生成函數在計數問題的應用

許介彥
大葉大學　電信工程學系

多項式的係數

如果我請您寫出以下兩個多項式 $p(x)=x+x^2+x^3+x^4$ 與 $q(x)=x+x^3+x^4$ 相乘的結果，您會怎麼做呢？由於 $p(x)$ 含有四項而 $q(x)$ 含有三項，因此如果先不將同次項合併，那麼 $p(x)q(x)$ 的展開式可以預測將含有 $4\times3=12$ 項，每一項都是由 $p(x)$ 的某一項與 $q(x)$ 的某一項相乘而得，也就是由下面兩個集合中各選出一個元素相乘而得：

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x^1 \\ x^3 \\ x^4 \end{Bmatrix}$$

經過同次項合併後則可得 $p(x)q(x)=x^2+x^3+2x^4+3x^5+2x^6+2x^7+x^8$。

如果我在一開始時只問您 $p(x)q(x)$ 的展開式中 x^5 的係數是多少，您需要大費周章地將 $p(x)q(x)$ 全部乘開嗎？當然不需要，此時您只須觀察在什麼情況下會產生 x^5 即可；不難看出總共有三種可能的情形：$p(x)$ 的 x 與 $q(x)$ 的 x^4 相乘、$p(x)$ 的 x^2 與 $q(x)$ 的 x^3 相乘、$p(x)$ 的 x^4 與 $q(x)$ 的 x 相乘等，因此 $p(x)q(x)$ 的展開式中 x^5 的係數一定是 3。

鉛塊與鐵塊

考慮一個相關的問題：如果您有四塊鉛塊，重量分別為 1、2、3、4 公斤，此外還有三塊鐵塊，重量分別為 1、3、4 公斤，請問：由鉛塊與鐵塊各一，希望能湊出總重 5 公斤的重量，總共有幾種湊法？您不難看出這個問題其實只是剛才的問題經過重新包裝而已；這兩個問題也都相當於希望求出下式

$$e_1+e_2=5$$

總共有多少組解，其中的 $e_1\in\{1,2,3,4\}$ 而且 $e_2\in\{1,3,4\}$，因此本題湊出 5 公斤重量的湊法總共有 3 種。

如果除了鉛塊和鐵塊之外您還有三塊鋁塊，重量分別為 2、3、7 公斤，那麼利用鉛塊、鐵塊、鋁塊各一，湊出總重 10 公斤的湊法又有幾種呢？循著上面的論述，我們知道湊法數一定就是 $(x+x^2+x^3+x^4)(x+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^7)$ 的展開式中 x^{10} 的係數；雖然由上式也許不易很快求得此係數，不過我們已經可以肯定「答案就在此式中」；從某個層面來說我們已經將這個問題解決了。

上式除了含有湊出 10 公斤問題的答案外，它其實也同時包含著湊出其他重量的問題的答案；例如上式的展開式中的 x^8 與 x^9 的係數就分別是湊出 8 公斤與 9 公斤的

湊法數等。如果湊出 n（n =0,1,2,...）公斤的湊法有 a_n 種，那麼上式的展開式中的 x^0, x^1, x^2,...的係數就分別等於 a_0, a_1, a_2,...，因此下式成立：

$$(x+x^2+x^3+x^4)(x+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^7)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在述語上，我們將

$(x+x^2+x^3+x^4)(x+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^7)$

稱作數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的「生成函數」（generating function）。一般而言，對任意一個數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$，我們定義此數列的生成函數為

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots.$$

上面的例子中，我們將計算個數的問題透過生成函數轉化成求多項式係數的問題，這種技巧對解決許多數學問題而言相當有用。以下我們再看幾個例子。

籃子與球

例題一：

將五顆一模一樣的球放入編號由 1 至 4 的四個籃子中，而且每個籃子最多只能放兩顆球，總共有幾種方法？

這個問題相當於求

$$e_1+e_2+e_3+e_4=5,\ \ 0 \le e_i \le 2$$

總共有多少組解，也相當於求由下面四個集合中各選出一個元素來相乘，所得為 x^5 的可能情形有多少種：

$$\begin{Bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{Bmatrix}$$

有了前面的觀念，我們知道此數一定就是 $(1+x+x^2)^4$ 的展開式中 x^5 的係數，因此答案已在此式中，只要設法求出其中 x^5 的係數即可。

一般而言，如果 a_n 代表將 n 顆球放入四個籃子而且每個籃子最多只能放兩顆球的方法數，那麼 $(1+x+x^2)^4$ 就是數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數，也就是說，a_n 一定就等於 $(1+x+x^2)^4$ 的展開式中 x^n 的係數（如何求出這些係數是另一回事；我們暫且先以能寫出生成函數為目標）。

請留意上面的生成函數其實足以應付當 $n=0,1,2,\ldots$ 時的情形，我們原來的問題只是其中的一種情形（即 $n=5$ 時），這是生成函數的一個普遍的性質，也就是儘管我們原本只希望求得某種情形時的答案，不過一旦使用生成函數求解，所得的結果會全面性地將所有同類問題的答案都包含於其中。

考慮以下問題：從四種不同顏色的球（假設每種顏色的球都有無窮多顆）中挑出五顆球，而且每種顏色最多只能挑兩顆，總共有多少種挑法？讀者不難看出這也只是剛才的問題經過重新包裝而已。

例題二：

假設 a_n 代表從三種不同顏色的球（假設每種顏色的球都有無窮多顆）中挑出 n 顆球而且每種顏色都須被挑出至少兩顆的挑法數，以下我們將求出數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數。

要求出 a_n 的值就相當於求出下式

$$e_1+e_2+e_3=n,\ \ e_i\ge 2$$

有多少組解；由於每種顏色的球有可能被選出 $2,3,4,\ldots$ 顆，因此求 a_n 的值就相當於求從下面三個集合中各選出一個元素來相乘，所得爲 x^n 的可能情形有多少種：

$$\begin{Bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ \vdots \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ \vdots \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

因此數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的生成函數爲

$$(x^2+x^3+x^4+\cdots)^3$$

而 a_n 就等於其展開式中的 x^n 的係數。

由於

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots,$$

$$\frac{x^2}{1-x}=x^2+x^3+x^4+\cdots,$$

我們又可將上面的生成函數簡潔地表爲

$$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^3.$$

例題三：

假設 a_n 代表將 n 顆一模一樣的球放入編號由 1 至 5 的五個籃子中的方法數，其中編號 1 和 2 的籃子中的球數都必須是偶數且不能多於八顆，而其他三個籃子中的球數都不能少於三顆且不能多於五顆；以下我們將求出數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的生成函數。

要求出 a_n 的值就相當於求出下式

$$e_1+e_2+e_3+e_4+e_5=n$$

有多少組解，其中

$$e_1,e_2\in\{0,2,4,6,8\},\ \ e_3,e_4,e_5\in\{3,4,5\}.$$

有了前面的經驗，我們不難立刻寫出數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的生成函數爲

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8)^2(x^3+x^4+x^5)^3$$

而 a_n 的值就等於上式的展開式中 x^n 的係數。

擲骰子問題

連續投擲一顆骰子，並且持續地將每次投擲所得的點數相加；假設 a_n 代表點數總和爲 n 的可能投擲順序有幾種。舉例來說，$a_4=8$，因爲點數總和爲 4 的可能投擲順序有以下八種：

$$1+1+1+1,\quad 1+1+2,\quad 1+2+1,$$
$$2+1+1,\quad 1+3,\quad 3+1,\quad 2+2,\quad 4.$$

以下我們將求出數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的生成函數。

如果原來的題目限制骰子只能投擲一次，那麼數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的生成函數顯然將是 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$，因爲投出由 1 至 6 各點數的方法分別都只有一種。如果原來的題目中限制骰子須投擲不多不少正好兩次呢？此時求 a_n 的值相當於求

$$e_1+e_2=n,\ \ 1\le e_i\le 6$$

的解有幾組，因此數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的生成函數將是 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$。依此類推，對任意非負整數 k，如果原來的題目中限制骰子必須投擲不多不少正好 k 次，數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的生成函數都將是 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^k$；然而我們原來的題目對投擲次數並沒有任何限制，因此點數總和爲 n 有可能是經過一次、兩次、

三次、……投擲後的結果，由此可知原來問題中的數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數應為

$$1+(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)+$$
$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2+$$
$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3+\cdots$$

也就是

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^k .$$

這又可簡潔地表為

$$\frac{1}{1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}.$$

附帶一提，對任意正整數 n，我們也可以利用遞迴關係來求得 a_n 的值。由於最後一次投擲的點數介於 1 到 6 之間（含 1 和 6），因此如果經過若干次投擲後的點數總和為 n，那麼在最後一次投擲前的點數總和必定是 $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $n-5$, $n-6$ 等六數之一，由此可得如下遞迴關係：

$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}+a_{n-5}+a_{n-6}$$

只要再配合適當的初始條件（例如 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的值），對任意正整數 n，我們都能推算出 a_n 的值。事實上，由數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的遞迴定義我們也能導出本題的生成函數（見參考資料[1]）。

展開式中的係數

雖然一個數列的生成函數隱含著數列的所有資訊，不過要由生成函數實際求出數列某特定項的值（或是求出數列的一般式）的工作卻未必容易；這類工作常可藉助部分分式（partial fractions）和一些與二項式定理（binomial theorem）有關的恆等式來達成。以下列出了幾個這方面較常用的恆等式：

（1）$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

（2）$(1-x^m)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{km}$

（3）$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$

（4）$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$

（5）$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$

（6）若 $h(x) = f(x)g(x)$ ，其中 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$

且 $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$ ，則

$$\begin{aligned} h(x) &= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+ \\ &\quad (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}\right)x^k \end{aligned}$$

接下來我們看幾個實際的例子。

例題一：

某數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數為 $(x^2+x^3+x^4+\cdots)^5$ ，以下我們將設法求出其展開式中 x^{16} 的係數（也就是 a_{16} 的值）。由於

$$\begin{aligned} (x^2+x^3+x^4+\cdots)^5 &= [x^2(1+x+x^2+\cdots)]^5 \\ &= x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^5 \\ &= \frac{x^{10}}{(1-x)^5} \end{aligned}$$

因此所求為 $(1-x)^{-5}$ 的展開式中 $x^{16-10} = x^6$

的係數，由(4)式可知其爲

$$\binom{5+6-1}{6}=\binom{10}{6}=210$$

而數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的一般式爲

$$a_n=\binom{5+(n-10)-1}{n-10}=\binom{n-6}{n-10}.$$

例題二：

某數列 $a_0,a_1,a_2,\ldots$ 的生成函數爲 $(1+x)^{19}(1+x+x^5)$，我們將設法求出其展開式中 x^{15} 的係數。

此生成函數可看成是兩個函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的乘積，其中

$$f(x)=(1+x)^{19}=\sum_{k=0}^{19}\binom{19}{k}x^k$$

而 $g(x)=1+x+x^5$。如果我們令 a_k 與 b_k 分別爲 $f(x)$ 與 $g(x)$ 中 x^k 的係數，那麼

$$a_k=\binom{19}{k} \quad \text{且} \quad b_0=b_1=b_5=1$$

而其他 b_k 的值爲 0。由(6)式可知我們所求的 x^{15} 的係數等於

$$a_0b_{15}+a_1b_{14}+a_2b_{13}+\cdots+a_{15}b_0$$

把等於 0 的項拿掉後剩下

$$a_{10}b_5+a_{14}b_1+a_{15}b_0$$

其值爲

$$\binom{19}{10}+\binom{19}{14}+\binom{19}{15}.$$

例題三：

求出 $(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots)^6$ 的展開式中 x^{25} 的係數。

由於

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots)^6$$
$$=\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^6=(1-x^{11})\left(\frac{1}{1-x}\right)^7$$

我們可令 $f(x)=(1-x^{11})$ 且 $g(x)=(1-x)^{-7}$；如果 a_k 與 b_k 分別是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 中 x^k 的係數，那麼 $a_0=1$，$a_{11}=-1$（其他 a_k 的值爲 0），且

$$b_k=\binom{7+k-1}{k}.$$

而 $f(x)g(x)$ 中 x^{25} 的係數等於

$$\sum_{i=0}^{25}a_ib_{25-i}=a_0b_{25}+a_{11}b_{14}$$

其值爲

$$\binom{31}{25}-\binom{20}{14}.$$

例題四：

求出 $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^7$ 的展開式中 x^{25} 的係數。

由於

$$(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^7$$
$$=[x^2(1+x+x^2+x^3+x^4)]^7$$
$$=x^{14}(1+x+x^2+x^3+x^4)^7$$

因此我們相當於希望求出 $x^{25-14}=x^{11}$ 在

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^7=\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^7$$
$$=(1-x^5)^7(1-x)^{-7}$$

的展開式中的係數。仿照前例，令 $f(x)=(1-x^5)^7$ 且 $g(x)=(1-x)^{-7}$；如果 a_k 與 b_k 分別是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 中 x^k 的係數，那麼

$$a_{5k}=\binom{7}{k}(-1)^k \quad \text{（其他 } a_k \text{ 的值爲 0）}$$

且

$$b_k = \binom{7+k-1}{k}$$

因此 $f(x)g(x)$ 的展開式中 x^{11} 的係數爲

$$\sum_{i=0}^{11} a_i b_{11-i} = a_0 b_{11} + a_5 b_6 + a_{10} b_1$$

其值爲

$$\binom{17}{11} - \binom{7}{1}\binom{12}{6} + \binom{7}{2}\binom{7}{1}.$$

接下來我們再看生成函數在計數問題的幾個應用。

多項式的個數

多項式 $p(x)$ 的每一項的係數都是小於 4 的非負整數（即屬於集合 $\{0,1,2,3\}$），而且 $p(2)=n$。對任意非負整數 n，這樣的多項式 $p(x)$ 總共有幾個？

如果

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

那麼由 $p(2)=n$ 可知

$$b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 + \cdots = n$$

因此我們相當於希望得知上式有幾組解，其中 $b_i \in \{0,1,2,3\}$。

假設 a_n 代表上式有多少組解，那麼數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數爲

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)$$
$$\cdot(1+x^4+x^8+x^{12})(1+x^8+x^{16}+x^{24})\cdots$$

也就是

$$\frac{1-x^4}{1-x}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{64}}{1-x^8}\cdots$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1+x)(1-x)^2}$$

利用部分分式可將上式寫爲

$$\frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+x^2+x^4+\cdots)+(1+2x+3x^2+\cdots)\right]$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)x^n$$

（對任意實數 x，$\lfloor x \rfloor$ 的值爲所有小於或等於 x 的整數中最大的整數。）

因此，對任意非負整數 n，符合要求的多項式總共有 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 個。

雖然利用與二項式定理有關的恆等式在許多時候可以求出生成函數中的係數，不過還是有些場合並不能（或者很難）單純地只靠這些恆等式將係數求出；以下我們介紹兩個利用其他方式求出係數的例子。

找零錢問題

某個國家發行的硬幣有 1 元、5 元、10 元、50 元等四種。如果某人擁有這四種硬幣各無窮多枚，他有幾種方法可湊出 60 元？

對任意非負整數 n，求湊出 n 元的方法數相當於求下式

$$e_1+e_2+e_3+e_4=n$$

有多少組解，其中

$$e_1\in\{0,1,2,3,\ldots\},\ e_2\in\{0,5,10,15,\ldots\},$$
$$e_3\in\{0,10,20,30,\ldots\},\ e_4\in\{0,50,100,\ldots\}.$$

如果湊出 n 元的方法有 D_n 種，那麼數列 $D_0,D_1,D_2,\ldots$ 的生成函數爲

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)$$
$$\cdot(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+\cdots)(1+x^{50}+x^{100}+\cdots)$$

這可簡潔地表爲

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{50})}.$$

上式的展開式中 x^{60} 的係數是多少呢？如果

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)}=\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^k$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})}=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{50})}=\sum_{k=0}^{\infty}D_kx^k$$

那麼由於

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k &=(1-x^5)\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^k\right)\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^{k+5}\end{aligned}$$

因此下面的遞迴關係成立：

$$A_k=B_k-B_{k-5}$$

也就是

$$B_k=A_k+B_{k-5}$$

依此類推，我們又可得

$$C_k=B_k+C_{k-10}$$
$$D_k=C_k+D_{k-50}$$

等。由於當 $k=0,1,2,\ldots$ 時，A_k 的值都是 1，而當 $k<0$ 時，$A_k=B_k=C_k=D_k=0$，有了這些初始條件，對任意非負整數 k，B_k,C_k,D_k 的值都可求出；例如

$$B_0=A_0+B_{-5}=1+0=1,$$
$$B_1=A_1+B_{-4}=1+0=1,$$
$$\vdots$$
$$B_5=A_5+B_0=1+1=2$$

等；當數列 $\langle B_k\rangle$ 已算出的項數多到一個地步即可開始算出 $C_0,C_1,C_2,\ldots$ 的值，而當數列 $\langle C_k\rangle$ 已算出的項數多到一個地步即可開始算出 $D_0,D_1,D_2,\ldots$ 的值。

我們的問題希望求得 D_{60} 的值。由於 $D_{60}=C_{60}+D_{10}$，因此在 $D_0,D_1,\ldots,D_{59}$ 諸項中我們其實只用得上 D_{10} 的值，其他項並不須求出；同理，由於 $C_{60}=B_{60}+C_{50}$，因此並不是 $C_0,C_1,\ldots,C_{59}$ 的每一項都用得到；透過這種事前的規劃，我們可以省下許多不必要的計算。下表顯示了算出 D_{60} 過程中所用到的各項的值：

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C_n	1		4		9		16		25		36		49
D_n			4										53

因此湊出 60 元的方法總共有 53 種。

整數的表示法

對任意非負整數 n，將 n 表爲二進位數的方法只有一種（見練習題 1），不過如果我們允許每個位數可以是 0 或 1 或 2，也就是將 n 表爲：

$$n=b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+b_3\cdot 2^3+\cdots$$

其中

$$0 \le b_i \le 2$$

那麼方法就可能有不止一種；例如當 $n=6$ 時總共有三種表示法：

$$\begin{aligned} 6 &= 0+1\cdot 2^1+1\cdot 2^2 \\ &= 2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^2 \\ &= 2+2\cdot 2^1+0\cdot 2^2 \end{aligned}$$

假設 a_n 代表將 n 用上述方式表示的方法數（因此 $a_6=3$）。請問：a_{2005} 的值是多少？求 a_n 的值相當於求下式

$$e_0+e_1+e_2+\cdots=n$$

有多少組解，其中

$$e_i \in \{0\cdot 2^i, 1\cdot 2^i, 2\cdot 2^i\}$$

因此，數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數為

$$(x^{0\cdot 2^0}+x^{1\cdot 2^0}+x^{2\cdot 2^0})(x^{0\cdot 2^1}+x^{1\cdot 2^1}+x^{2\cdot 2^1})$$
$$\cdot(x^{0\cdot 2^2}+x^{1\cdot 2^2}+x^{2\cdot 2^2})\cdots$$

這可簡潔地表為

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1+x^{2^i}+x^{2^{i+1}})$$

求出 x^{2005} 在上式中的係數的工作用紙筆做起來雖然相當費力，不過如果能藉助電腦程式的話其實已不難求出答案。另外，由於 $2^{11}=2048>2005$，因此我們可以忽略上式中 x 的指數大於 11 的項，我們只須求出

$$\prod_{i=0}^{11}(1+x^{2^i}+x^{2^{i+1}})$$

的展開式中 x^{2005} 的係數是多少即可。

如果只靠紙筆是否真的很難求出 a_{2005} 的值呢？不盡然；對任意正整數 n，考慮 $n-b_0$ 的值，其值顯然一定是偶數：

$$\begin{aligned} n-b_0 &= b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+b_3\cdot 2^3+\cdots \\ &= 2(b_1+b_2\cdot 2+b_3\cdot 2^2+\cdots) \\ &= 2M \end{aligned}$$

其中的 M 也被表成了符合題目所述的形式。

如果 n 為奇數（$n=2t+1$），b_0 一定是 1，此時 $n-1=2t=2M$，因此 $M=t$，而 n 的任何一種符合題目所述的表示方式都對應到 M（即 t）的一種表示方式；反過來說也成立，即 t 的任何一種表示方式都對應到 $2t+1$ 的一種表示方式（因為我們只要將 t 的任何一種表示方式的每個 2 的指數加 1 即得 $2t$，再加上 1 即得 $2t+1$）。因此 $2t+1$ 的表示方式與 t 的表示方式之間存有映射關係（bijection）；可知 $a_{2t+1}=a_t$，也就是說，當 n 為奇數時，$a_n=a_{(n-1)/2}$。

如果 n 為偶數（$n=2t$），n 的表示方式可分為兩大類，一類是 b_0 的值為 0，另一類是 b_0 的值為 2；只要我們能得知這兩大類各有多少種表示方式，此兩數的和就是將 n 表為題目所述形式的方法數。

如果 $b_0=0$，那麼 $M=t$；與前面的情形類似，此時 $2t$ 的表示方式與 t 的表示方式之間存有映射關係，因此 $2t$ 的表示方法數等於 t 的表示方法數。

如果 $b_0=2$，那麼 $M=t-1$，情況還是類似，此時 $2t$ 的表示方式與 $t-1$ 的表示方式之間存在著映射關係，因此 $2t$ 的表示方法數等於 $t-1$ 的表示方法數。

綜合以上分析，我們知道當 n 為奇數時，

$$a_n=a_{(n-1)/2},$$

而當 n 為偶數時，

$$a_n=a_{n/2}+a_{(n/2)-1}.$$

有了這些遞迴關係，我們已經不難求得 a_{2005} 的值（配合初始條件 $a_0=1$）：

$$\begin{aligned} a_{2005} &= a_{1002} = a_{501} + a_{500} \\ &= a_{250} + [a_{250} + a_{249}] = 2a_{250} + a_{249} \\ &= 2[a_{125} + a_{124}] + a_{124} = 2a_{125} + 3a_{124} \\ &= 2a_{62} + 3[a_{62} + a_{61}] = 5a_{62} + 3a_{61} \\ &= 5[a_{31} + a_{30}] + 3a_{30} = 5a_{31} + 8a_{30} \\ &= 5a_{15} + 8[a_{15} + a_{14}] = 13a_{15} + 8a_{14} \\ &= 13a_7 + 8[a_7 + a_6] = 21a_7 + 8a_6 \\ &= 21a_3 + 8[a_3 + a_2] = 29a_3 + 8a_2 \\ &= 29a_1 + 8[a_1 + a_0] = 37a_1 + 8a_0 \\ &= 37a_0 + 8a_0 = 45a_0 = 45 \end{aligned}$$

因此，2005 總共有 45 種表示方式。

結語

數學家 H. S. Wilf 曾經用一句話很生動地描述了生成函數的概念：“A generating function is a clothesline on which we hang up a sequence of numbers for display.” 他寫過一本關於生成函數的專書（參考資料[4]），有興趣的讀者可以參考。

生成函數用一個函數來表示一個數列的概念雖然奇怪，卻可以用來解決許多重要的計數問題，也常被用來求出遞迴關係的解，是組合數學中威力相當強大的一項工具。

練習題

以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

1.試由

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

說明每個非負整數表為二進位數的方法是唯一的。

2.假設 a_n 代表 $e_1+e_2+e_3+e_4=n$ 的正整數解有幾組，其中 e_2 與 e_4 須為奇數而且 e_4 不能大於3。試寫出數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數。

3.假設 a_n 代表將非負整數 n 表為相異正整數的和的方法數；例如 $a_6=4$，因為當 $n=6$ 時總共有 $1+2+3$, $1+5$, $2+4$, 6 等四種方法。試寫出數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數。

4.求出 $(1-4x)^{-5}$ 的展開式中 x^{12} 的係數。

5.費氏數列（Fibonacci sequence）可用遞迴的方式定義為 $F_0=0, F_1=1$，而當 $n>1$，$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$；此數列的生成函數為

$$\frac{x}{1-x-x^2}$$

也就是

$$x(1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+(x+x^2)^3+\cdots)$$

由此導出費氏數列的一般式為

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots.$$

參考資料

1.許介彥（2005），數學悠哉遊，第九章，三民書局。

2.K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 5th edition, McGraw-Hill, 2003.

（下轉第47頁）