抛體與階梯

徐國誠
臺北市立成淵高級中學

學過抛體運動（projectile motion）的人，對於斜抛石頭落在階梯上的問題，應該不會覺得陌生，因爲這是高中物理上課講解常見的例題，同時出現在各校期中考的試題中也是屢見不鮮。但是這麼老生常談的例子，又有什麼奇怪的地方呢？通常試題會給定初速和仰角，以及階梯的長度與寬度，然後要求兩個問題，就是石頭打中第幾階，和何時擊中階梯。對於後者，坊間的參考書籍並沒有給予詳細的解釋和說明，而學生也常常不求甚解地被動接受書中的計算過程，其中能夠提出切要問題者，更是少之又少。我們可以先看下面的例子：

一小石頭由階梯底端，以 5.0 公尺／秒的速度，仰角 53°斜向抛出。已知每一級階梯的高度爲 10 公分、寬度爲 20 公分。若重力加速度 g = 10 公尺／秒 ^{2}，則：

（1）小石頭第一次落於階梯的哪一階？

（2）擊中階梯需時若干？

首先我們要知道階梯的階數是如何定義的。直覺上階數就像是疊磚塊一樣，地面階數爲零，往上依次加 1，如同圖一(*a*)所示；不過本文爲了計算上的方便，採用地面階數爲 1，如同圖一(*b*)的定義。當然真正重要的是石頭到底擊中哪一階，而不是階數的定義。

一般對於這個問題的解法，實際上都有瑕疵，最常見的解法如下：

設小石頭能擊中第 n 階，則

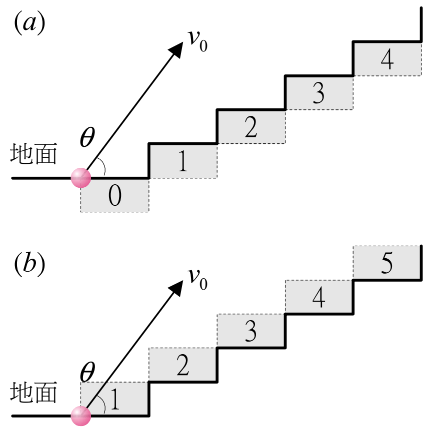
$$\begin{cases} x = 5.0\cos 53°t = 0.20n \\ y = 5.0\sin 53°t - \dfrac{1}{2}gt^2 = 0.10n \end{cases}$$

兩式相除，得 t = 0.50 秒，再代回上面其中一式，求得

n = 7.5

於是 n 取第 8 階，代回第一式，因此小石頭擊中階梯的時間爲

$$t = \frac{8}{15}\text{秒}$$



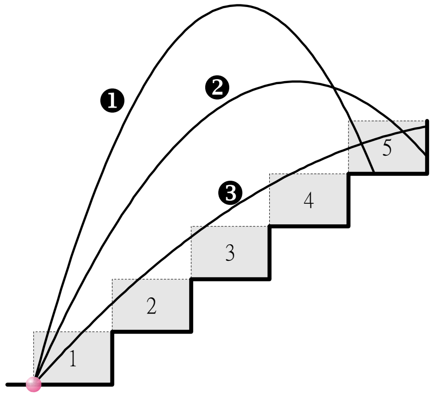
圖一　階梯階數的兩種不同定義。

以上的解法都可以在各種參考書籍中找到，而且幾乎每一本都大同小異。這裡不免有些疑問出現，第一，解出擊中第

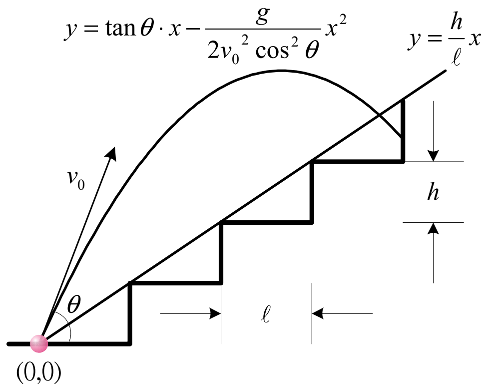
8 階後，爲何要代回第一式而不是第二式？第二，從聯立方程式中解出時間爲 0.50 秒，但是最後的答案卻是 $\frac{8}{15}$ 秒，當然這裡也可以說明是因爲聯立方程式假設的 n 爲整數，但方程式解出之後並非整數，因此 0.50 秒不是正確解。可是若把 $n = 8$ 代回第二式，得出的答案卻又是另外一個，爲 $\frac{2}{5}$ 秒，又該如何解釋這個解是否也是正確答案呢？（當然正確答案只有一個，因爲不可能第一次擊中同一階而出現兩個不同的時間）

其實，到底要代回第一式還是代回第二式，需視小石頭擊中階梯的水平面還是鉛直面。例如圖二擊中第 5 階，若是擊中階梯的時候，小石頭仍在上升途中，則一定是擊中階梯的鉛直面（如軌跡❸）；假如是在小石頭下降途中擊中階梯，那麼擊中階梯的水平面或是鉛直面都有可能（如軌跡❶❷）。因此，若是石頭鉛直方向的末速小於零，則我們就無法判斷小石頭是擊中哪一面；而不知道擊中哪一面，也勢必無法求得石頭擊中階梯的正確時間。

爲了避免尚未知道擊中階梯的時間，反而利用時間去解石頭擊中第幾階的矛盾作法，我們可以利用拋物線的軌跡方程式，與階梯的直線方程式求聯立解，如圖三。不過這裡要先說明的是，前面的解法也沒有錯，事實上，用軌跡方程式的方法求擊中第幾階，與之前的解法是完全相同的，只不過軌跡方程式可以將時間的因素暫時隱藏起來。



圖二　小石頭擊中階梯的可能方式示意圖。



圖三　拋物線的軌跡方程式，與階梯的直線方程式求聯立解。

於是我們假設每一級階梯的高度爲 h，寬度爲 ℓ，以拋射點爲平面座標的原點，且斜向拋射的初速爲 v_0，仰角爲 θ，則通過每一級階梯右上角連線的方程式爲

$$y = \frac{h}{\ell} x \qquad (1)$$

另外斜拋的軌跡方程式爲

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta} x^2 \qquad (2)$$

將第(1)式代入第(2)式，得到直線與拋物線的交點 x 座標爲

$$x=\frac{2{v_0}^2\cos\theta}{g}(\sin\theta-\frac{h\cos\theta}{\ell})$$

再將上式與階梯的寬度 ℓ 相除，看它落在哪一階的範圍，便可知其擊中的階數。設 x 與 ℓ 的比值爲 n_0，取 n_0 的高斯值再加 1，就是石頭擊中的階數了，因此

$$n=[\,n_0\,]+1 \qquad (3)$$

若是 n_0 本身即爲整數，那麼 n 的值是 n_0 或是 n_0+1，基本上並沒有差別，因爲第 n 階的尾端就是第 $n+1$ 階的開頭，因此 n_0 爲整數的級數，可以說是第 n_0 階，也可以說是第 n_0+1 階。而上面所述的 n_0 爲

$$n_0=\frac{x}{\ell}=\frac{2{v_0}^2\cos\theta}{g\ell}(\sin\theta-\frac{h\cos\theta}{\ell}) \qquad (4)$$

至於石頭擊中階梯的時間，我們可以分別討論擊中第 n 階的水平面與鉛直面的可能性。首先假設石頭是擊中第 n 階的水平面，則由圖一(b)可知，石頭在鉛直方向的位移爲 $(n-1)h$，則由等加速度公式

$$(n-1)h=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

上式 t 的一元二次方程式解爲

$$t=\frac{v_0\sin\theta}{g}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2(n-1)gh}{{v_0}^2\sin^2\theta}}\right) \qquad (5)$$

由上式可知，通過高度 $(n-1)h$ 的時間有兩個，一個在上升途中，另一次在下降途中。但是從圖二中可以知道，擊中階梯的水平面，一定是當石頭正在下降的途中，因此我們必須取時間較長的答案（取正），才會符合實際情況。

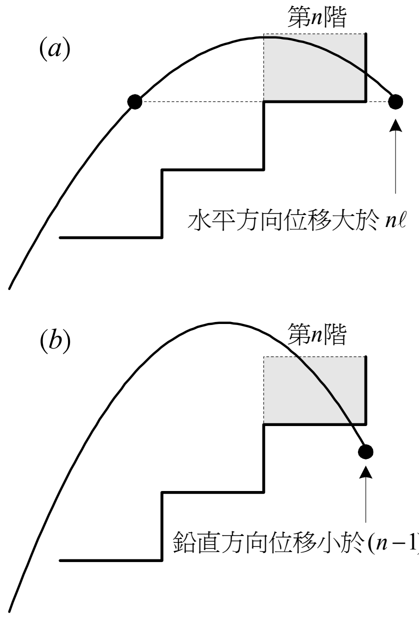
接著將時間 t 代入斜向拋射的水平方向位移 x：

$$\begin{aligned}x&=v_0\cos\theta\cdot t\\&=\frac{{v_0}^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left(1+\sqrt{1-\frac{2(n-1)gh}{{v_0}^2\sin^2\theta}}\right)\end{aligned} \qquad (6)$$

假如石頭確定是落在第 n 階的水平面上，那麼第(6)式的 x 必須符合底下的條件

$$(n-1)\ell\le x\le n\ell \qquad (7)$$

可是如果石頭是擊中第 n 階的鉛直面上，那麼第(6)式的 x 就會跑出第(7)式的範圍之外，同時也會大於 $n\ell$，如圖四(a)所示。



圖四　當假設情況與實際不符合時的位移情形。

另外，假設石頭是擊中第 n 階的鉛直面上，則由圖一(b)可知，石頭在水平方向的位移爲 $n\ell$，由於斜向拋射的水平速度爲定值，因此

$$n\ell=v_0\cos\theta\cdot t$$

$$t = \frac{n\ell}{v_0 \cos\theta} \qquad (8)$$

將上式中的時間 t 代入斜向拋射的鉛直方向位移 y：

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= n\ell \tan\theta - \frac{g n^2 \ell^2}{2{v_0}^2 \cos^2\theta} \end{aligned} \qquad (9)$$

如果確定是落在第 n 階的鉛直面上，那麼第(9)式中的 y 也須符合

$$(n-1)h \le y \le nh \qquad (10)$$

但若是實際情況爲擊中第 n 階的水平面，則第(9)式的 y 就不符合第(10)式的範圍，同時也會小於 $(n-1)h$，如圖四(b)所示。

以這一題爲例，先從第(4)式求出 n_0 的值，以求得石頭擊中第幾階，

$$n_0 = \frac{2\times 25\times \frac{3}{5}}{10\times 0.20}\left(\frac{4}{5} - \frac{0.10\times\frac{3}{5}}{0.20}\right) = 7.5$$

所以擊中的階數 n 爲

$$n = [\,7.5\,] + 1 = 8$$

而從第(6)式與第(7)式可以判斷石頭是否擊中第 8 階的水平面，第(6)式的 x 化簡爲

$$x = 1.2 + 0.30\sqrt{2}$$

其值會大於 1.6 公尺，已經超出第 8 階水平位移的範圍了（第 8 階水平位移的範圍介於 1.4 至 1.6 公尺之間）。由此可知，石頭應該是擊中第 8 階的鉛直面。不過我們還是從第(9)式與第(10)式判斷石頭是否真的擊中鉛直面，從第(9)式求得鉛直方向位移大約爲 0.71 公尺，這個值剛好就落在第(10)式的 0.70 和 0.80 公尺之間，就如我們所判斷的，石頭是擊中第 8 階的鉛直面。從這裡就可以確定擊中階梯的時間了，因此根據第(8)式，石頭擊中第 8 階的時間爲

$$t = \frac{8\times 0.20}{5.0\times\frac{3}{5}} = \frac{8}{15}\text{ 秒}$$

而這個答案與之前計算所得者相同，唯一不同的是，後者有經過較嚴密的假設與判斷。

假如我們把初速改爲 10 公尺／秒，其餘條件不變，那麼從第(4)式可得到 n_0 恰好等於 30，於是我們可以這麼說，石頭打中的是第 30 階的鉛直面，也可以說打中的是第 31 階的水平面，而石頭擊中階梯的時間，從第(5)式的 n = 31 或第(8)式的 n = 30，都可以得出 t = 1.0 秒的答案。

接下來，我們再把這個例子延伸出去。一般的斜向拋射如果拋射點與落地點在同一高度，則拋射角在 45°時可以拋得最遠，那麼在這個例子裡面，我們應該以多少的拋射角，才可以將石頭拋上最大的階數呢？我們可以先從第(4)式求出 n_0 的最大值，當 n_0 有最大值時，就代表所拋上的階數 n 也有最大值。

假設連接階梯的直線斜率爲 $\tan\phi$，其值爲 $\frac{h}{\ell}$，則將 n_0 改寫成

$$n_0 = \frac{2{v_0}^2}{g\ell}(\sin\theta\cos\theta - \tan\phi\cos^2\theta)$$
$$= \frac{2{v_0}^2}{g\ell}(\frac{1}{2}\sin 2\theta - \tan\phi\cos^2\theta) \qquad (11)$$

將 n_0 對 θ 微分，並令其值爲零，因此

$\cos 2\theta + \tan\phi \sin 2\theta = 0$

$\therefore \cos 2\theta \cos\phi + \sin 2\theta \sin\phi = 0$

利用和角公式得到

$\cos(2\theta - \phi) = 0$

由於拋射角 θ 介於 0 至 90°之間，而 ϕ 也大於零，所以從上式可以知道

$2\theta - \phi = 90°$

$$\theta = 45° + \frac{1}{2}\phi \qquad (12)$$

從上式可以了解，在一斜角 ϕ 的階梯上斜拋一物，欲使物體第一次落下時有最大位移，其拋射角應等於一般斜拋的 45° 再加上階梯斜角的一半。

以本題爲例，階梯斜角爲

$\phi = \tan^{-1} 0.50 \approx 26°$

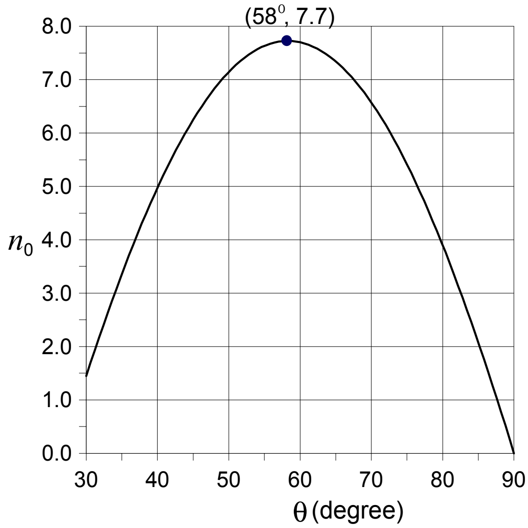
從第(12)式可以得到石頭欲拋上最大階數時的拋射角爲

$$\theta = 45° + \frac{1}{2} \times 26° = 58°$$

將 $\theta = 58°$ 代回第(4)式求 n_0，而 $\sin 58° = 0.85$、$\cos 58° = 0.53$，所以

$n_0 = 7.7$

表示其所拋上去的階數仍然是第 8 階。當然影響 n_0 的值不只是拋射角和階梯斜角，還包括石頭的初速 v_0 以及階梯的寬度 ℓ。圖五是例題中的 n_0 與拋射角 θ 的關係曲線，從圖中可發現石頭拋上的階數最大值就是 8，而階數爲 8 的拋射角範圍大約從 49°至 67°之間。



圖五　例題中的 n_0 與拋射角 θ 的關係曲線。

最後把第(12)式代回第(11)式，也就是以階梯斜角 ϕ 爲變數，其餘條件不變，視其 n_0 與 ϕ 的變化關係，此時我們以符號 $(n_0)_{max}$ 代替 n_0，因爲這是具有最大階數的 n_0。化簡後的 $(n_0)_{max}$ 爲

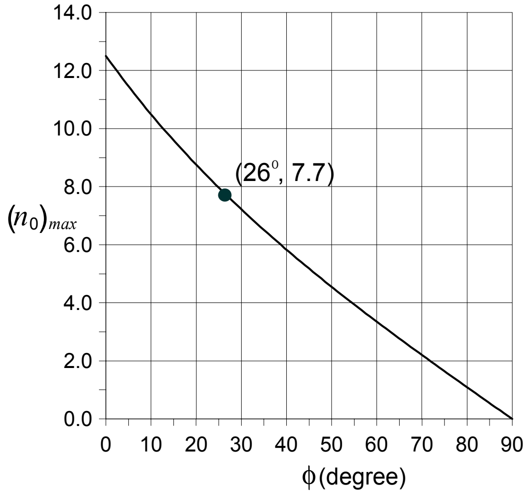
$$(n_0)_{max} = \frac{{v_0}^2}{g\ell}(\sec\phi - \tan\phi) \qquad (13)$$

圖六是例題中的 $(n_0)_{max}$ 與階梯斜角 ϕ 的關係曲線。從曲線可以看出，若將初速和階梯寬度固定，則階梯斜角愈小時，石頭拋上階梯的階數就愈大。圖中 $\phi = 0$ 時，$(n_0)_{max} = 12.5$，表示其走過的階數是 12.5 階，而每一階的寬度是 0.20 公尺，因此石頭飛行的距離爲

$x = 12.5 \times 0.20 = 2.5$ 公尺

而這正是一般斜向拋射的最大水平射程 R，

$$R=\frac{2{v_0}^2\sin 45°\cos 45°}{g}=\frac{{v_0}^2}{g}=2.5$$ 公尺。



圖六　例題中的 $(n_0)_{\max}$ 與階梯斜角 ϕ 的關係曲線。