三切線可決定多少拋物線

趙文敏
國立臺灣師範大學　數學系

九十四學年度大學入學考試中心指定科目考試數學甲的多重選擇第 9 題，因爲大學入學考試中心所公布的答案與部分數學教師預期的答案不相同，因而引起一些討論。本文將就該試題中的拋物線給出全部的方程式，並給出與這個題目相關的一些數學知識，提供有興趣者參考。這個題目的內容是這樣的：

有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0），並與 x-軸、直線 $y=x-1$、直線 $y=-x-1$ 相切。下列敘述何者正確：

（1）此拋物線的對稱軸必為 y-軸。

（2）若此拋物線的對稱軸為 y-軸，則其焦距為 1。（註：拋物線的焦距為焦點到頂點的距離）

（3）此拋物線的頂點必在 x-軸上。

（4）有不只一條拋物線滿足此條件。

這個題目所牽涉的一個數學問題是：「給定三相異直線，有多少拋物線與此三直線相切？」在圓錐曲線的相關理論中，這個問題的答案可以明確地敘述如下：

（A）若給定的三相異直線中至少有兩線平行，或給定的三相異直線共點，則**沒有**任何拋物線與此三直線相切。前者的理由是：任何拋物線都不會有兩條切線互相平行；後者的理由是：過拋物線內部一點，沒有任何切線；過拋物線上一點，只有一條切線；過拋物線外部一點，只有兩條切線。

（B）若給定的三相異直線兩兩相交，且三直線不共點，即：三交點可做爲一個三角形的三個頂點，則有**無限多**拋物線與此三直線相切。這些拋物線分別與三相異直線相切的三個切點，恰有一個切點在上述三角形的一邊上，另兩個切點分別在包含其餘兩邊的直線上、但不在邊上。這種現象與三角形的旁切圓類似，而且這些拋物線也像旁切圓一樣可分成三組，每一組都有無限多。參看下圖 1。

在本文中，我們將先求出與上述試題中三直線相切的拋物線方程式。因爲拋物線有無限多，所以拋物線方程式中的係數會含有參數，下文將有兩種不同的參數選擇法，一種參數描述焦點的位置，另一種參數描述其中一切點的位置。不論哪一種參數選擇法，拋物線方程式的計算都需要引用到拋物線切線的一些相關性質，在下文中會將這些性質作清楚的敘述與證明。

最後，我們會說明如何利用幾何軟體 Geometer's Sketchpad 來繪出這些拋物線，這些拋物線的繪圖當然還是要根據前述的切線性質。

甲、以焦點位置為參數的拋物線方程式

給定拋物線的焦點與兩條切線，可以作出拋物線的準線。其次，給定拋物線的三條切線，可以確定拋物線焦點的可能位置所成的軌跡。這兩件工作所以可行，乃是根據下述兩個性質，前者根據性質 1，後者根據性質 2。

【性質 1】

抛物線的焦點至拋物線的每條切線的垂足都在拋物線過其頂點的切線上，而焦點對每條切線的對稱點都在拋物線的準線上。

【性質 2】

由拋物線的任意三切線相交所成的三角形，其外接圓通過焦點而其垂心在準線上。

在上述指定科目考試數學甲的多重選擇第 9 題中，拋物線的三切線方程式分別為 $y=0$， $x+y+1=0$ 與 $x-y-1=0$。這三切線兩兩的交點分別為 $A(0,-1)$，$B(1,0)$ 與 $C(-1,0)$。

根據性質 2，拋物線的焦點 F 在△ABC 的外接圓上，所以，焦點 F 的坐標可以表示成 $F(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$0\le\alpha<2\pi$。因為拋物線的焦點不能在拋物線的任何切線上，所以，$F\ne A$，$F\ne B$，$F\ne C$。於是，$\alpha\ne 0$，$\alpha\ne\pi$，$\alpha\ne(3/2)\pi$。

其次，焦點 F 對三切線 $BC: y=0$，$CA: x+y+1=0$ 與 $AB: x-y-1=0$ 的對稱點分別為

$(\cos\alpha,-\sin\alpha)$，

$(-1-\sin\alpha,-1-\cos\alpha)$ 與

$(1+\sin\alpha,-1+\cos\alpha)$。

根據性質 1，此三點都在準線上。依性質 2，△ABC 的垂心 $A(0,-1)$ 也在準線上。

利用 $(-1-\sin\alpha,-1-\cos\alpha)$ 與 $(1+\sin\alpha,-1+\cos\alpha)$ 兩點坐標，很易計算得準線方程式為 $(\cos\alpha)x-(1+\sin\alpha)y-(1+\sin\alpha)=0$。請注意：利用上述四點坐標計算準線的斜率時，共有下述四種表示法：

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}，\frac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}，$$

$$\frac{1-\cos\alpha-\sin\alpha}{-1+\cos\alpha-\sin\alpha}，\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}。$$

當 $\alpha\ne 0$、$\alpha\ne\pi$、$\alpha\ne(3/2)\pi$ 時，前三種表示法的分母都不等於 0，而且其值都相等。至於第四種表示法，雖然在 $\alpha\ne 0$、$\alpha\ne\pi$、$\alpha\ne(3/2)\pi$ 時，其值也與其他三種表示法相等；但此種表示法在 $\alpha=(1/2)\pi$ 時卻不適用，因為當 $\alpha=(1/2)\pi$ 時，點 $(\cos\alpha,-\sin\alpha)$ 與點 $(0,-1)$ 重合。

根據拋物線的定義、焦點的坐標與準線的方程式，可得拋物線方程式為

$$(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2$$

$$=\frac{[(\cos\alpha)x-(1+\sin\alpha)y-(1+\sin\alpha)]^2}{\cos^2\alpha+(1+\sin\alpha)^2}$$ 。

化簡、並將同類項合併，可得出與三直線 $y=0$， $x+y+1=0$ 與 $x-y-1=0$ 都相切的所有拋物線的方程式如下：

P_α： $(1+\sin\alpha)^2x^2+2\cos\alpha(1+\sin\alpha)xy$

$+(\cos^2\alpha)y^2-2\cos\alpha(1+\sin\alpha)x$

$-2(1+3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)y+\cos^2\alpha=0$，

其中， $0\le\alpha<2\pi$ ，且 $\alpha\ne0$ ， $\alpha\ne\pi$ ， $\alpha\ne(3/2)\pi$。顯然地，當 $\alpha=\pi/2$ 時，對應的 $P_{\pi/2}$： $x^2-4y=0$ 就是對稱軸爲 y-軸、焦距爲 1、頂點在 x-軸上的特例。

我們順便計算三直線的切點坐標。將 $y=0$ 代入拋物線方程式，得

$$[(1+\sin\alpha)x-\cos\alpha]^2=0$$ 。

由此可知：拋物線 P_α 與直線 $BC:y=0$ 相切，其切點坐標爲

$$(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha},0)$$ 。

將 $y=-x-1$ 代入拋物線方程式，得

$[(1+\sin\alpha)^2-2\cos\alpha(1+\sin\alpha)+\cos^2\alpha]x^2$

$+[-4\cos\alpha(1+\sin\alpha)+2\cos^2\alpha$

$+2(1+3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)]x+[2\cos^2\alpha$

$+2(1+3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)]=0$，或

$(1-\cos\alpha+\sin\alpha)^2x^2$

$+4(1-\cos\alpha+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)x$

$+4(1+\sin\alpha)^2=0$，或

$[(1-\cos\alpha+\sin\alpha)x+2(1+\sin\alpha)]^2=0$。

由此可知：拋物線 P_α 與直線 $CA:x+y+1=0$ 相切，其切點坐標爲

$$(\frac{-2(1+\sin\alpha)}{1-\cos\alpha+\sin\alpha},\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\sin\alpha})$$ 。

將 $y=x-1$ 代入拋物線方程式，得

$[(1+\sin\alpha)^2+2\cos\alpha(1+\sin\alpha)+\cos^2\alpha]x^2$

$+[-4\cos\alpha(1+\sin\alpha)-2\cos^2\alpha$

$-2(1+3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)]x$

$+[2\cos^2\alpha+2(1+3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)]=0$，或

$(1+\cos\alpha+\sin\alpha)^2x^2$

$-4(1+\cos\alpha+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)x$

$+4(1+\sin\alpha)^2=0$，或

$[(1+\cos\alpha+\sin\alpha)x-2(1+\sin\alpha)]^2=0$。

由此可知：拋物線 P_α 與直線 $AB:x-y-1=0$ 相切，其切點坐標爲

$$(\frac{2(1+\sin\alpha)}{1+\cos\alpha+\sin\alpha},\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha})$$ 。

乙、以切點位置為參數的拋物線方程式

給定拋物線的三條切線，只要已知其中一切線上切點的位置，就可以確定其它兩切線上切點的位置。這件工作所以可行，乃是根據下面性質 3。

【性質 3】

過一拋物線上三相異點 P、Q、R 分別作切線，設三切線兩兩的交點分別爲 A、B、C，且 P、B、C 共線，Q、C、A 共線，R、A、B 共線，這些點必滿足下述兩性質：

（1）令 $\overrightarrow{BP}=u\overrightarrow{PC}$、$\overrightarrow{AC}=v\overrightarrow{CQ}$、$\overrightarrow{RB}=w\overrightarrow{BA}$ 表示三個向量等式，則係數 u、v、w 彼此相等。

（2）在△ABC 的外部作三點 D、E、F 使

得 $ABDC$、$BCEA$、$CAFB$ 都是平行四邊形，則 D、Q、R 共線，E、R、P 共線，F、P、Q 共線。

在性質 3(1)的三個等式中，以 P 換成 Q、Q 換成 R、R 換成 P 及 A 換成 B、B 換成 C、C 換成 A，可得 $\overrightarrow{CQ}=u\overrightarrow{QA}$、$\overrightarrow{BA}=v\overrightarrow{AR}$、$\overrightarrow{PC}=w\overrightarrow{CB}$；將所得的三個等式再以 P 換成 Q、Q 換成 R、R 換成 P 及 A 換成 B、B 換成 C、C 換成 A，可得 $\overrightarrow{AR}=u\overrightarrow{RB}$、$\overrightarrow{CB}=v\overrightarrow{BP}$、$\overrightarrow{QA}=w\overrightarrow{AC}$。我們留給讀者自己證明這兩組等式中的係數 u、v、w 也彼此相等，但三組等式中的三個 u 不一定相等。

再回到指定科目考試數學甲的多重選擇第 9 題，拋物線的三切線方程式分別為 $y=0$， $x+y+1=0$ 與 $x-y-1=0$。這三切線兩兩的交點分別為 $A(0,-1)$，$B(1,0)$ 與 $C(-1,0)$。

設所求拋物線與直線 $BC: y=0$ 的的切點坐標為 $P(t,0)$，因為 P 不能與 B、C 重合，所以，$t\neq 1$ 且 $t\neq -1$。在直線 BC 上，因為 P、B 與 C 的坐標分別為 $P(t,0)$、$B(1,0)$ 與 $C(-1,0)$，所以，顯然可得 $\overrightarrow{BP}=[(t-1)/(-1-t)]\overrightarrow{PC}$。在直線 CA 上與直線 AB 上分別選取點 $Q(x_2,y_2)$ 與點 $R(x_3,y_3)$，使得 $\overrightarrow{AC}=[(t-1)/(-1-t)]\overrightarrow{CQ}$ 及 $\overrightarrow{RB}=[(t-1)/(-1-t)]\overrightarrow{BA}$。將各點坐標代入，即得

$$((-1)-0\ ,\ 0-(-1))$$

$$=\frac{t-1}{-1-t}(\ x_2-(-1)\ ,\ y_2-0\ )$$ 與

$$(\ 1-x_3\ ,\ 0-y_3\ )$$

$$=\frac{t-1}{-1-t}(\ 0-1\ ,\ (-1)-0\ )。$$

由前一等式可得點 Q 的坐標為 $Q(2/(t-1), (-t-1)/(t-1))$，依性質 3(1)，點 Q 就是拋物線與直線 $CA: x+y+1=0$ 的切點。同理，由後一等式可得點 R 的坐標為 $R(2/(t+1),(-t+1)/(t+1))$，依性質 3(1)，點 R 就是拋物線與直線 $AB: x-y-1=0$ 的切點。

設所求拋物線的方程式為 $(jx+ky)^2+lx+my+n=0$。因為此拋物線與 x 軸相切，所以，拋物線的軸與 x 軸不平行。由此可知：$j\neq 0$。

因為拋物線與直線 $CA: x+y+1=0$ 相切於點 $Q(2/(t-1), (-t-1)/(t-1))$，所以，$2/(t-1)$ 是下述方程式的重根：

$$((j-k)x-k)^2+lx-mx-m+n=0，$$

或寫成

$$(j-k)^2x^2+(-2k(j-k)+l-m)x$$
$$+k^2-m+n=0。$$

於是，得

$$\frac{(j-k)^2}{(t-1)^2}=\frac{-2k(j-k)+l-m}{-4(t-1)}$$

$$=\frac{k^2-m+n}{4}。\qquad(1)$$

因為拋物線與直線 $AB: x-y-1=0$ 相切於點 $R(2/(t+1),(-t+1)/(t+1))$，所以，$2/(t+1)$ 是下述方程式的重根：

$$((j+k)x-k)^2+lx+mx-m+n=0，$$

或寫成

$$(j+k)^2x^2+(-2k(j+k)+l+m)x$$
$$+k^2-m+n=0。$$

於是，得

$$\frac{(j+k)^2}{(t+1)^2}=\frac{-2k(j+k)+l+m}{-4(t+1)}$$

$$=\frac{k^2-m+n}{4} \text{。} \qquad (2)$$

因爲(1)式與(2)式的最右端相等，所以，得

$$\frac{(j-k)^2}{(t-1)^2}=\frac{(j+k)^2}{(t+1)^2}$$

$$=\frac{-2k(j-k)+l-m}{-4(t-1)}$$

$$=\frac{-2k(j+k)+l+m}{-4(t+1)} \text{。} \qquad (3)$$

由(3)式的前兩項可得

$(t+1)^2(j-k)^2=(t-1)^2(j+k)^2$，

$4tj^2-4(t^2+1)jk+4tk^2=0$，

$(j-tk)(tj-k)=0$，

$j=tk$ 或 $k=tj$。

先考慮 $j=tk$ 的情形。因爲 $t\neq\pm1$，所以，由(3)式的後三項可得

$$k^2=\frac{-2k(tk-k)+l-m}{-4(t-1)}$$

$$=\frac{-2k(tk+k)+l+m}{-4(t+1)} \text{。}$$

於是，可得

$$\begin{cases} l-m=-4(t-1)k^2+2(t-1)k^2=-2(t-1)k^2 \\ l+m=-4(t+1)k^2+2(t+1)k^2=-2(t+1)k^2 \end{cases} \text{。}$$

解得 $l=-2tk^2$，$m=-2k^2$。

再由(1)式或(2)式得

$$k^2=\frac{k^2-m+n}{4} \text{，}$$

$n=4k^2-k^2+m=(4-1-2)k^2=k^2$。

由此可知：所求的方程式爲

$(tkx+ky)^2-2tk^2x-2k^2y+k^2=0$，

或寫成

$k^2(tx+y-1)^2=0$。

此方程式的圖形不是拋物線，不合問題所求。

其次考慮 $k=tj$ 的情形，因爲 $t\neq\pm1$，所以，由(3)式的後三項可得

$$j^2=\frac{-2tj(j-tj)+l-m}{-4(t-1)}$$

$$=\frac{-2tj(j+tj)+l+m}{-4(t+1)} \text{。}$$

於是，可得

$$\begin{cases} l-m=-4(t-1)j^2+2t(1-t)j^2=(-2t^2-2t+4)j^2 \\ l+m=-4(t+1)j^2+2t(1+t)j^2=(\ 2t^2-2t-4)j^2 \end{cases} \text{。}$$

解得 $l=-2tj^2$，$m=(2t^2-4)j^2$。

再由(1)式或(2)式得

$$j^2=\frac{k^2-m+n}{4} \text{，}$$

$$n=4j^2-k^2+m$$

$$=(4-t^2+2t^2-4)j^2=t^2j^2 \text{。}$$

由此可知：所求的拋物線方程式爲

$(jx+tjy)^2-2tj^2x+(2t^2-4)j^2y+t^2j^2=0$，

或寫成

$x^2+2txy+t^2y^2-2tx+(2t^2-4)y+t^2=0$。

只要在此方程式中令 t 等於 $\cos\alpha/(1+\sin\alpha)$，即可知此方程式與甲小節所求得的拋物線方程式相同。

拋物線 $x^2+2txy+t^2y^2-2tx+(2t^2-4)y+t^2=0$ 與直線 $BC: y=0$ 相切於點 $P(t,0)$、與直線 $CA: x+y+1=0$ 相切於點 $Q(2/(t-1),(-t-1)/(t-1))$、又與直線

$AB: x-y-1=0$ 相切於點 $R(2/(t+1)$, $(-t+1)/(t+1))$，這些都很容易證明。

當 $-1<t<1$ 時，切點 $P(t,0)$ 在 $\overline{BC}$ 上。另一方面，因為 $-2<t-1<0$，由此得 $2/(t-1)<-1$，所以，切點 $Q(2/(t-1),(-t-1)/(t-1))$ 與點 A 在點 C 的異側。因為 $0<t+1<2$，由此得 $2/(t+1)>1$，所以，切點 $R(2/(t+1),(-t+1)/(t+1))$ 與點 A 在點 B 的異側。

當 $t>1$ 時，切點 $P(t,0)$ 與點 C 在點 B 的異側。另一方面，因為 $t-1>0$，由此得 $2/(t-1)>0$，所以，切點 $Q(2/(t-1),(-t-1)/(t-1))$ 與點 C 在點 A 的異側。因為 $t+1>2$，由此得 $0<2/(t+1)<1$，所以，切點 $R(2/(t+1),(-t+1)/(t+1))$ 在 $\overline{AB}$ 上。

當 $t<-1$ 時，切點 $P(t,0)$ 與點 B 在點 C 的異側。另一方面，因為 $t-1<-2$，由此得 $-1<2/(t-1)<0$，所以，切點 $Q(2/(t-1),(-t-1)/(t-1))$ 在 $\overline{CA}$ 上。因為 $t+1<0$，由此得 $2/(t+1)<0$，所以，切點 $R(2/(t+1),(-t+1)/(t+1))$ 與點 B 在點 A 的異側。

前面三段所解說的結果，正是本文前言的(B)中所敘述的有關與旁切圓類似的內容。

丙、三個性質的證明

【性質 1】

拋物線的焦點至拋物線的每條切線的垂足都在拋物線過其頂點的切線上，而焦點對每條切線的對稱點都在拋物線的準線上。

證：設拋物線的方程式為 $y^2=4cx$，則焦點坐標為 $(c,0)$，準線方程式為 $x+c=0$。

過此拋物線上任意點 $(y_0^2/4c, y_0)$ 的切線方程式為

$$y_0y=2c(x+y_0^2/4c) \text{ 或}$$
$$4cx-2y_0y+y_0^2=0 \text{。}$$

焦點 $(c,0)$ 至切線的垂足坐標為 $(0,y_0/2)$，此點在拋物線 $y^2=4cx$ 過頂點 $(0,0)$ 的切線 $x=0$ 上。另一方面，焦點 $(c,0)$ 對切線的對稱點坐標為 $(-c,y_0)$，此點在準線上。‖

【性質 2】

由拋物線的任意三切線相交所成的三角形，其外接圓通過焦點而其垂心在準線上。

證：設拋物線的方程式為 $y^2=4cx$，而三個切點的坐標分別為 $P(y_1^2/4c, y_1)$、$Q(y_2^2/4c, y_2)$ 與 $R(y_3^2/4c, y_3)$，則三切線方程式分別為 BC：$4cx-2y_1y+y_1^2=0$，CA：$4cx-2y_2y+y_2^2=0$ 與 AB：$4cx-2y_3y+y_3^2=0$，由此進一步可得三切線兩兩的交點坐標分別為

$$A((y_2y_3)/(4c),(y_2+y_3)/2) \text{，}$$
$$B((y_3y_1)/(4c),(y_3+y_1)/2) \text{ 與}$$
$$C((y_1y_2)/(4c),(y_1+y_2)/2) \text{。}$$

設 $y_1<y_2<y_3$，將焦點 F 與點 B 的坐標代入 $4cx-2y_2y+y_2^2$，可得

$$4c\cdot c-2y_2\cdot 0+y_2^2>0 \text{，}$$

$$4c\cdot\frac{y_3y_1}{4c}-2y_2\cdot\frac{y_3+y_1}{2}+y_2^2$$

$$=(y_2-y_1)(y_2-y_3)<0\text{ 。}$$

由此可知：焦點 F 與點 B 在直線 CA 的異側。

因爲

$$\overrightarrow{BA}=\left(\ \frac{y_2y_3}{4c}-\frac{y_3y_1}{4c}\ ,\ \frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_3+y_1}{2}\ \right)$$

$$=\frac{y_2-y_1}{4c}(\ y_3\ ,\ 2c\ )\ ,$$

$$\overrightarrow{BC}=\left(\ \frac{y_1y_2}{4c}-\frac{y_3y_1}{4c}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_3+y_1}{2}\ \right)$$

$$=\left(\frac{y_2-y_3}{4c}\right)(\ y_1\ ,\ 2c\ )\ ,$$

$$\overrightarrow{FA}=\left(\ \frac{y_2y_3}{4c}-c\ ,\ \frac{y_2+y_3}{2}-0\ \right)$$

$$=\frac{1}{4c}(\ y_2y_3-4c^2\ ,\ 2c(y_2+y_3)\ )\ ,$$

$$\overrightarrow{FC}=\left(\ \frac{y_1y_2}{4c}-c\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}-0\ \right)$$

$$=\frac{1}{4c}(\ y_1y_2-4c^2\ ,\ 2c(y_1+y_2)\ )\ ,$$

所以，可得

$\cos\angle ABC$

$$=\frac{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_3y_1+4c^2)}{(y_2-y_1)(y_3-y_2)\sqrt{y_3^2+4c^2}\sqrt{y_1^2+4c^2}}$$

$$=-\frac{y_3y_1+4c^2}{\sqrt{y_3^2+4c^2}\sqrt{y_1^2+4c^2}}\ ,$$

$\cos\angle AFC$

$$=\frac{y_1y_2^2y_3-4c^2(y_2y_3+y_1y_2)+16c^2+4c^2(y_1y_2+y_2^2+y_3y_1+y_2y_3)}{\sqrt{(y_2y_3-4c^2)^2+4c^2(y_2+y_3)^2}\sqrt{(y_1y_2-4c^2)^2+4c^2(y_1+y_2)^2}}$$

$$=\frac{(y_2^2+4c^2)(y_3y_1+4c^2)}{\sqrt{(y_2^2+4c^2)(y_3^2+4c^2)}\sqrt{(y_1^2+4c^2)(y_2^2+4c^2)}}$$

$$=\frac{y_3y_1+4c^2}{\sqrt{y_3^2+4c^2}\sqrt{y_1^2+4c^2}}\text{ 。}$$

由此可知：$\angle ABC$ 與 $\angle AFC$ 互補，點 B、A、F、C 共圓。

其次，過點 $B((y_3y_1)/(4c)\ ,\ (y_3+y_1)/2)$ 而與直線 CA：$4cx-2y_2y+y_2^2=0$ 垂直的直線方程式爲

$$4cy_2x+8c^2y-y_1y_2y_3-4c^2(y_3+y_1)=0\ ,$$

過點 $C((y_1y_2)/(4c),(y_1+y_2)/2)$ 而與直線 AB：$4cx-2y_3y+y_3^2=0$ 垂直的直線方程式爲

$$4cy_3x+8c^2y-y_1y_2y_3-4c^2(y_1+y_2)=0\text{ 。}$$

上述二直線的交點坐標爲 $(-c,(y_1y_2y_3)/(8c^2)+(y_1+y_2+y_3)/2)$，此交點顯然在準線上，亦即：$\triangle ABC$ 的垂心在準線上。 ||

性質 2 中的 $\angle ABC$ 與 $\angle AFC$ 互補，或 $\angle BAC=\angle BFC$，$\angle BCA=\angle BFA$，也可以使用綜合方法證明。

【性質 3】

過一拋物線上三相異點 P、Q、R 分別作切線，設三切線兩兩的交點分別爲 A、B、C，且 P、B、C 共線，Q、C、A 共線，R、A、B 共線，這些點必滿足下述兩性質：

（1）令 $\overrightarrow{BP}=u\overrightarrow{PC}$、$\overrightarrow{AC}=v\overrightarrow{CQ}$、$\overrightarrow{RB}=w\overrightarrow{BA}$ 表示三個向量等式，則係數 u、v、w 彼此相等。

（2）在 $\triangle ABC$ 的外部作三點 D、E、F 使得 $ABDC$、$BCEA$、$CAFB$ 都是平行四

邊形，則 D、Q、R 共線，E、R、P 共線，F、P、Q 共線。

證：(1)設拋物線方程式為 $y^2=4cx$，切點 P、Q 與 R、切線交點 A、B 與 C 的坐標同性質 2 的證明。因為

$$\overrightarrow{BP}=\left(\frac{y_1^2}{4c}-\frac{y_3y_1}{4c}\text{ , }y_1-\frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

$$=(y_1-y_3)\left(\frac{y_1}{4c}\text{ , }\frac{1}{2}\right)\text{，}$$

$$\overrightarrow{PC}=\left(\frac{y_1y_2}{4c}-\frac{y_1^2}{4c}\text{ , }\frac{y_1+y_2}{2}-y_1\right)$$

$$=(y_2-y_1)\left(\frac{y_1}{4c}\text{ , }\frac{1}{2}\right)\text{，}$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{y_1y_2}{4c}-\frac{y_2y_3}{4c}\text{ , }\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

$$=(y_1-y_3)\left(\frac{y_2}{4c}\text{ , }\frac{1}{2}\right)\text{，}$$

$$\overrightarrow{CQ}=\left(\frac{y_2^2}{4c}-\frac{y_1y_2}{4c}\text{ , }y_2-\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$=(y_2-y_1)\left(\frac{y_2}{4c}\text{ , }\frac{1}{2}\right)\text{，}$$

$$\overrightarrow{RB}=\left(\frac{y_3y_1}{4c}-\frac{y_3^2}{4c}\text{ , }\frac{y_3+y_1}{2}-y_3\right)$$

$$=(y_1-y_3)\left(\frac{y_3}{4c}\text{ , }\frac{1}{2}\right)\text{，}$$

$$\overrightarrow{BA}=\left(\frac{y_2y_3}{4c}-\frac{y_3y_1}{4c}\text{ , }\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

$$=(y_2-y_1)\left(\frac{y_3}{4c}\text{ , }\frac{1}{2}\right)\text{，}$$

所以，可得

$$\overrightarrow{BP}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_1}\overrightarrow{PC}\text{，}$$

$$\overrightarrow{AC}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_1}\overrightarrow{CQ}\text{，}$$

$$\overrightarrow{RB}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_1}\overrightarrow{BA}\text{。}$$

（2）因為 $ABDC$、$BCEA$、$CAFB$ 都是平行四邊形，所以，它們的對角線都互相平分。由此可知：點 D、E、F 的坐標分別為
$D((y_3y_1+y_1y_2-y_2y_3)/(4c)\text{ , }y_1)$，
$E((y_1y_2+y_2y_3-y_3y_1)/(4c),y_2)$與
$F((y_2y_3+y_3y_1-y_1y_2)/(4c),y_3)$。
因為

$$\overrightarrow{DQ}=\left(\frac{y_2^2-y_3y_1-y_1y_2+y_2y_3}{4c}\text{ , }y_2-y_1\right)$$

$$=(y_2-y_1)\left(\frac{y_2+y_3}{4c}\text{ , }1\right)\text{，}$$

$$\overrightarrow{DR}=\left(\frac{y_3^2-y_3y_1-y_1y_2+y_2y_3}{4c}\text{ , }y_3-y_1\right)$$

$$=(y_3-y_1)\left(\frac{y_2+y_3}{4c}\text{ , }1\right)$$

$$=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\overrightarrow{DQ}\text{，}$$

所以，D、Q、R 共線。同理可證，E、R、P 共線，F、P、Q 共線。‖

性質 3(2)也可以根據性質 3(1)以綜合方法證明。

丁、由三切線繪出拋物線

根據性質 1 和性質 2 來作出與三直線相切的拋物線，其方法是很直接的，因為性質 1 和性質 2 可提供拋物線的焦點與準線，所以，利用焦點與準線很容易繪出拋物線。我們說明其作法如下：

給定兩兩相交、但不共點的三相異直線，設三交點分別記爲 A、B 與 C。

（1）在△ABC 的外接圓上任選異於 A、B 與 C 的任一點 F；

（2）作點 F 對三直線 BC、CA 與 AB 的對稱點，根據 Simson 定理，此三對稱點必在一直線 l 上；

（3）對於直線 l 上每個點 M，作線段 $\overline{FM}$ 的垂直平分線；

（4）過點 M 做直線 l 的垂直線；

（5）設(3)中的垂直平分線與(4)中的垂直線交於點 P_M，則當點 M 在直線 l 上變動時，點 P_M 所描繪的軌跡就是以點 F 爲焦點、直線 l 爲準線的拋物線。

（6）不論點 F 是△ABC 的外接圓上異於 A、B 與 C 的任何點，(5)中的拋物線都與三直線 BC、CA、AB 相切。參看圖 1-1、1-2、1-3。

請注意：在△ABC 的外接圓上選定異於 A、B 與 C 的一個點 F，就會有一條與三直線 BC、CA、AB 都相切的拋物線。因爲點 F 有無限多選擇，所以，拋物線也有無限多條。

根據性質 3 來作出與三直線相切的拋物線，方法就不像性質 1、2 那麼直接了，因爲我們需要從性質 3 中找出「當**哪個點**在**哪個圖形**上變動時，**哪個點**所描繪的軌跡就是所欲求的拋物線。」關於這一點，我們先根據性質 3 指出對作圖有幫助的兩點補充。

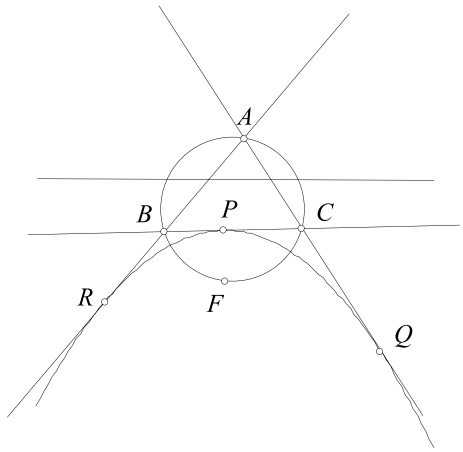

圖 1-1　焦點 F 在弧 BC 上

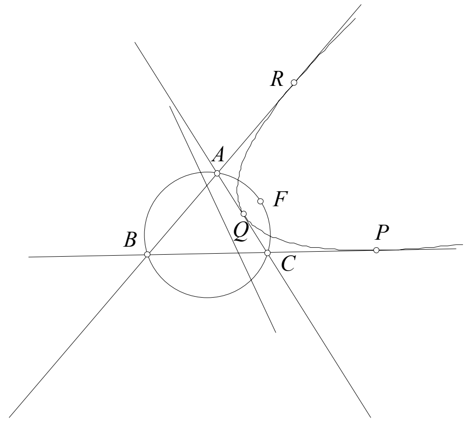

圖 1-2　焦點 F 在弧 CA 上

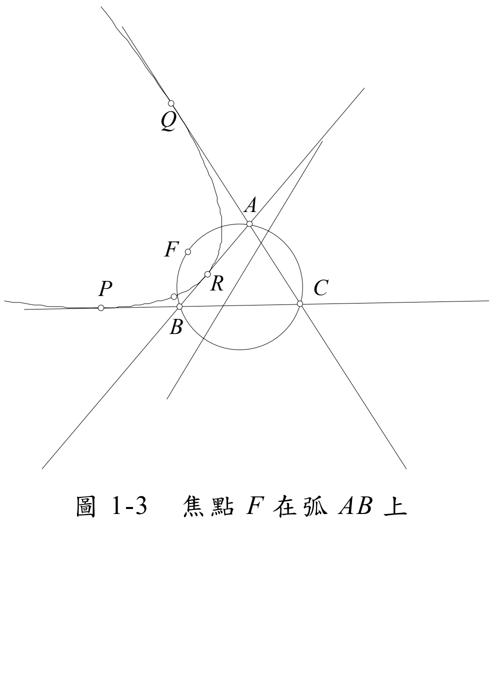

圖 1-3　焦點 F 在弧 AB 上

補充一：當拋物線與三切線 BC、CA、AB 中之一的切點已知時，性質 3(1)中的倍數 $u\,(=v=w)$ 就已確定，進而使另兩條切線上的切點跟著確定。由一切點作出另二切點的的一個方法如下：

設已知切線 BC 及其上的切點 P。以 $\triangle ABC$ 在另二切線上的邊 $\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 分別做爲一對角線，向 $\triangle ABC$ 外部作出點 E 與點 F 使 $BCEA$ 與 $CAFB$ 爲兩個平行四邊形，則依性質 3(2)，可知直線 PF 與切線 CA 的交點就是切點 Q，直線 PE 與切線 AB 的交點就是切點 R。參看圖 2。

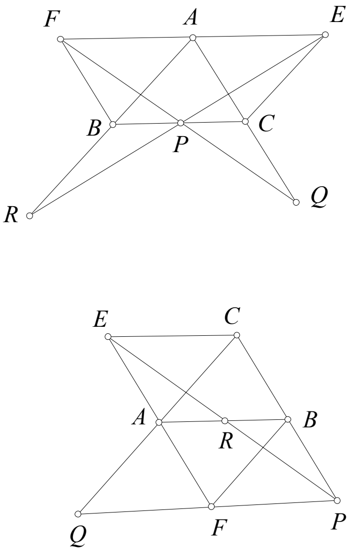

圖 2

補充二：當拋物線的二切線及其上的切點都已知時，則由兩切點的連線上異於兩切點的任意點，都可作出拋物線的一切線。其作法如下：

設已知切線 AQ 及其上的切點 Q、切線 AR 及其上的切點 R。設 D 是直線 QR 上異於切點 Q 與 R 的任意點，過 D 分別作切線 AQ 與切線 AR 的平行線，此兩對平行線圍成一個平行四邊形，則依性質 3(2)，此平行四邊形中異於 A 與 D 的兩頂點的連線是拋物線的一切線。參看圖 3。

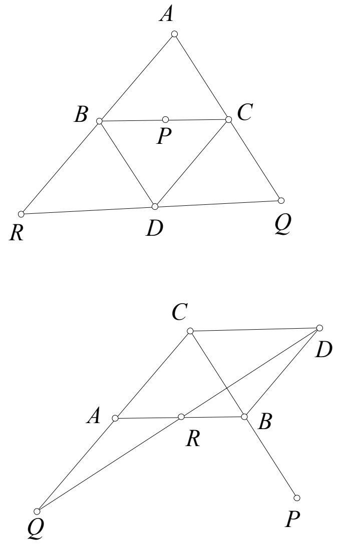

圖 3

有了前面兩點補充，我們說明由性質 3 來繪出與三直線相切的拋物線之作法如下：

給定兩兩相交、但不共點的三相異直線，設三交點分別記爲 A、B 與 C。

(1)在直線 BC 上任選異於 B 與 C 的任一點 P；

(2) 分別以 $\triangle ABC$ 的邊 $\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 做爲一對角線，作出點 E 與點 F 使 $BCEA$ 與 $CAFB$ 爲兩個平行四邊形，設直線 PF 與直線 CA 交於點 Q，直線 PE 與直線 AB 交於點 R；

(3) 對於直線 PQ 上異於點 P 與 Q 的任意點 X，過 X 分別作直線 CP 與直線

CQ 的平行線，此兩對平行線圍成一個平行四邊形 $A_X X B_X C$，連接直線 $A_X B_X$；

（4）以△ $A_X B_X C$ 的邊 $\overline{CA_X}$ 做為一對角線，作出點 E_X 使 $B_X C E_X A_X$ 為平行四邊形，連接直線 PE_X；

（5）設(4)中的直線 PE_X 與(3)中的直線 $A_X B_X$ 交於點 R_X，則當點 X 在直線 PQ 上變動時，點 R_X 所描繪的軌跡就是與直線 BC、CA、AB 分別相切於點 P、Q、R 的拋物線。參看圖 4。(請注意：繪製此拋物線時，不需使用點 R，點 R 在此只用來檢驗相切。)

請注意：在直線 BC 上選定異於 B、C 的任何點 P，就會有一條與三直線 BC、CA、AB 都相切的拋物線。因爲點 P 有無限多選擇，所以，拋物線也有無限多條。

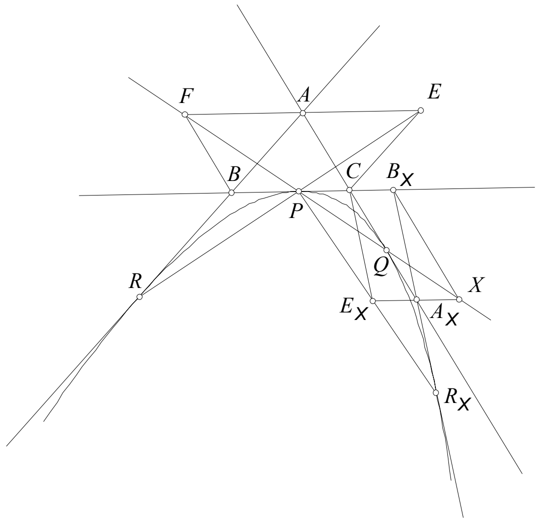

圖 4