一位七年級學生的比率構念－從解速率問題表現的觀點

葉建德*　劉祥通**
*國立嘉義高級工業職業學校
**國立嘉義大學　數學教育研究所

摘　要

本研究旨在探討一位七年級學生的比率構念。研究方法為個案研究，採用工作單為基準的訪談法蒐集資料，根據受試者在工作單上的解題與寫作表現，進一步訪談學生，以了解學生的解題想法。個案是一位七年級的男生，受訪時就讀於嘉義市某私立中學，在班上的數學成績約在前 1/3。工作單問題的設計分成五個部份，分別是單位比率、合成性、比率的可重複性、座標軸變換與座標軸單位變換，共有十個問題，因受限於篇幅，本文只呈現六組「問題、訪談原案與分析」。重要的研究發現如下：(1) 個案能透過計算單位比率以比較速率快慢問題。(2) 座標變換之後，不影響他對等速運動圖形的認知。(3) 個案能察覺座標單位變換影響等速圖形的陡度，並且略具速率為合成比率的概念。

關鍵字：比率、速率、工作單為基礎的訪談、個案研究

壹、緒論

分數（fractions）對於中學前的學生而言，是最複雜與最重要的數學概念，許多代數（algebra）學習困難的產生，可以追溯到早期分數概念理解得不夠完備，導致日後障礙接連發生（Behr, Lesh, Post, & Silver,1983）。因此，分數構念（constructs）能否徹底了解，與代數的學習有前後的關聯性，兩者的關係密不可分。既然分數如此重要，如何增進學生的分數構念，勢必成為國小階段的主要課題之一。一般來講，初學者對於分數的看法只停留在「分數是異於整數的一種數」，只具備少數的分數構念，難以形成心理的物件（mental object）。根據 Kerslake（1986a ; 1986b）的研究指出，分數之「部分-整體」子構念（subconstruct）的建立，對大多數的學生而言是比較簡單的，至於商、測度、比值、運算子與比率等子構念則比較困難。追究其原因，劉祥通（2004）認為可能是「部分-整體」子構念在直觀上比較容易認定，而其餘子構念則否。由此可見，學生普遍

嚴重缺乏分數構念，如果想要使學生建立與鞏固分數構念，將是一項非常嚴峻的考驗。

在比例問題的許多類型之中，比率是重要的指標問題之一，它是經由兩個不同測度空間（measure space）的兩數量所衍生的新單位；例如速率是一種比率，它是由距離（公里）除以時間（小時）而得到的數量，新的單位以（公里/小時）表示每小時走了多少公里。劉祥通（2004）的研究指出比率構念是分數中較上位的子構念，學生必須先鞏固低階構念，如整數除法和單位量/子分割，逐漸經由商、部分/整體、測度與比值等子構念的建立，才能對比率構念有完整的理解。因此，比率是比例的高階問題，其探究方式必須循序漸進，由簡單問題進入到複雜問題，以及從探索的過程當中，發現學生的迷思概念（misconceptions），並且尋求解決的因應之道。

比率既然在比例問題中有如此關鍵的地位，學生對於比率問題的解題表現，也會因爲比率性質的不同而有所差異；理解層次高的學生能深入探究，了解許多不同性質的比率問題，而理解層次低的學生只具備少數的比率構念，甚至對比率的性質存有迷思。例如「一部汽車 7 分鐘跑 15 公里，請問 1 分鐘跑多少公里？1 公里需要幾分鐘？」的問題，學生難以意會比率單位的對偶（dual）性質，往往忽略 15÷7 與 7÷15 兩者是互爲倒數，即此兩種對偶的單位有倒數（reciprocal）的性質（Lamon, 1999），以致於解「1 分鐘跑多少公里？」的問題後，回答「1 公里需要幾分鐘？」的問題又重新計算，殊不知此兩種數值是互爲倒數的。此外，在等速運動的圖形中，學生也不會利用單位比率的特性，在相同時間的條件下，以距離的大小比較兩部汽車速率的快慢。所以，學生解比率問題時，必須注意單一成分的多重性質，也要能夠類推與應用這些性質。

本研究目的是探討一位七年級學生的比率構念。基於構念是抽象的，不容易被觀察與測量，於是透過具體的速率問題，探討與檢驗其比率構念。研究者給個案學生翰翰解簡單的速率問題，發現翰翰大體上有正確的速率概念，爲了深入探討翰翰的比率構念，研究者設計了一系列的結構式問題所組成的工作單，請翰翰解題，寫下解題想法，並用訪談以確認他的解題想法。

爲了研究的準確性，避免產生混淆，本研究針對相關的重要名詞分別解釋如下：

一、比率：兩個不同度量單位相除所產生的新量數，例如距離除以時間爲速率，質量除以體積爲密度，兩者都是比率。圓周率雖然有「率」的字眼，但圓周率是圓周長除以直徑，圓周長與直徑皆爲長度單位，因此圓周率被界定爲比值，而不是比率。

二、構念：是理論性的概念，用來代表持續性的心理特質或屬性，是無法觸摸的，也無法直接觀察，但是在心理學

上，它往往被用來當作可被觀察變數的指標（McMillan & Schumacher, 1989）。例如爲了描述一位個案的分數構念，可用「部分與整體」、「商」、「比值」、「運算子」與「比率」等當作指標作爲測量分數構念的一種方式。

貳、文獻探討

爲符合研究目的，文獻探討分爲比率的意義、比率的性質與速率的意義，分別敘述如下：

一、比率的意義

比（ratio）是數量 A 與數量 B 之間的一種對等關係，以數學符號 A：B 表示，A 稱爲前項，B 稱爲後項。從比較的觀點而言，比可以表示兩數量之間的一種關係，也可以做爲傳達相對大小的抽象意義的一種比較性指標（Lamon, 1995）。在 A：B 的關係式中，以前項 A 除以後項 B 所得到的商，稱爲比值，通常以分數的形式來表示。如果 A 與 B 爲相同測度空間的兩數量，也就是說 A 與 B 同樣是時間數量，或者同樣是長度數量等等，此時比值是沒有單位的數值。例如，7 公分：3 公分，其比值是 $\frac{7}{3}$。如果 A 與 B 爲不同測度空間的兩數量，A 除以 B 所得到的新數量則稱爲比率（Vergnaud, 1983）。例如，一部汽車 5 小時走了 550 公里，那麼這部汽車的速率是每小時 110 公里，以 110 公里/小時表示。因此，比值是牽涉兩個相同測度數量的對等關係，而比率是涉及兩個不同測度數量的對等關係（劉祥通，2004；Lamon, 1999）。由此可見，比率具有單位，而且是一種內涵量（intensive quantities），Behr, Lesh, Post 與 Silver（1983）進一步指出，比率是一種構念，也是分數當中的一種子構念。

二、比率的性質

比率構念有以下四種性質：

（一）單位性

比率是兩種不同的量數所產生的新量數，具有新的單位名稱，與構成比率的兩量數的單位不同；例如速率的單位以「每」小時多少公里、「每」分鐘多少公尺來表示，也就是用公里/小時或公尺/分鐘表示，稱爲單位比率（unit rate）。Lamon（1999）指出單位比率可以縮小爲一數量與另一數量一個單位之間的關係，不一定是數量與一個單位時間的比值。利用單價法解比例問題，就是應用單位比率的觀念進行解題。

（二）合成性

由兩個數量經過相除而成的新數量，並且以單一的詞彙命名，稱爲合成比率（chunked rate）。例如速率是由距離與時間相除所產生的數量，而密度是由質量與體積相除所產生的數量，兩者皆以新名詞稱呼，不再借用舊數量的名稱。雖然如此，許多學生仍舊無法體現合成比率是一項單一實體，也就是不能視比率爲一個不可切割的量數（measure），而且也不了解其實它是兩個數量的比較（Lamon, 1999）。

（三）對偶性

將比率的分子與分母的數量互換，即取其倒數，稱爲對偶比率（dual rate）。不同的問題情境，需要的對偶比率也不一樣。例如一塊 8 立方公分的金屬重 16 公克，則單位比率爲 16 公克/8 立方公分，即 1 立方公分的金屬重 2 公克。此單位比率的倒數爲 8 立方公分/16 公克，也就是 1 公克的金屬其體積爲 $\frac{1}{2}$ 立方公分。對學生來說，這兩種單位比率適合在他們容易解釋的問題情境中，問「同樣的金屬 12 立方公分重多少公克？」，使用第一種單位比率較容易解題；如果問「同樣的金屬 24 公克體積爲多少立方公分？」，則使用第二種單位比率較容易解題。

（四）可重複性

比率也是一種單位，根據形成單位的要素有可重複性（repeatability）、迭代（iteration）等特性，例如 10 這個集聚單位（composite unit），當學童可以用 10 單位重覆點數，也可以製作 10 這個單位以表徵某數的多寡，此時 10 這個單位就是可複製的單位（Steffe & Cobb, 1988）。由於比率也是一種單位，它也有可重複性。例如，等速率行駛的汽車，在 240 公里的路程中，花費 3 小時，所以 $\frac{240}{3}$（公里/小時）$=\frac{80}{1}$（公里/小時），學童若能將此每小時 80 公里的單位，不斷的複製，它就可以獲得 10 小時可走 800 公里，此稱爲比率單位的可重複性。

爲了考驗學生是否了解比率具有以上四種特性，研究者參考 Lobato 和 Thanheiser（2002）的研究設計，使用二維直角座標系以探討比率問題的性質。二維直角座標系是以兩條互相垂直的直線表示兩數量的關係，可以顯示一數量與另一數量所對應的座標，而比率是兩個不同測度空間所構成的數量；因此，使用二維直角座標系探討比率問題是一項有效的工具。在直角座標系中，縱軸與橫軸可以賦予不同的量數（measure）或稱測度，例如，除了以縱軸表示距離、橫軸表示時間之外，而且也能以縱軸表示時間、橫軸表示距離，此即座標軸變換。在相同的座標系當中，相同座標軸上的單位長必須一致，但是不同座標軸上的單位長卻可以不同，也就是不同座標軸的單位長具有相異性，稱爲座標軸單位變換。例如，在兩個不同的座標系當中，橫軸的單位長皆相等，一座標系縱軸的單位長爲橫軸單位長的 2 倍，而另一座標系縱軸的單位長爲橫軸單位長的一半，通常教科書是以直線的陡度(steepness)描述斜率(slope)的大小，但是在這兩個不同的座標系中，兩條斜率相等的直線其陡度並不相等，學生在沒有注意單位長的不同與未計算垂直位移除以水平位移的情形下，往往出現「陡度即爲斜率」的迷思（Lobato & Thanheiser, 2002）。

三、速率的意義

朱建正（1997）認爲內涵量和外延量有很大的不同，外延量是可以累積的，例如時間、距離、面積與重量，而內涵量指的是兩個數量相除所得的第三個數量，是

無法累積或加成的。

就物理學的定義而言，速度具有大小與方向，是一種向量（vector），如果不管速度的方向，純粹以大小的面向來看，就稱為速率，它是一種純量（scalar）。速率只講求物體移動的快慢，不論其移動的方向，而速度必須同時顧慮物體移動的快慢與方向。例如有兩部汽車，在相同的時間內行駛一樣的距離，但是一部汽車往東行，另一部汽車向西行，因為移動的方向不同，只能說速率相等，而不能說速度相等。所以，速度與速率所表示的意義是不一樣的。在國民小學階段的學生還無法辨認速度與速率的差異，所以教學時不必特意強調，以免學生產生混淆（台灣省國民學校教師研習會，1997）。

總位移與使用時間的比值，稱為平均速率。由於平均速率是每單位時間移動多少距離，所以平均速率可以簡稱為速率。保持固定的比率，稱為常數比率（constant rate）。等速率運動的物體，其移動的距離與時間的比值皆維持相等，即屬於一種常數比率。會改變的比率，稱為變化比率（varying rate）。變速率運動的物體，其移動的距離與時間的比值並不相同，是一種變化比率。Lamon（1995）指出，兩個相等比值所構成的比例關係，具有「共變性（covariance）」與「不變性（invariance）」。例如一部等速行駛的汽車，其速率為 100 公里/小時，在 150 公里的路程中需要 1.5 小時，則 300 公里的路程需要多少小時？由於是等速行駛，所以距離與時間的比是 150：1.5 和 300：3，比值皆為 100，是「不變的」；當距離由 150 公里變成 300 公里時，為維持不變的比例關係，原來的 1.5 小時就變成 3 小時，所以 3 是隨著 300「共變的」，而保持比值是 100 的等價關係。

參、研究方法

本研究採用個案研究，研究者事先根據研究目的設計結構式的工作單（task）考驗個案學生，待工作單完成之後，視學生的解題表現作為訪談的基本材料。此種方法的特色為工作單的問題是結構化的，訪談的內容是非結構化的，也就是以工作單為基準的訪談法（task-based interview, Goldlin, 1998;2000）蒐集資料。

一、研究對象

本研究的受訪者翰翰（化名），居住於嘉義市，父母親的學歷皆為大學畢業，父親在國營事業單位擔任工程師，母親則任職於金融機構，屬於高社經地位的家庭。受訪時是嘉義市一所私立中學七年級的學生，數學成績大約是班上的前 $\frac{1}{3}$。國小階段使用 82 年版的教材，在第十一冊「速度的意義」單元中，學過速率的意義與比較速率快慢的條件；在第十二冊「秒速、分速和時速」的單元中，學過秒速、分速、時速的意義，並了解速率、時間和距離三者的關係，已經具備速率的基本概念。在研究者做先導研究（pilot study）時，翰翰能了解時間、距離與速率三者之間的正反比關係，沒有「除法一定是大數除以小數」

的迷思，因此研究者認爲他是適當的研究對象，而挑選此一個案。翰翰在國小時未接受安親班的課後輔導，就讀國中之後，也沒有參加課外的補習。

二、研究工具

本研究的主要工具爲研究者本身與工作單的訪談問題，分別敘述如下：

（一）研究者

研究者畢業於東吳大學數學系，自民國七十九年起，開始擔任私立中學國中與高中數學科教師，民國八十七年轉任國立嘉義高工至今，已有十五年的教學經驗。對於教育工作有高度的熱忱，爲了充實數學教育的理論與實務經驗，於民國九十一年考取國立嘉義大學數學教育研究所，在進修期間，曾研讀教育研究法和質性研究等課程，深知研究方法的重要性。在任教國中數學課程時，發現課本的速率問題是零星出現在各個單元之中，學生難以統整速率概念，而少有完備的解題策略，因此，研究者認爲探究學生的速率概念有其必要性。

本研究屬於質性研究，研究者所扮演的角色，就是 Lincoln 與 Guba(1985)所說的：「研究者即研究工具」。研究者編製結構式的工作單給翰翰解題，期待翰翰以自發性的解法解題，若個案學生無自發性解法或無法回答時，研究者適時的要求，期使翰翰能用畫圖或其他方法表徵解題想法，避免他套用公式，造成無法從他的解題表現判斷他是否擁有構念。

（二）工作單

本研究的主旨在探討一位七年級學生的比率構念，爲了達成上述之目標，研究者將速率問題的設計分爲五個部份：單位比率、合成性、比率的可重複性、座標軸變換與座標軸單位變換，而擬定一份結構式的工作單，此份工作單有十個關於速率的問題（見附錄），其設計方式涵蓋各個向度，用來考驗翰翰的比率構念。

三、資料的蒐集、處理與分析

本研究的資料來源，主要是翰翰在工作單上的作答表現和研究者訪談翰翰的錄音內容。研究者將訪談的內容轉錄（transcribe）爲逐字稿，然後對逐字稿所呈現的資料作原案（protocol）分析，最後以標題（label）描述翰翰的解題表現作爲分析的結論。在研究的過程中，若未先分析與組織資料，而繼續訪談與蒐集資料，可能迷失了一些深入訪談的機會，因此研究者採取訪談後即刻分析與解釋資料的做法。

本研究採用甯自強（1998）所提出的重複的情節（episodes）以增強信度。透過同樣結構的相似問題考驗翰翰，以確認個案學生是否真的理解比率構念的相關性質。例如，問「一隻等速前進的螞蟻，花 6 分鐘走 17 公尺，那麼這隻螞蟻走 1 公尺需要多少分鐘？」的單位比率問題，爲了檢驗學生的觀念是否穩固，於是再追問「一部汽車以相同的速率前進，已知 4 小時跑 384 公里，那麼跑 1 公里需要多少小時？」

以確認他是否會解單位比率的問題。重複的情節可以用來增加資料的可靠性，也是質性資料分析中非常重要的一環，其目的在於運用對照的方式，經由工作單上的表現與訪談中，歸納出翰翰解速率問題的策略，其前後是否具有相似性與差異性。

爲了增加效度，本研究採用 Denzin（1978）的三角校正（triangulation），他指出三角校正是要作爲檢核資料來源和資料蒐集策略之用。本研究的資料來源爲工作單問題的作答與訪談，爲了確信翰翰在工作單上寫作的有效性，透過交替辨認與前後對照，因此比較符合資料的三角校正。例如，在「距離－時間」的關係圖上比較速率，習慣上是在代表時間的橫軸上取相同的時間點，比較在縱軸上所對應的距離長短，而判斷速率的快慢。研究者將座標軸轉換，以橫軸表示距離、縱軸表示時間，用以考驗學生是否有效應用比率的求法以解速率問題。

肆、結果與討論

工作單的問題共有 10 個問題，研究者選擇翰翰在解題表現上比較顯著的六個案例，將他的表現與研究者的分析呈列如下：

一、能求出單位比率並且陳述其意義

原案一（93.10.28 訪談）

工作單問題爲「已知一隻甲螞蟻以同樣的速率行走，花 4 分鐘走 9 公尺」，研究者詢問翰翰「甲螞蟻走 1 公尺需要多少分鐘？1 分鐘可以走多少公尺？」診斷個案如何將速率問題轉化爲單位比率。

101 師：為什麼你用 $4÷9=\frac{4}{9}$ 表示？

102 生：比較合理。

……

109 師：這裡是 9 公尺，這裡是 1 公尺，等於從 9 公尺變為 1 公尺……。

110 生：就是 4 分鐘走 9 公尺，然後 1 公尺的話就是(9 公尺的)$\frac{1}{9}$，所以用 4÷9，表示這隻螞蟻走 1 公尺需要 $\frac{4}{9}$ 分鐘。也就是 4 分鐘乘以 $\frac{1}{9}$。

111 師：為什麼用 9÷4？

112 生：也是一樣啊！它說 4 分鐘走 9 公尺，那…1 分鐘就是 $\frac{1}{4}$，所以 9 公尺乘以 $\frac{1}{4}$ 就是 1 分鐘可以走多少公尺。

113 師：把 4 分鐘變成 1 分鐘，就是…。

114 生：$\frac{1}{4}$。就是除以 4。

115 師：所以…。

116 生：9 公尺也要除以 4。

117 師：再回來看第一小題，「走 1 公尺需要多少分鐘」？所以就是將 9 公尺變成 1 公尺，對不對？

118 生：對！9 公尺變成 1 公尺就是 9÷9，4 也一樣除以 9。

分析一

速率問題有兩種單位比率，即「走 1 公尺需要多少分鐘？」與「1 分鐘可以走多少公尺？」。研究者先訪談前者的用意，隱含著另一項企圖-考驗翰翰是否依然存在「除法一定是大數除以小數」的迷思概念，結果顯示（行號 101）翰翰已經擺脫

這樣的想法，只是一時無法解釋清楚爲什麼用「4÷9」(行號 102)。而翰翰能說出「1公尺的話就是（9 公尺的）$\frac{1}{9}$，所以用 4÷9」(行號 110)，可見他對比率中「共變」性質的掌握，也就是利用等分除，將 9 公尺的距離等分爲 9 份，每份的長度爲 1 公尺，並且成功地類推，將 4 分鐘的時間也等分爲 9 份，每份的時間爲 $\frac{4}{9}$ 分鐘（行號 118)。

二、能意識到將距離與時間同乘整數倍速率依然保持不變

原案二（93.10.28 訪談）

接下來，研究者請翰翰舉出一例，並說明這隻螞蟻走多少公尺需要多少分鐘？用以診斷翰翰能否以乘法或除法創造新的速率情境。

201 師：如何解「這隻螞蟻走了 8 公尺共需要 $\frac{32}{9}$ 分鐘」(翰翰在工作單上的解法)？

202 生：(在工作單上寫「走 1 公尺要花 $\frac{4}{9}$ 分鐘的話，那走 8 公尺就是 1 公尺的 8 倍，所以要花 $\frac{4}{9}$ 分鐘的 8 倍時間」)。

203 師：在什麼樣的條件之下，你確定可以這樣做？

204 生：1 公尺要花 $\frac{4}{9}$ 分鐘，8 公尺就是 1 公尺的 8 倍，如果速度也是一樣的話，…然後時間也是它的 8 倍。

205 師：所以…。

206 生：是速度一樣的情況之下。

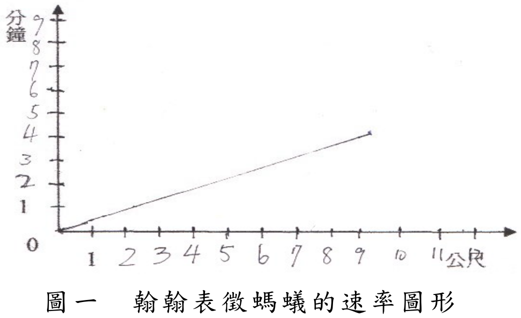
分析二

翰翰的初始解法是利用單位比率加以解題，亦即將 1 公尺放大 8 倍，連帶 $\frac{4}{9}$ 分鐘也放大相同的倍數，可見他能解釋新的等速率情境（行號 202)。除了利用整數倍放大單位比率的規則外，也可以直接將題目中的數字任意縮小，只要距離與時間維持相同的比例。換句話說，就是將題目中的數字同時乘或除以一個不爲零的數，也能表現出另外一種等速率情境。由行號 204 與 206 研判，翰翰理解只有在等速的情況下，才能進行距離與時間的等比值換算，亦即「1 公尺要花 $\frac{4}{9}$ 分鐘，8 公尺就是 1 公尺的 8 倍，…時間也是它的 8 倍」(行號 204)。

三、在等速的問題情境下，以直線表示「距離—時間」的關係圖

原案三（93.10.28 訪談）

研究者以橫軸表示公尺，縱軸表示分鐘，請翰翰畫出這隻螞蟻的速率圖形（見圖一)，以診斷個案是否掌握等速運動的性質與圖形的關係。



圖一　翰翰表徵螞蟻的速率圖形

301 師：為什麼甲螞蟻的速率圖形畫出來是一條直線？

302 生：如果速度不變的話。
303 師：需要幾個點才可以把這條直線畫出來？
304 生：通常都用一個點。
305 師：一個點？
306 生：就是從這個軸心(原點)直接再連接一個點。
307 師：它(原點)是連接那一個點？
308 生：幾分鐘走幾公尺的那一點。
309 師：那到底是根據那一個點？
310 生：這個點(指著橫軸的 9 與縱軸的 4 交會的點)。
311 師：這個點是多少？
312 生：分鐘是 4 分鐘，公尺是 9 公尺然後它們交接的點。
313 師：甲螞蟻 4 分鐘走 9 公尺，如果甲螞蟻從開始到 1 分鐘，和從 1 分鐘到 2 分鐘所走的距離會不會一樣？
314 生：一樣。
315 師：為什麼？
316 生：如果速度不變的話。
317 師：如果是第 2 分鐘到 3 分鐘，和第 1 分鐘到第 2 分鐘所走的距離會不會一樣？
318 生：也會一樣。
319 師：為什麼？
320 生：時間都是 1 分鐘。

分析三

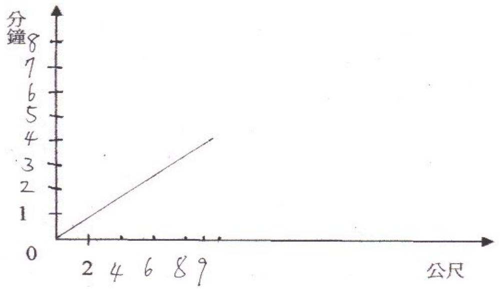
翰翰在工作單上以通過原點與（9,4）兩點的直線表示甲螞蟻的速率圖形，他所持的理由是甲螞蟻以等速率行走(行號 302)，所以圖形是一條直線。起初，研究者詢問翰翰「需要幾個點才可以把這條直線畫出來？」(行號 303)，考驗他是否具備「通過相異兩點決定一條直線」的幾何觀念，結果翰翰竟然回答「通常都用一個點」(行號 304)，這樣的答案頗令人意外。爲了確認如此的回應是否構成迷思概念，研究者進一步追問「那到底是根據那一個點？」，繼續比對他的想法與說明，經過行號 306 的解釋之後，原來翰翰是將原點(0, 0) 隱藏在心中，在找出另一點（9, 4）之後，以連接這兩點的直線表示等速運動的圖形；而爲什麼會有這樣的想法？可能是從其他的圖表上獲得的經驗，若說他理解「連接兩點的直線即構成等速運動的圖形」，在證據上仍不夠周全。

行號 313 與 317 的訪談目的，是要考驗翰翰是否具備「在速率不變的情況下，相同的時間經過的距離也會一樣」的觀念，而結果顯示經過兩次的檢核下，翰翰確實是有這樣的概念。

四、能觀察出縮小座標軸的單位長對等速率圖形的影響

原案四（93.10.28 訪談）

延續原案三，研究者將橫軸的 1 單位（1 公尺）縮小 2 倍，縱軸的 1 單位保持不變，請翰翰畫出這隻螞蟻的速率圖形(見圖二)，並詢問他圖形有何改變？目的是診斷個案如何探索座標軸單位變換與圖形的關係，與是否能陳述速率的單位意義。



圖二　翰翰表徵橫軸單位（公尺）縮小之速率圖

401 師：(直線)「比較高」(工作單上的說明)是什麼意思？
402 生：就是往上偏。
403 師：往上偏(複誦一次)？
404 生：就是直線會比較朝上。
405 師：螞蟻的速率在第(3)與第(4)小題的問題裏，有沒有一樣？
406 生：一樣。
407 師：為什麼？說說看。
408 生：都是用 9÷4。
……
411 師：何謂速率？
412 生：…一定的時間所行…行進的長度(有些猶豫)。
413 師：速率的單位是什麼？
414 生：….
415 師：不知道？
416 生：沒學過。
417 師：就這一題而言，距離的單位是什麼？
418 生：公尺。
419 師：時間的單位是什麼？
420 生：分鐘。
421 師：你再講一遍什麼是速率。
422 生：一個時間行經的長度。
423 師：就這一題來講，這隻螞蟻的速率是多少？4 分鐘走 9 公尺，牠的速率是多少？
424 生：$\frac{4}{9}$。
425 師：走 1 公尺需要多少時間?
426 生：$\frac{4}{9}$分鐘。

分析四

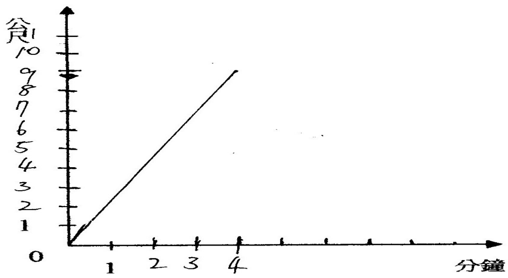
翰翰在工作單上敘述「圖形中的線會較短但較高」，由此看來，他已觀察到縮小橫軸單位長使得圖形變短，而翰翰所謂的「較高」，在訪談中已說出「往上偏」（行號 402），且又說出「比較朝上」（行號 404），可見他能夠體會圖形的陡度已經變大，因爲橫軸就是代表距離，由 9 公尺的「距離」變成$\frac{9}{2}$公尺的「距離」，理所當然是變短了。在橫軸縮小單位長、縱軸沒有改變單位長的情形下，雖然速率圖形變得更加陡峭，但是速率並未改變，翰翰以「比較高」、「往上偏」與「比較朝上」等詞彙描述圖形的變化（行號 401、402 與 404），取代「比較陡」與「比較靠近縱軸」等字眼。翰翰可以回答 1 分鐘走$\frac{4}{9}$公尺（行號 424），又可以回答走 1 公尺需要$\frac{4}{9}$分鐘（行號 426），可見他已能說出 9÷4 與 4÷9 所代表的「單位比率」意義。

五、理解座標軸變換之後速率圖形並未改變與座標軸的相關位置

原案五（93.10.28 訪談）

研究者將座標軸變換，以橫軸表示分

鐘，縱軸表示公尺，請翰翰畫出這隻螞蟻的速率圖形（見圖三），用來診斷個案是否掌握座標軸的變換與圖形的關係。



圖三：翰翰表徵座標軸變換之速率圖

501 師：第(5)小題與第(3)小題比較的話，你覺得圖形有什麼改變？

502 生：顛倒過來。

503 師：是什麼顛倒過來？

504 生：…就是線比較靠近縱軸。

……

507 師：現在是什麼改變？

508 生：縱軸和橫軸。縱軸改成距離，就是公尺。橫軸改成時間，就是分鐘。

509 師：第(5)小題與第(3)小題的圖形有什麼差別？

510 生：沒有。

511 師：第(3)小題的圖形比較靠近縱軸，還是比較靠近橫軸？

512 生：橫軸。

513 師：第(5)小題呢？

514 生：縱軸。

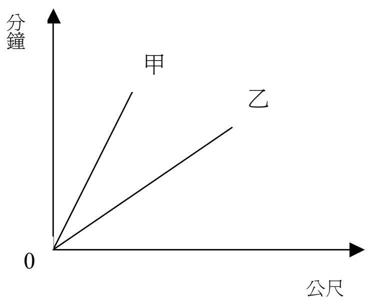
分析五

將縱軸與橫軸互換，速率圖形也相對地隨著改變，也就是原來比較接近橫軸的圖形，在座標軸對調之後，變成比較接近縱軸。由行號 502 與行號 504 來看，翰翰以「顛倒過來」描述交換座標軸後，速率圖形的改變情形，在研究者的追問下，才進一步解釋「是線比較靠近縱軸」的意思，只是沒有深入地仔細說明清楚而已。但是，研究者再回到原問題時（行號 509），翰翰的回應竟然出現前後不一致的情況（行號 510），於是在研究者的帶領下，翰翰總算精確地回答研究者的問題（行號 512、514）。

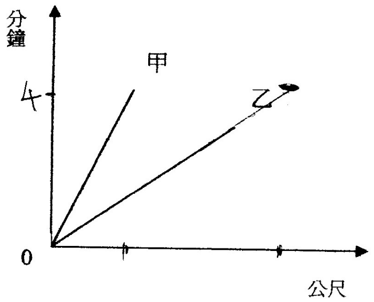
六、在兩軸沒有單位長的情境下，能夠判斷速率快的圖形比較靠近距離的軸線

原案六（93.10.28 訪談）

研究者將座標軸的單位長刪除，並詢問翰翰甲、乙何者的速率較快（如圖四）？爲什麼？主要診斷個案在相同時間的情況下，如何由距離的大小斷定速率的快慢。



圖四　工作單上的圖形



圖五　翰翰比較甲、乙速率圖

603 師：你說「乙時間比較少，距離又比較長，所以是乙的速率較快」(工作單上的理由)。可以再解釋清楚一點嗎？

604 生：就是把時間化成同樣的時間，就可以比它們的距離。

605 師：除了這樣的理由以外，你還可以用什麼方式判斷何者的速率較快？

606 生：看那一個比較靠近距離的橫軸。

607 師：好，如果我們用同樣的時間來比較的話，怎麼做？

608 生：把線延長或是塗掉，塗掉到同一個…。

609 師：你畫給老師看。

610 生：把(乙)線延長跟另外一條(甲)一樣，然後看那一個比較靠近…(學生將乙線延長到和甲線垂直高度相同的點)。

611 師：乙最後面這個點(端點)和甲最後面這個點(端點)什麼一樣？

612 生：時間一樣。

613 師：那一個距離比較長？

614 生：靠近距離的橫軸的線。

615 師：假設甲、乙兩端點所對應的時間是 4 分鐘，那麼它們所對應的距離在那裡？

616 生：(學生將對應的距離正確地標示出來)。

617 師：所以那一個距離比較大？

618 生：乙。

分析六

翰翰的初始解法認為：乙的端點比甲的端點低，而且靠近橫軸，意謂乙的「時間短、距離長」，所以乙的速率較快。這樣的理由與說明其實是正確的，但是，原本工作單上的用意是期望翰翰能在相同時間的情境，按照距離的大小來比較速率的快慢，而不是依圖形的長短做為判斷的準則。假如乙的速率圖形較長，那麼翰翰的觀點可能會受到視覺的干擾，而影響原來的認知。

在沒有單位長以及已知的數量可供利用，翰翰能夠使用單位比率的方法成功解題（行號 604），也會利用與代表距離的軸線之遠近加以判斷（行號 606）。最後，研究者為了確認翰翰如何在相同時間下，比較甲、乙速率的大小，他將乙圖形延長到和甲圖形的端點之水平高度相同的位置（行號 610），再比較距離橫軸的遠近，即可看出何者速率較快（行號 614）。

伍、結論與建議

對照研究目的與問題，研究者將研究中獲得的相關發現做為「結論」，以訪談翰翰的提問過程所獲得的啓示做為「建議」，

分別敘述如下：

一、結論

翰翰對於比率問題的解題表現，依據研究結果與分析，研究者做成以下的三項結論：

（一）透過計算單位比率的大小以比較速率快慢問題

由原案一能夠斷定：翰翰在時間與距離已知的情境下，能將兩者分別相除，也就是利用時間除以距離，和距離除以時間，而求出單位比率，即 1 公尺需 $\frac{4}{9}$ 分鐘與 1 分鐘走 $\frac{4}{9}$ 公尺。研究者在原案二之中，進一步追問翰翰能否在不更動速率的條件下，自行創造新的距離與時間情境。假如具備此項能力的話，他是用那一種解題策略？反之，如果無法達成的話，其原因何在？結果顯示翰翰以單位比率為基準，再將它放大整數倍數，而能夠完成此一目標。

在原案六的訪談中，翰翰雖然說出「把時間化成同樣的時間，就可以比它們的距離」，而且正確地認定乙的速率較快，但他的自發性解法是將乙的速率圖形延長到和甲的速率圖形位於相同的垂直高度，自己歸納出「靠近距離橫軸的線」之速率較快。如此的講法似乎前後矛盾，不合常理，但是透過研究者的引導下，找出相同時間所對應的距離，精準地判斷乙的距離較大，所以乙的速率較快。

（二）能在座標軸變換的情境下，明瞭等速運動的圖形是通過原點的直線

在原案三之中，翰翰將通過原點與代表 4 分鐘走 9 公尺的點之直線，表示甲螞蟻的速率圖形，而不是以一點或是可數的點來表示，顯然可以看出他具有速率是一種連續量的觀念。由於時間是持續不斷在進行，一秒緊接著一秒，一分又一分，不會有斷斷續續的情況出現，因此速率圖形是連續的，而不是離散的。在真實的生活中，不論走路、坐車或是搭飛機，經過一段的時間後，距離必定增加，更強化了這樣的概念。所以，速率是時間的導出量，時間是連續的，速率也隨之連續，在速率平均的條件下與直線建立對等的關係。

在原案五中，將兩座標軸的單位對調，其涵義是要與原案三前後對比，是否產生一致的狀況。由翰翰在工作單上所畫的圖形得知：交換座標軸的單位，不會改變他對於等速運動圖形的認知，即等速運動的圖形，不因互換時間與距離單位，而改變本質是直線的特性；但是直線的位置與陡度產生變化，原案三當中的直線陡度較小，而原案五當中的直線陡度較大，翰翰以「顛倒過來」描述其中的相對變化，也就是說直線原來比較靠近橫軸，經過縱軸與橫軸的單位變換之後，直線也隨之轉移，反而比較靠近縱軸。直線的陡度雖然變大，但是它與兩軸之間的相對位置卻是沒有改變。

（三）察覺座標軸單位變換影響等速圖形的陡度，並略具速率為合成比率的概念

在原案四之中，縮小橫軸的單位長，

而維持縱軸單位長的情境下，翰翰不僅能正確地以圖形表徵其中的變化，也能以口語表徵的方式表達陡度的差異。座標軸上單位長的放大與縮小，雖然不影響陡度的大小，但是改變了等速運動圖形的陡度。假設橫軸表示距離，縱軸表示時間，將 1 單位的距離縮小（放大），而維持時間的單位長,則等速運動圖形的陡度雖然增加(減少)，但是圖形的線段也相對地縮短；反之，將 1 單位的時間縮小(放大)，而維持距離的單位長，則等速運動圖形的陡度雖然減少（增加），但是圖形的線段也相對地縮短。

速率的單位是由距離與時間單位兩者合而為一，既不是距離單位，也不是時間單位，而是合成的單位，已經變為密不可分的整體(Lamon, 1999)。根據原案四，翰翰能區分距離與時間的單位，且理解速率的意義，對於速率是距離與時間的合成單位只有初步的了解，也就是略具速率是合成比率的概念。在認知方面，翰翰以距離單位做為速率單位的表徵，是有待矯正的迷思概念。

二、建議

研究者先藉由翰翰在工作單的解題表現，觀察出翰翰能正確地解那些速率問題，以及存在那些迷思概念，擬定訪談的問題之後，由提問過程所獲得的啟示，做為教學上的建議，分別敘述如下：

（一）以單價問題做為介紹比率構念的啟蒙例

Lamon(2002)認為在小學的數學教材中，由於比率是牽涉到兩個不同測度相除，所以是較難的構念。劉祥通（2004）也指出比率是各種構念中，對學生的學習是最困難的，在教學上更應當受到相當多的關注。速率是比率問題中的一種類型，通常學生一開始不太會解速率問題，肇因於比率構念的不完備（Loboto & Thanheiser, 2002）。想要將比率構念內嵌於學生的腦海中，形成心中的物件，需要時間的累積與考驗（Lamon, 1999）。但是，單價問題是總價除以數量，也是比率問題的一種，對於國中學生而言是蠻具體的經驗，以單價問題做為介紹速率的起始，對於學生是較容易理解的，因此以單價問題當作比率構念的啓蒙教材是可行的題材。

（二）以二維座標系的圖形輔助比率構念的教學

比率是探討兩個不同度量之間的變化關係，以速率為例，是距離與時間兩者關係的比較，單純的數字計算或是單位換算，難以全面綜觀其真實的原貌。在原案六當中，縱軸與橫軸的單位長未知，而且也沒有已知的距離與時間，只有兩條陡度不同的直線，翰翰除了以之前的解題經驗回答外，將直線延長到相同的垂直高度，以相同的時間比較距離，因而解題成功。在沒有具體的數字可以計算的二維座標系當中，促使翰翰往抽象的層次思考問題，賦予時間為某一個固定的常數，以距離的大小決定速率的快慢。教師在數學課室中，凡是牽涉到兩變量變化的教學，如商

品的價格與質量關係、水的體積與糖的質量之甜度關係等，以二維座標的圖形做為輔助說明的工具，對於學生的學習有加深印象的效果。透過圖形的繪製，Lamon(1999)認為有助於學生理解數量之間彼此的相關程度，並且更進一步洞察（insight）變化的本質。

（三）利用工作單和訪談培養學生文字與口語表徵的能力

本研究的工作單特點是研究者可以經由文字的表達，了解翰翰的解法，呈現他對於速率概念與比率構念的想法，然後根據工作單的表現，做進一步的訪談。起初，他面對「為什麼？」問題的回答比較不適應，而且也無法貼近問題的核心，經研究者的要求其深思之後，而有了許多的改善。在原案二之中，翰翰將等速率圖形以通過原點的直線表徵，假使未深入訪談，讓他有發表的機會，容易忽略既有的迷思概念，造成對表象的誤判。教師在評量方面的做法上，可參酌工作單設計的精神，培養學生文字敘述的表達能力，而在課室的教學上，以提問的方式，鼓勵學生多發表意見，增進口語組織的能力。

致謝

本研究承蒙國科會計畫（NSC93-2511-S-415-001）經費補助，特致謝忱。

參考書目

1.台灣省國民學校教師研習會（1997）。*國民小學數學實驗課程教師手冊第十一冊*。台北：研習會出版。

2.朱建正（1997）。*國小數學課程的數學理論基礎*。國科會民 85 成果報告（NSC-85-2519-S-002-001）。

3.甯自強（1998）。涂景翰的數概念。*科學教育學刊*，6(3)，255-269。

4.黃瑞琴（1991）。*質的研究教育方法*。台北：心理出版社。

5.劉祥通與周立勳（1999）：國小比例問題教學實踐課程之開發研究。*國立台中師範學院數理學報*，3(1)，3.1-3.25。

6.劉祥通（2004）。*分數與比例問題解題分析－從數學提問教學的觀點*。台北：師大書苑。

7.Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh., & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 91-126). New York: Academic Press, Inc.

8.Bowers, J., Nickerson, S., & Kenehan, G. (2002). Using Technology to Teach Concepts of Speeds. In B. Litwiller (Ed.), *Making Sense of Fractions, Ratio, and Proportions*(pp176-187). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

9.Dezin, N. K. (1978).*The research act* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.

10.Flick, U. (1998).*An introduction to qualitative research：Theory, method and* *applications. London*：Sage.

11. Goldin, G. A. (1998). Observing mathematical problem solving through tasked based interviews. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics eduation*. (pp.40-62). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
12. Goldin, G.A. (2000). A scientific perspective on structured, tasked-based interviews, in mathematics education research. In A.E. Kelly & R.A Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, (pp.517-545). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
13. Kerslake, D. (1986a). *Fractions: Children's Strategies and Errors*. Windsor, England：NFER-Nelson.
14. Kerslake, D. (1986b). *Children's perception of fractions*. The Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
15. Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle (Eds.). *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167-198). Albany, NY: State University of New York Press.
16. Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
17. Lamon, S. J. (2002). Part - whole comparisons with utilizing. In B. Litweller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, and ratio, and proportions*（pp.162-175）. Reston, VA: NCTM.
18. Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hill, CA: Sage.
19. Lo, J. J., & Watanabe, T. (1995). *A fifth grader's attempt to expand her ratio and proportion concepts*. Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
20. Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing Understanding of Ratio and Measure as a Foundation for Slope. In B. Litwiller (Ed.), *Making Sense of Fractions, Ratio, and Proportions* (pp.162-175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
21. **McMillan, J. H., & Schumacher, S.(1989). Research in Education : A Conceptual Introduction. Illinois: Scott, Foresman and Company**.

22. Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Heibert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.53-92). Reston, VA: NCTM.

23. Stake, R. E. (1994). *Case studies*. In N. K. Dezin., & Y. S. Lincoln(Eds.), Handbook of Qualitative Research. Thousand Oaks, CA: Sage.

24. Steffe. L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.

25. Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In, R. Lesh & M. Landau Eds.),*Acquisition of mathematics concepts and process* (pp.127-174).NY：Academic Press.

附錄

工作單問題

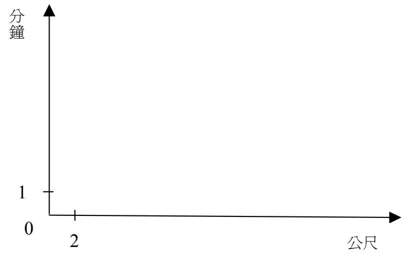
1.一隻甲螞蟻以同樣的速率花 4 分鐘走 9 公尺，請問：

（1）這隻螞蟻走 1 公尺需要多少分鐘？1 分鐘可以走多少公尺？解釋一下你的理由。

（2）請舉出一例說明：這隻螞蟻走多少公尺需要多少分鐘。多少分鐘可以走多少公尺。解釋一下你的理由。

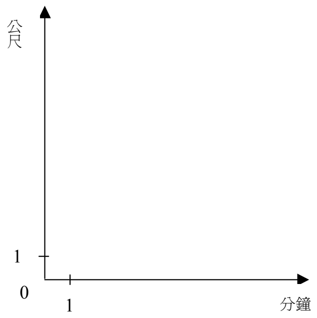
（3）以橫軸表示公尺，縱軸表示分鐘，請畫出這隻螞蟻的速率圖形。解釋一下你的理由。

（4）承（3），將橫軸的 1 單位（1 公尺）縮小 2 倍，縱軸的 1 單位保持不變，請畫出這隻螞蟻的「時間-距離」關係圖。與第（3）題比較，圖形有何改變？

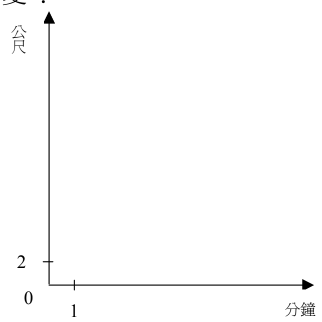


（5）承（3），將縱軸的 1 單位（1 分鐘）縮小 2 倍，橫軸的 1 單位保持不變，請畫出這隻螞蟻的「時間-距離」關係圖。與第（3）題比較，圖形有何改變？

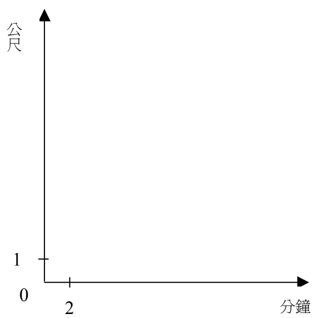
（6）以橫軸表示分鐘，縱軸表示公尺，請畫出這隻螞蟻的「時間-距離」關係圖。



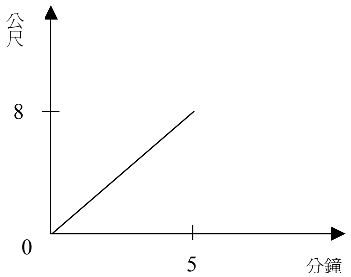
（7）承（6），將縱軸的 1 單位（1 公尺）縮小 2 倍，橫軸的 1 單位保持不變，請畫出這隻螞蟻的「時間-距離」關係圖。與第（6）題比較，圖形有何改變？



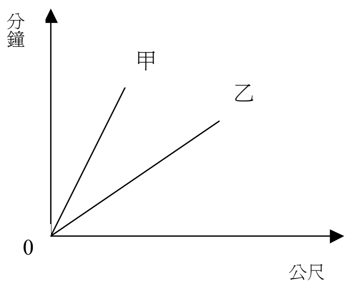
（8）承（6），將橫軸的 1 單位（1 公尺）放大 2 倍，縱軸的 1 單位保持不變，請畫出這隻螞蟻的「時間-距離」關係圖。與第（6）題比較，圖形有何改變？



2.下圖為一隻螞蟻的「時間-距離」關係圖，3 分鐘時螞蟻走多少公尺？走 5 公尺需要多少分鐘？



3.下列圖形中，何者的速率較快？為什麼？



投稿日期：民國 93 年 12 月 31 日
接受日期：民國 94 年 5 月 4 日

Seventh Grader's Rate Construct －From His Performance on Solving Speed Problems

Gen-der Yeh[1] Shiang-tung Liu[2]

[1]National Chiayi Industrial Vocational School
[2]The Graduate Institute of Math Education, National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study was to explore a seventh grader’s construct of rate. The study was a case study. The task-structured interview technique was conducted in the process of data collection. According to the interviewee’s performance of solving problems and writing on the tasks, the researcher made further interview to understand his thinking of solving problems. The subject in the present study was a seventh-grade student in a private school in Chiayi city, and his mathematics achievement was better than the other two third students in his class. The tasks consisted of five components -- unit rate, chunked rate, repeatability, coordinate axis transformation and transformation of coordinate axis unit, respectively. There were ten questions in the tasks, but only six groups of them were presented here, due to the limitation of capacity in this study. The major findings of this study were as follows: (1) He could solve speed problem by computing unit rate. (2)His cognition of constant motion graphic was not influenced by the transformation coordinate axis. (3)He could recognize the steepness of constant motion graphic was influenced by the coordinate axis unit transformation, and he almost could understand that speed was a conception of chunked rate.

keywords： rate, speed, structured-task, case study