\sum_{i=1}^{C_2^n - n} a_i$ =凸 n 邊形中的對角線交點總數 $= C_4^n$

所以

$$S = 1 + C_4^n + C_2^n - n = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12)$$

解題評註：

有位同學使用到 Euler 公式 $V - E + F = 2$，藉由求得的對角線交點及分割出的線段個數來求得區域個數。另一位同學利用觀察到的規則寫出遞迴式，雖然未解出一般式，亦值得鼓勵。

問題編號
5505

在某個餐會中，總共有 200 個人參加，已知任何四個人中至少有一個人認識其餘三個人(這裡的「認識」是一種雙向的關係，即若 A 認識 B，則 B 亦會認識 A)，而且餐會上有三個人互不認識。試問，餐會上是否有人認識其他所有參加者？最多會有多少人認識所有參加者？

參考解答：

會有 197 人認識所有參加者。

假設甲、乙、丙為互不認識的三人。

(1) 在其他人中，任選兩人 A、B，我們可證明，A、B 兩人必互相認識：考慮甲、乙、A、B 四個人的關係，因甲、乙互不認識，所以 A 或 B 必認識其他三個人，即 A、B 必互相認識。因此我們可得到結論：除了甲、乙、丙三人外，其他 197 人皆互相認識。

(2) 再考慮甲、乙、丙、A 四個人的關係，因甲、乙、丙互不認識，所以，A 必認識甲、乙、丙三人。

由(1)(2)可得結論：除甲、乙、丙外，其餘的 197 人皆認識所有的參加者。