

創意教學活動「四邊形的獵捕」－ 包含關係的推理

何敏華

嘉義縣私立協同高級中學

摘要

此教學活動最主要的內容，乃是藉由遊戲競賽的方式，讓國中生在對幾何形狀的特徵與性質分析上，能充分運用數學辨證、推理和溝通的技巧，進而發展「四邊形包含關係」的學習。學習活動的設計理念依據，採用 van Hiele 之幾何思考的五個學習階段 (five sequential phases of learning) 來參酌，並做為課室實際執行的依據。最後，經過研究者對活動歷程的分析發現，透過此遊戲的進行，協助了國一學生釐清對不同四邊形定義、特徵與性質的迷思概念，並主動以非形式推論的方式建構且理解「正方形、長方形、菱形均包含於平行四邊形中」，至於「正方形包含於長方形」、「正方形包含於菱形」與「長方形與菱形共同會包含到的圖形是正方形」的概念，研究者在本文的反思與建議中，亦提出了活動歷程中可採取的機制方法。

關鍵字：van Hiele 之幾何思考的五個學習階段 (five sequential phases of learning)

文氏圖 (ven diagram)

包含關係 (inclusion relation)

壹、動機與目的

Van de Wall (1997) 曾指出，用來歸類和辨別不同幾何圖形的最好方法莫過於深入的了解這些圖形，而就圖形所涵蓋的眾多性質看來，學習者不僅可以用不同的方法去探究、瞭解這些性質，亦可藉助這些性質來敘述和分析圖形，因此，幾何圖形的特性分析歷程能夠引導學生做演繹推理思考的發展。針對「平面圖形間包含關係」的探究而言，學習者不僅需要對圖形的定義、性質做充分的了解，亦需要透

過這些性質來分類圖形，並推演出相異圖形間包含關係的確認。所以，研究者為促使國中學生在「圖形間包含關係的推理」上更充分地學習與發展，設計了「四邊形的獵捕」教學活動，希望藉助幾何形狀特徵與性質的分析過程，來協助學習者發展幾何圖形間關係的辯證，而此活動實施的方式乃採用辨證、競賽的遊戲來進行，希望透過遊戲而使得幾何的學習更具豐富性、有趣性與挑戰性 (van Hiele, 1999)，以達數學教育的重要目標之一---經由幾

何的教學協助學生發展邏輯思考與推理的能力。

根據 van Hiele (1986) 的幾何思考發展理論，認為幾何的思考是一種階段性的層次發展歷程，而且每個層次間的提升最主要是經由教學的影響，並非由於個體年齡的成熟。其理論中的五個循序階段層次分別是：層次一的視覺辨識 (visualization)、層次二的分析 (analysis) 或描述 (descriptive)、層次三的非形式演繹推理 (informal deduction)、層次四的形式演繹 (formal deduction)、層次五的嚴密

性系統 (rigor)。如果就幾何形狀思考的發展來看，五個層次的思考歷程是由層次一的依據實物之整體外形輪廓來辨別的方式開始，再至層次二的辨別、描述圖形特徵之能力階段，再發展至層次三的探求、比較內在屬性與包含關係的階段，而後至層次四的幾何理論證明階段，最後才有機會到達連數學家都未必能發展到的層次五之不同幾何系統思維階段。圖 1-1 說明了幾何形狀思考發展的結構化關係 (Van de Wall, 1997)：

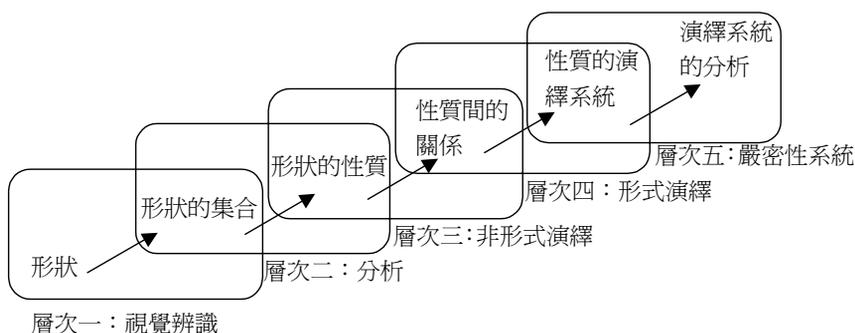


圖 1-1. 幾何形狀思考的發展 (取自 Van de Wall, 1997)

我國在設計幾何方面的教材與中小學幾何學習的理論依據，係採用 van Hiele 的幾何思考發展模式與實務研究 (左台益, 2002; 吳德邦, 2001; 劉好, 1998; 譚寧君, 1993), 思考發展的架構歷程是由實體而至圖形、由具體而至抽象、再由觀察而至推理。本研究中的學習活動對象乃針對國中生 (約屬於 van Hiele 幾何思考層次的第三層次) 所設計，並以文氏圖 (ven diagram) 做為活動中推理的工具，促進學生在分類四邊形時，能在圖形屬性、特徵與性質上做充分的討論，且藉由非形式的

推理辨證方法發展四邊形包含關係的概念 (屬於 van Hiele 幾何思考層次中第三層次應發展的能力)。

貳、相關理論基礎

一、教學設計理念

透過實驗、操作與探索的教學活動來認識幾何圖形的性質，一直是國內外幾何教材內容所強調的精神 (NCTM, 2000; 教育部, 2002)。而在九年一貫課程所提出的「學校本位課程發展」，與倡導「教師參與」、「由下而上改革」的理念下，教師在

編制幾何教材、執行課室教學時，爲了促使學生能從一個思考層次提昇到另一個較高的思考層次，所採用的教學方法和教材的設計、使用，就顯得格外地重要。而圖形間包含關係的概念，它不僅屬於 van Hiele 幾何思考層次之第三層次所要發展的能力，亦是九年一貫課程綱要(教育部，2002)中所明示第四階段(8-9 年級)所應發展的能力指標。因此在本研究中，學習活動之實施流程與設計理念基礎，乃是根據 van Hiele 之幾何思考的五個學習階段 (five sequential phases of learning) 來參酌，茲將闡述如下：

(一) 諮詢 (inquiry/information)

此階段爲使學習者能熟悉所欲探究的領域，教師可藉由例子或非例子來進行重要概念的引介，期盼透過這樣的過程能激發學生的動機去發現某些結構(Fuys, Geddes, Geddes & Tischler, 1988 ; Presmeg, 1991)。因此，教師與學生的對話、引發探究、問題的產生、介紹幾何發展階段中的專門術語，都可在此最初的學習階段實踐。而教師透過觀察與發問和學生所做的雙向溝通，不僅促發學習者的投入，也提供了教師了解學生先備知識與經驗的時機 (Fuys et. al., 1988)，並設立了進一步的學習步驟 (左台益，2002)。

(二) 導向 (directed orientation)

經過第一個學習階段後，學生開始進入了教師事先所設計的安排來探究主題，

教學活動重點應是依序引導學生認識學習方向，並逐漸地向學生顯露出要發展的幾何特徵，因此在此階段中，教師應當導向與提供學生對學習主題有更多的認識 (Fuys et. al., 1988)。

(三) 闡明 (explicitation)

學習者在這階段中，應以先前所探討的經驗爲基礎去交換和陳述新興的意見，並能以明確的數學語言去表徵，因此，教師應注意到學生在課室討論中所習慣使用的表達方法是否適當，並促進學生在部份相關教學主題上的概念可以形成 (van Hiele, 1986)。

學生在教師最少的協助下，基於經驗而能夠去增長與精練他們的數學語言和詞彙，因而有能力表達、交換、討論與教學相關的主題，所以在此階段，老師的角色主要爲幫助學生用正確、合適的數學語言、詞彙和術語 (Billstein, Libeskind & Lott, 1993 ; Crowley, 1987)。

(四) 自由探索 (free orientation)

進入此階段時，教師可給予較複雜或多解法的開放性問題，讓學習者能用自己的方法來完成解題的工作，並獲得學習的經驗。因此，針對此階段的學習特色，教學活動設計應著重在啓發學生自由探索與創造的能力 (Fuys et. al., 1988 ; Presmeg, 1991)，讓自由探索的歷程，促使學生對研究主題間的關係可變得更加清楚明確 (Hoffer, 1983)。

教師為使學生能更精熟諮詢、導向、闡明三階段中所獲得的數學概念，可透過有多種解法的問題或活動，讓學生在第四個學習階段中去探索完成。學生在開放性的問題中，可透過作圖、舉例、演繹推理等不同的解題方法來累積經驗，並經歷自我探索的過程，以對所學的課題教材概念作明確的關連（左台益，2002）。

（五）統整（integration）

在最後的統整階段中，老師藉著對教材主體作整體性的縱覽（global surveys），以幫助學習者最後將探索的主題、活動的

反應與獲得的概念知識，做一個有組織性的整合。然而，此縱覽性的整合乃是針對學生已知道的內容所實施的結論性概述，並非是另一個新概念的呈現（van Hiele, 1986；Hoffer, 1983）。因此，老師在給予整體性的縱覽概述的同時，也協助了學生將已知道的概念吸收、內化和統整各種關係成爲一個新的思考體（Crowley, 1987）。

就本研究中所實施的學習活動而言，其主要目的乃是發展學生在四邊形包含關係上的辯證，在教學上所要提升學生發展的是 van Hiele 幾何思考層級之層次三（非形式演繹層次）的能力，並且做爲

表 2-1 van Hiele 的五個學習階段概述與「四邊形的獵捕」之活動設計對照表

van Hiele 的五個學習階段與概述		「四邊形的獵捕」之活動設計說明
諮詢	<ul style="list-style-type: none"> * 教師透過觀察與發問和學生做雙向溝通，促發學習者的投入，與提供教師了解學生的先備知識與經驗。 	<ul style="list-style-type: none"> * 教師先詢問學生有關正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形等圖形的性質。 * 透過觀察與提問的過程，教師可初步獲得學生是否具備有關四邊形性質（幾何思考層級二的能力）的先備知識。
導向	<ul style="list-style-type: none"> * 學生開始進入教師事先所設計的安排來探究主題，教學活動重點爲依序引導學生認識學習的方向。 * 鼓勵學生發問。 	<ul style="list-style-type: none"> * 教師爲順利進行「四邊形的獵捕」之活動實踐，因此必須先對文氏圖中交集、聯集的知識，給予充分的解釋與補充。 * 教師先示範一次活動的遊戲玩法，與遊戲過程中數學辯證的溝通方式。
闡明	<ul style="list-style-type: none"> * 學生以之前階段的探討經驗爲基礎去交換和陳述新興的意見，並以適當的數學語言去表達。 * 老師幫助學生使用正確、合適的數學語言、詞彙和術語。 	<ul style="list-style-type: none"> * 以圖形的特徵、性質爲知識基礎，讓學生在遊戲中充分闡釋、辯證與推理，達到有效數學溝通的目的。例如，對有關「正方形也是長方形」或「菱形也屬於平行四邊形」等內容，學生必須清楚地向小組成員敘述、說明、辯證原因，達到溝通和釐清圖形一般化與特殊化間的隸屬關係。 * 過程中教師幫助學生對數學溝通術語的認識與使用。
自由探索	<ul style="list-style-type: none"> * 教師給予較複雜或多解法的開放性問題，讓學習者能用自己的方法來完成解題的工作，並獲得學習的經驗。 * 藉此自由探索的歷程，學生對研究主題間的關係可變得更加清楚明確。 	<ul style="list-style-type: none"> * 活動遊戲中，每個人都有輪到一次當莊主的機會，因此，學生從在第一人當莊主時已經歷過的學習、辯證、闡明之經驗，因而在輪到自己當莊主時，就能夠透過發現與自由創造的歷程來決定所要使用的性質標籤，甚至設計出更複雜的情境問題。
統整	<ul style="list-style-type: none"> * 教師對教材主體作整體性的縱覽與概述，使學習者將所學的知識概念做一個彙整與聚集。 * 統整內容非新概念呈現與介紹。 	<ul style="list-style-type: none"> * 教師藉由綜合討論「贏的思考策略是什麼？」，統整四邊形間的分類與包含關係的推論。 * 教師將所觀察到學生較特別的情境、思考過程或迷思提出，共同討論。

進升到層次四(形式化演繹層次)的基礎, 因此, 活動設計的架構, 從學生能描述、分析、了解構成四邊形的特徵要素為起點, 再依據 van Hiele 的五個學習階段來設計與引導學生學習, 以促進學生能深入推論、辯證、思考四邊形包含關係的能力。以下為「四邊形的獵捕」遊戲活動與 van Hiele 的五個學習階段對照之說明:

二、文氏圖的應用

美國 NCTM (2000) 指出, 幾何教學的準則之一為學生應能夠分析二維與三維空間中幾何形狀的特徵與性質, 並且發展幾何關係上的數學辯證。其中 6-8 年級的學習標準也明確指出: 藉由文氏圖可以來學習建立平行四邊形、長方形、正方形、菱形間包含關係的概念。因此, 以文氏圖來幫助學生了解不同圖形之間的包含關係, 無疑是為學生提供了一個視覺組織架構圖的統整學習工具 (NCTM, 2000)。

透過文氏圖在集合論中餘集、交集、聯集關係上的意義, 可使得圖形間包含關係的抽象內容被清楚地看到, 也讓學習者更有能力瞭解圖形間複雜分類的從屬層級關係, 最後, 文氏圖呈現了建構抽象概念與幫助學生看到概念一致性與層級性的具體表徵方式 (Fountas & Pinnell, 2001)。因此, 在本教學活動中, 文氏圖概念的應用不僅扮演一個建構資訊的推理工具, 亦是一個統整重要概念或主題成為樣式關係的方法 (Bromley, 1995)。

參、活動介紹與實施步驟

以下為針對此活動「四邊形的獵捕」, 所需事先設計的教具與其意義、實施對象與時間、遊戲實施步驟與規則之說明:

(一) 教具的準備與意義

1. 三條顏色不同的繩子或線, 用來圍成文氏圖中代表三個集合的大圓圈, 並置於小組桌面上。如圖 3-1.1 所示。

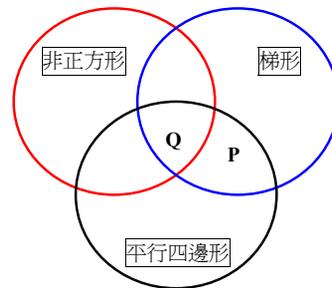


圖 3-1.1

2. 做出 10 張具備「正、反」性質的標籤(可使用標籤貼紙): 正方形、非正方形、長方形、非長方形、菱形、非菱形、平行四邊形、非平行四邊形、梯形、非梯形。輪到當莊家的人可任意重複使用其中三張性質標籤, 用以決定圖 3-1.1 中三個大圓圈所代表的集合內容, 然而在部份交集的區域上, 有可能會有交集不存在或無意義的情形產生, 如圖 3-1.1 中的區域 P 與 Q, 但此情形並不影響活動的進行, 因為性質標籤僅是用以標示三個大圓圈的屬性內容, 其所產生的意義是如何才是本活動歷程中所要辯證與討論的部份。因此, 此時三個大圓圈的相交關係就不全然是文氏圖的意義了, 僅能

視為以文氏圖的概念所延伸應用、發展的推理工具。

3. 四套顏色不同的形狀卡（可用厚紙板製作），每套形狀卡必須包含不同結構的正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形各兩張。圖 3-1.2 為其中一套形狀卡的例子。

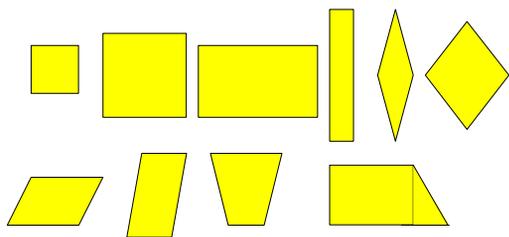


圖 3-1.2

（二）實施對象與時間

可針對國中各年級學生實施，每四人一組，活動實施時間約為兩節課（90 分鐘）。在本研究中，此學習活動為第一次實施，且實施對象為國中一年級下學期的學生一組四人，為使此研究能提供更給教師（即研究者）更豐富的資料，所以立意選擇在口語表達能力上較清晰者。

（三）遊戲實施步驟與規則

1. 小組四人各輪流一次當莊家，莊家必須選擇代表三個大圓圈的內容性質標籤，並貼入三大圓圈內，如圖 3-1.3。
2. 當莊家貼好性質標籤後，每人在自己的 10 張形狀卡中任取 7 張出來玩（教師可自行調整為 8~10 張），然後依據自己的推理判斷，同時一起將所有的形狀卡放自己認為的正確區域，圖 3-1.3 顯示部份形狀卡被決定放置的區域位置。

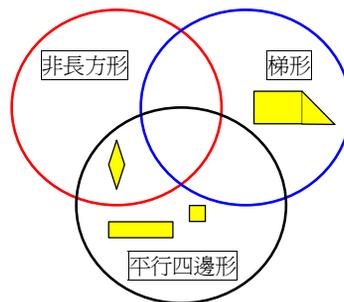


圖 3-1.3

3. 當四個人均將自己的形狀卡全部放置完畢後，由莊主開始輪流做更換或獵補形狀卡的動作，亦即輪流到的人，每人每次可以選擇更換一張自己認為放錯的形狀卡，並放進正確的位置，或者選擇獵捕一張別人放錯的形狀卡，並移出文氏圖（獵捕成功獲得一分）。
4. 在執行上述 3 的步驟時，重點是學生必須對所採取的動作據理說明與辯證，並清楚回答別人提出的疑問，且獲得全部人的同意時才能更換自己形狀卡的位置或獵捕別人的形狀卡。
5. 若不更換自己的形狀卡也無法獵取別人的形狀卡時，那就喊「pass」，直到所有的人都喊「pass」，且經由老師的觀察亦無錯誤，則第一輪結束，再換第二人當莊家，依序四人均當完莊家後，整個遊戲結束，並計算個人得分。
6. 每人發表「贏的思考策略」，或者分類（放置形狀卡的位置）的方法與依據，做為統整四邊形間分類與包含關係推論的心得分享。
7. 教師的角色扮演：

教師在整個遊戲過程中，教學的方法除了參照 van Hiele 的幾何學習理論：諮

詢、導向、闡明、自由導向、統整外，教師透過觀察，看見學生思考的歷程與數學辯證溝通的方法，因此，適時適當的給予釐清修正、深入提問或引導介入是非常重要的。尤其在統整討論的階段中，教師藉由學生的心得分享，對教材主體作整體性的縱覽與概述，可使學習者將所學的知識概念做一個彙整與聚集。

肆、活動歷程分析結果

以下為針對遊戲活動歷程中，四個莊主所決定的性質標籤、小組成員最初所放置的部份形狀卡位置、與小組成員在推理辯證時的溝通對話，教師經由觀察紀錄、資料的整理，將原案的對話進行分析，且在每一個原案分析中採用一個簡短的敘述標籤來呈現原案在此概念上的真實想法或活動歷程所產生的價值。

一、第一輪莊主所設定的性質標籤為：**正方形**、**非菱形**、**平行四邊形**。圖 4-1 呈現了小組成員在一開始分類時所放置形狀卡的部份情形（包括放置錯誤的形狀卡），且活動歷程中的原案分析亦如下說明。

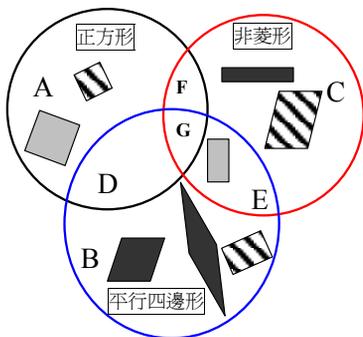


圖 4-1

透過辯證的有效溝通，學生能夠立即修正數學知識並闡明正確的推論

（一）長方形也是平行四邊形的一種；長方形是平行四邊形的特例

原案一

小文 01：我的卡（斜線者）都沒有放錯，其他人也都放對。

菁菁 01：我覺得灰色的長方形不應該在 E 中，應在非菱形的 C 中。

小清 01：不對。它不算菱形，但以平行四邊形的定義來說只要兩邊等長。

老師 05：只要兩邊等長？哪兩邊等長？

小清 02：這兩邊，對邊等長。

菁菁 02：哦！那它可以放 E 中了！

小清 03：我的卡（灰色者）都沒有放錯，但是在 C 中的黑色長方形放錯了，長方形也是平行四邊形，因為兩邊垂直（指出鄰邊）、平行（指出對邊），有兩組對邊相等，所以它可以進階到這層（E），不一定要在 C 中。

【大家同意，小清獵補了一張牌】

小文 05：我要救自己的牌（B 中斜線的長方形），因為長方形是屬於平行四邊形的一種，又不是菱形，所以我覺得它要放在 E 中。

原案一 分析

在互動與挑戰的過程中，學生使用和擴張他們在幾何圖形與集合上的知識，不僅讓自己可以重新自我審視，同時也促使同儕的思考共同聚焦，得到「長方形可進階至平行四邊形（菁菁 02、小清 03）」、「長

方形是屬於平行四邊形的一種（小文 05）」之完整的數學知識。

（二）對平行四邊形的認知會受一般繪圖時常用的大小、方位之影響，以致於產生菱形不是平行四邊形的錯誤迷思。

原案二

小萱 03：我要救自己的這張牌（B 中的黑色菱形）。它應是菱形，應放在 D 中才對，因為這區（D）不算平行四邊形。

其他四人：哇？

老師 07：這區不算平行四邊形？

小萱 04：介於這個之間。

小清 05：但是你也滿足他們是正方形來講。

小萱 05：有啊！他們上下兩邊都一樣。

小文 05：可是沒有直角，所有看到的正方形都有四個直角。

菁菁 05：那就留在 B 就好了。

小萱 06：但是我還是不能放在這裡（B），因為這區不是菱形啊！這是平行四邊形所以不行。

.....

小清 10：它也是平行四邊形。

小萱 11：但是平行四邊形應該是這樣子

（指出 ），而這個（指出 ）兩個邊沒辦法平。

小清 11：這兩個都是。

小萱 12：這個  才是，比較標準、比較

好。這個  不是。

小清 12：又不一定要標準。你也可以這樣看啊（將形狀卡改放為

），不就平了（並指出對邊平行）。

（小萱點頭）

老師 08：你認為這個比較像你常見的平行四邊形？

小萱 13：（小萱點頭）我們平常又不是這樣畫的。

菁菁 06：這個性質也屬於平行四邊形，長方形、正方形、菱形都屬於。

原案二 分析

受到平常一般對平行四邊形大小、方位之繪圖的方式所影響，以致於對瘦瘦長長的平行四邊形判斷，無法以性質做考量（小萱 12、13），因此才會產生對此圖形

 的歸類指認為僅符合菱形的條件，因而將正方形與平行四邊形的交集（D 區）意義誤認為是菱形，誤認原因是認為菱形的產生是來自於正方形、平行四邊形兩個圖形間角度、邊長的演變，所以中間的 D 區的意義被曲解於圖形演變的歷程（小萱 04、06）。而透過同儕間辯證溝通的效果，學生能自動地思考、統整相關的概念（菁菁 06）。

的歸類指認為僅符合菱形的條件，因而將正方形與平行四邊形的交集（D 區）意義誤認為是菱形，誤認原因是認為菱形的產生是來自於正方形、平行四邊形兩個圖形間角度、邊長的演變，所以中間的 D 區的意義被曲解於圖形演變的歷程（小萱 04、06）。而透過同儕間辯證溝通的效果，學生能自動地思考、統整相關的概念（菁菁 06）。

透過隨機與自由創造的問題情境，可激勵更高的思考層級挑戰

(一) 正方形的集合包含於平行四邊形中原案三

菁菁 10：我要獵補灰色的正方形（在 A 區），因為它平行又符合正方形，所以應該在 D 中。

小文 10：那它放在這裡（A 區）也對啊！（自己有一張斜線正方形也放在 A 區），就是正方形，只是 D 區也符合正方形的條件。

老師 10：那請更進一步說明 A、D 兩區有什麼關係？

小文 11：都是正方形。A 區代表正方形，那也是平行四邊形，所以 A 也是有符合 D 區的條件，所以正方形也可以放在 A 中。

小清 13：那應該沒有 A 區存在，正方形應該都會在 D 中。

原案三 分析

因為性質標籤是由莊家隨意決定的，因此在文氏圖的部分交集區域有可能會產生不存在的情形，如在圖 4-1 中的 D 區。然而透過辯證，老師可引導學生在此區域做的深入討論（老師 10），提高推理思考與辨證的難度，增加數學知識的豐富性，促使正方形包含於平行四邊形的概念能由學生主動建構出來（小文 11、小清 13）。

二、第二輪莊主所設定的性質標籤為：非正方形、非梯形、非平行四邊形，如

圖 4-2。

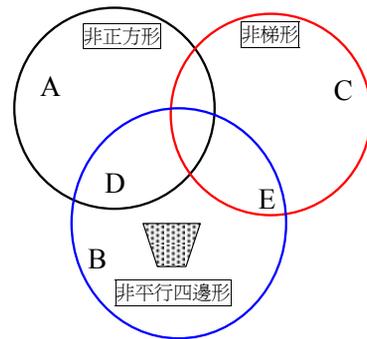


圖 4-2

經由過程中推理辯證的經驗，學生歸納與期待更具挑戰性的問題情境

原案四

菁菁 15：我要獵補 B 中網狀的梯形，它不是正方形也不是平行四邊形，應在 D 區。（大家都同意）

小清 15：pass！

小萱 15：pass!

小文 15：pass!

小萱 16：這組不好玩，不要都非啦！要穿插。

小清 16：剛剛那一輪好好玩！

原案四 分析：

學生在老師設計好的教學情境中能受到激勵與肯定，尤其是遊戲競賽式的活動，學生由經歷中歸納出如何增加問題的複雜程度（小萱 16），並高度期待挑戰的來臨。

三、第三輪莊主所設定的性質標籤為：正方形、菱形、非長方形，如圖 4-3。

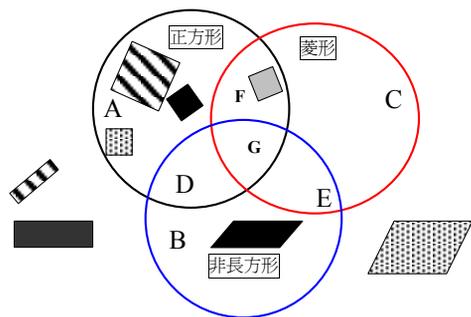


圖 4-3

小組成員透過觀察，產生了思考的刺激、修正與檢驗，因而呈現真實的概念情形

(一) 釐清不屬於三集合內之形狀卡的正確位置與意義。

原案五

(分類形狀卡時)

小清 20：好像很簡單！（小清先將一些形狀卡放在文氏圖的外圍後，才陸陸續續有人也跟著放）

老師 20：小萱你為什麼將一些牌放在外圍呢？

小萱 20：淘汰！

小清 21：出局！

小文 20：都不符合。

原案五 分析

開始分類時，有些同學對無法放在此三集合內的形狀卡無法做出決定（教師的觀察紀錄），一旦有人具體呈現思維時，刺激了組員聚焦思考此具體行為（小清 20），同時也釐清了自己原本難以判斷的概念，了解不屬於三集合內之形狀卡的正確位置與意義（小萱 20、小清 21、小文 20）。

(二) 四人共同都有「正方形不是長方形」的迷思

原案六

(分類形狀卡時)

小清 22：喔！（她將原本放在 F 中的正方形改放在 G 中之後，其他人馬上將自己原本在 A 中的正方形也放入 G 中）

老師 21：你們確定這樣改都是對的？

小文 21：對啊！正方形是菱形，可是不是長方形。

菁菁 20：對啊！四邊都等長，不是長方形。（其他人也都同意）

老師 22：那說說看什麼是長方形？

小清 23：四個直角，一長一短。

原案六 分析

從原本一開始的分類中，看不出在放在 A 區的正方形是否有「正方形不是長方形」的迷思（圖 4-3），經由組員的轉換後（小清 22），小組成員透過了觀察，刺激自己的思考聚焦於正方形、菱形、長方形間的關係，因此再度檢驗自己的判斷，進而呈現了自己真實概念的迷思（小文 21~小清 23）。

四、第四輪莊主所設定的性質標籤為：非正方形、非菱形、梯形，且部分形狀卡位置如圖 4-4。

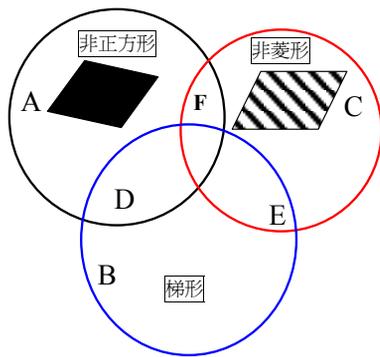


圖 4-4

能藉助菱形的性質來辨識與敘述圖形

原案七

小清 30：我要獵補 A 中的平行四邊形，因為它不屬於正方形也不屬於菱形，應該在 F 區中。

小萱 30：不是啦！它是菱形（如圖 4-5）。

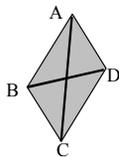


圖 4-5

菁菁 30：對啊！我也覺得它是菱形。

小清 31：它看起來兩邊又沒有對稱（指出鄰邊 AB 與 AD），我覺得它應放在非菱形和非正方形的 D 區中。

菁菁 31：可是它四邊等長。

小萱 31：沒有很精準，可是差不多一樣長。

小清 32：不行啦！你還要看它這樣子、這樣子（指出對角線 AC 與 BD）有沒有平分，有沒有垂直。你看這個是菱形它就有（拿出此形狀卡



來比劃）。

原案七 分析

當無法以目測精準地判斷邊長是否相等時（小萱 31），對圖形的判斷與描述由圖形的定義轉換至圖形的性質（小清 31、32），這說明了圖形的眾多性質，不只能用不同的方法來探究與瞭解，亦可藉助這些性質來敘述和分析圖形（Van de Wall, 1997）。

五、「贏的思考策略」討論結果分析

原案八

老師 40：你們用什麼思考方法讓自己不會放錯形狀卡，以致於在遊戲中可以贏？

菁菁 40：一個圖形可以屬於很多種類，譬如梯形也是非正方形、非菱形，很複雜，所以我就想它是哪一個和哪一個，於是就把圖形與文字做比較（意即形狀卡和性質標籤），然後再換下一個。

小文 40：我都先從最中間開始看，中間條件比較多，例如最後一輪中，就梯形，它屬於非正方形、非菱形又是梯形，那如果形狀卡不符合，就是一個條件刪掉，然後再慢慢去找符合的。

小萱 40：我都先從最外圍，先符合外圍項目，然後再朝兩個圈圈都有的，然後再看中間那一區，如果符合就放進去，這樣比較不容易出差錯。

小清 40（得分最多者）：我是先以一個來對照，譬如梯形它比較有拘束先拿

來對照，就是限制比較多的。因為梯形只能算是梯形，不能算其它種類的。假設今天我對照一個最外圍的，它不行，那麼這個圈就都不行（指出圖 4-3 的一個大圓圈），那我就都不用去考慮它，我就考慮其他兩個或這個（指出圖 4-3 的 A、B 和 D 區），剩下要考慮的就比較少，就不用想那麼多了。

原案八 分析

在此學習活動中，教師扮演了最少協助的角色，讓學生從情境和同儕間辯證的歷程中自由地探索，學習到不同的思考策略與解題方法，成功地達到由幾何特性的分析所引導之演繹推理的發展。例如，有人從交集最多的性質區域思考起（小文 40）、有人卻從限制最少的性質開始，再逐一檢驗是否符合條件的限制（小萱 40）、亦有人從最多限制的形狀卡開始做歸屬的判斷（小青 40）等。

伍、結論與反思

以下為從活動歷程的分析結果中，綜合學生表現的結論與教師對此創意教學活動所做的反思和建議。

結論：

（一）從小組在四邊形包含關係的推論中，獲得了以下四點有關數學知識概念的結論：

（1）學生可非形式地推論與理解長方形也是平行四邊形、長方形是平行四邊形

的一個特例、正方形的集合包含於平行四邊形中。

（2）對平行四邊形的認知會受一般繪圖時常用的大小、方位之影響，以致於產



生長得瘦瘦長長的菱形（如 ）不是平行四邊形的錯誤迷思。

（3）國一學生受長方形字面意義的影響，認為長方形長寬應是一邊長、一邊短，因此有「正方形不是長方形」的迷思。

（4）能藉助菱形的性質來辨識與敘述圖形為菱形的意義（如原案七的分析）。

（二）依據 van Hiele 的五個幾何思考學習階段所設計的教學活動，能讓學習者循序達到教學目標中幾何思考的發展，也允許教師看見學習者思考的過程。

（三）學習者在此活動的過程中，建構了幾何性質與集合知識的概念，也充分發展了清楚敘述數學論證、推理和溝通的技巧。

（四）在情意發展上，小組成員在同儕面前有渴望被接受的共同特質，因此對充分地發表評論能感覺安全，忘記困窘，並開放地表述自己的想法。

反思與建議：

（一）在整個活動的歷程中，都一直重複發生學生因為對圖形的基本定義、性質有迷思，而導致在放置形狀卡時，對從

屬、包含關係的判斷產生錯誤。研究者認為，針對此種情形，執行教師可藉助以下兩種方法來避免或改進：

1. 教師可在每一輪活動結束後，針對在該輪活動中，學生對圖形定義所犯的錯誤認知提出討論，並與學生共同澄清，以避免在下一輪活動時，又因相同的錯誤認知而導致包含關係判斷的能力無法發展。
2. 透過此活動亦說明了，圖形包含關係的判斷包含了兩項基本知識能力的運用—(1)圖形的定義、性質和(2)簡易邏輯關係的推理。因此，圖形的定義與性質應為該活動的重要先備知識，故在實施此活動之前，教師應先給予學生有充分認識與討論的機會。

(二) 針對本活動的教學目標是為「包含關係的判斷」而論，發現學生可非形式地推論與理解「正方形、長方形、菱形均包含於平行四邊形中」，然而，對於其它的包含關係卻無法在活動歷程中被明確地發覺或判斷。因此，教師應在學生所設計的性質標籤情境下，更敏銳地察覺出可啟發的包含關係概念，並在適當時機提問，促進小組討論與發現。以下兩點說明了在此活動中，執行教師應可把握住機會，進一步引導「正方形包含於長方形」、「正方形包含於菱形」的概念：

1. 在原案六中，發現小組成員有「長方形的邊是一長一短」的錯誤迷思，教師除了須給予長方形的定義釐清外，

同時可在此輪結束後，馬上給予小組討論「正方形、長方形包含關係」的學習機會。

2. 在第三輪莊主所設定的性質標籤為正方形、菱形與非長方形的情境中，執行教師應針對學生有人將正方形的形狀卡放置 A 區與 F 區(如圖 4-3)，給予學生進一步探究 A 區與 F 區在此情境下的意義，並引導出「正方形包含於菱形」的辨證。

(三) 對於「長方形與菱形共同會包含到的圖形是正方形」的概念，在此活動中並沒有機會被探究到，因此，為使四邊形包含關係討論的完整，執行教師不妨視國中學生的程度或年級，刻意安排性質標籤為正方形、長方形與菱形的情境(如圖 5-1)，讓學生不僅思考不同形狀卡的放置位置，並察覺辨證出：正方形的形狀卡位置可提升至 C 區、長方形的形狀卡位置可提升至 A 區、菱形的形狀卡位置可提升至 B 區，且引導至「長方形與菱形共同會包含到的圖形是正方形」的推論與理解。

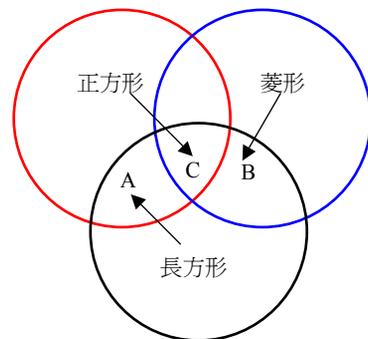


圖 5-1

參考資料

- 左台益 (2002)。van Hiele 模式之幾何教材設計。中等教育, 53(3), 44-53。
- 吳德邦 (2001)。van Hiele 五階段學習模式對國小學生學習幾何概念之研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告。
- 教育部 (2002)。數學學習領域。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北：教育部。
- 劉好 (1998)。平面教材的處理。八十六學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編, 33-50。國立嘉義師範學院主編。
- 譚寧君 (1993)。兒童的幾何觀—從 van Hiele 幾何思考的發展模式談起。國民教育, 33(5/6), 12-17。
- Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. W. (1993). A Problem solving approach to mathematics for elementary school teachers (5th ed.). Menlo Park, CA: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.
- Bromley, K., Irwin-De Vitis, L., & Modlo, M. (1995). Graphic Organizers: Visual strategies for active learning. New York: Scholastic Professional Books.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), Learning and teaching geometry, k-12, (1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics(pp.1-16)). Reston, VA : NCTM.
- Fountas, I. C., & Pinnell, G. S. (2001). Guiding readers and writers grades 3-6: Teaching comprehension, genre, and content literacy. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among Adolescents. American: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Hoffer, A. (1983). van Hiele based research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematical concepts and processes (pp. 205-228). New York: Academic Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). The principles and standards for school mathematics (pp. 233). Reston, VA: NCTM.
- Presmeg, N. (1991). Applying van Hiele's theory in senior primary geometry: use of phases between the levels. Pythagoras, 26, 9-11.
- Van de Walle, J. A. (1997). Geometric Thinking and Geometric Concepts. Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally. New York: Longman.
- van Hiele, Pierre M. (1986). Structure and Insight: A theory of mathematics education. Orlando, Fla.: Academic Press.
- van Hiele, Pierre M. (1999, February). Developing Geometric Thinking through Activities that Begin with Play. Teaching Children Mathematics, 310-316.

投稿日期：民國 93 年 12 月 6 日

接受日期：民國 94 年 2 月 22 日

Creative Teaching “Catching the Quadrilaterals” – Reasoning on Inclusion Relation

Min-Hua Ho

Chia-Yi County Concordia Middle School

Abstract

The major focus of the teaching activity is, through the model of conducting games, to make the students in junior high school able to analyze the characteristics and quality of geometric shapes with the use of mathematical argument, reasoning and skills of communication, in order to develop the learning of the inclusion relation of quadrilaterals. The notion of the design is based on the five sequential phases of learning by van Hiele, which is also the criteria of conducting the teaching. The researcher finds that with the analysis of the process of activities, the conduction of the games assist junior one students in clearing the misunderstanding of the different definitions, characteristics and qualities of quadrilaterals. Furthermore, it actively constructs and recognizes the notions of “parallelograms include squares, rectangles and rhombuses”. In the end, the researcher proposes the adoptable organic solution to “rectangles include squares”, “rhombuses include squares” and “squares are the overlapping of rectangles and rhombuses” during the process of activities in the suggestion.

Key words : five sequential phases of learning by van Hiele

ven diagram

inclusion relation