

正負數的概念及其加減運算（續）

林保平

臺北市立師範學院 數資系

減法的運算規則

在作減法運算時，若從數線模式的溫度來看，我們可以比較同一地點的溫度，看其溫度的變化，因此就會有原來溫度及最後溫度兩個位置量，溫度的變化的減法規則：「溫度的變化 = 最後溫度 - 原來溫度」，可以建立在學生的舊經驗上，例如，原來氣溫 20 度，最後氣溫 25 度，氣溫上升 $25 - 20$ 。若要透過兩地氣溫高低的比較，來看溫度相差多少，此時，就要用「甲地氣溫 - 乙地氣溫」來看甲地比乙地氣溫高多少度。但這種引入若數值不好，會有像甲地乙地氣溫高 -5 度的描述方式，較不自然，但邏輯上是說得通的。對初學的學生不宜，不過學生對正負有了較深的認識之後，這種抽象推理的學習應是必要的（參看本文 p5）。

通常課本處理減法運算都是透過將減法看成加法後再運算，並未獨立建立減法的運算規則。其實減法也有類似於加法的運算規則，我們建議教師可考量，在課本或學生習作中，提供學生仿照加法運算規則建立的方式，自行歸納建立減法運算規則（但不強調減法規則的記憶），這對學生而言，應是不錯的思考訓練。減法的運算規則如下：

若大數減小數，結果取正號，若為小

數減大數，結果取負號。

同號數相減，將兩數的絕對值相減（大的減小的），再將符號加入。

異號數相減，將兩數的絕對值相加，再將符號加入。

規則的建立也可以仿照前述加法規則建立的步驟，請看下例：

例、某冷凍庫，第一天將溫度調至 5 度，第二天進貨之後，將溫度調到零下 20 度，請問這個冷凍庫第一天到第二天溫度的變化是多少度？

1. 冷凍庫溫度的變化，列成算式為：

$$\underline{\quad\quad} - \underline{\quad\quad}$$

$$A: (-20) - (+5) \text{ 或 } (-20) - 5$$

（註：「最後溫度 - 原來溫度」應就兩溫度均為正數時，先討論，此處即可類推）

2. 兩刻度異號，溫度的變化是調升或調降？ $\underline{\quad\quad}$

調降幾度？列式說明如何算的？

$$A: \text{調降 } 25 \text{ 度, } 20 + 5$$

（註： $20 + 5$ 是兩數絕對值相加）

3. 溫度的變化是 $\underline{\quad\quad}$ 度（用正負數表示）

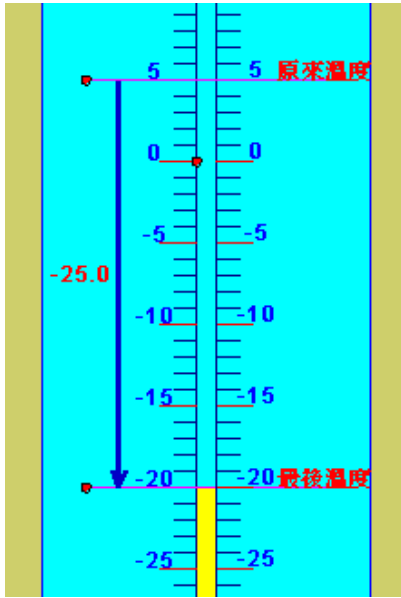
$$A: -25$$

4. 將 1、2 及 3 列算式為

$$\underline{\quad\quad} - \underline{\quad\quad} = -(\underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad}) = \underline{\quad\quad}$$

$$A: (-20) - (+5) = -(20 + 5) = -25$$

利用如圖七所示的溫度計圖形，可幫助學生看出「異號數相減時，兩數絕對值相加」，「同號數相減，兩數絕對值相減」的意義。



圖七 溫度變化的有向線段圖示

減法運算看成加法運算

大部分課本，處理正負數的減法，都用「減法可以看成加法」來處理，但對於為什麼會想到減法可以看成加法，並未有引導的過程，大部分的課本均馬虎帶過，以告知或比較的方式處理。例如，知道列出 $(-2) - (-3)$ 並透過操作或數算數線間格得知 $(-2) - (-3) = +1$ 之後，用與 $(-2) + (+3) = +1$ 比較的方式，看出 $(-2) - (-3) = (-2) + (+3)$ ，最後歸納得「減去一個數，就是加上該數的相反數。其實用電荷相消模式，計算 $(-2) - (-8)$ 時，(參看本文 p10)，可以不管原來有幾個負電荷，先補入要拿走的負電荷數量 8 負 8 正，(其實此處只要

補 6 負 6 正即可，好像比較笨，但卻可以得到不錯的結論，「要減幾個就補幾對」是正數減負數或負數減正數時的方法)，再拿走 8 個負電荷，剩下原有的 2 負電荷及加入的 8 正電荷，嚴格地列式可記為

$$\begin{aligned} & (-2) - (-8) \\ &= (-2) + [(+8) + (-8)] - (-8) \\ &= (-2) + (+8) \end{aligned}$$

這樣的處理方式正好展現並說明了「減一個數就是加上這個數的相反數」，指出減法與加法的關係。其實透過撲克牌，紅黑點計分問題也可以讓學生討論減法看成加法，減一個數就是加上它的相反數。下例為引導學生思考的活動。

例、撲克牌中的紅心和方塊點數代表得分(每一點代表得 1 分)，黑桃和梅花點數代表失分(每一點代表失 1 分)。計算總分時，得失分相抵銷，若最後得 5 分，總分記為 +5，若為失 5 分，總分記為 -5 分。(A 表示一點，J 表示 11 點，Q 表示 12 點，K 表示 13 點)

1. 世軒有兩張牌，一張是紅心 K，另一張是黑桃 7。這 2 張牌合起來，是得分或失分？總分是多少？

$$A: (+13) + (-7) = +6, \text{ 得分, 總分 } +6$$

2. 現在輪到世軒，他可以抽牌或丟牌。在他抽牌或丟牌後，總分紀錄是 -7。說說看，他此次可能是抽牌或丟牌？或兩者都有可能？抽牌或丟出的牌，可能的花色及點數是什麼？

$$A: \text{丟出紅心 } 13, \text{ 或抽得黑桃 } 13, \text{ 或抽得黑梅 } 13$$

3.用分數來描述撲克牌，他要丟幾分，或抽幾分就會使總分變成-7分？

A：丟+13分或抽-13分都可以

[註：此處可強調丟+13分，與抽-13分結果相同]

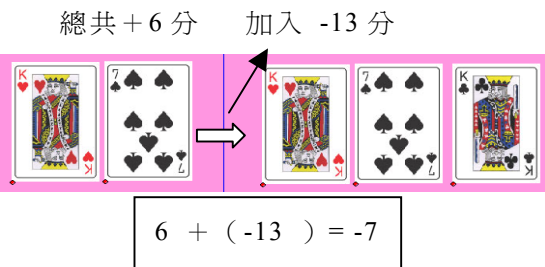
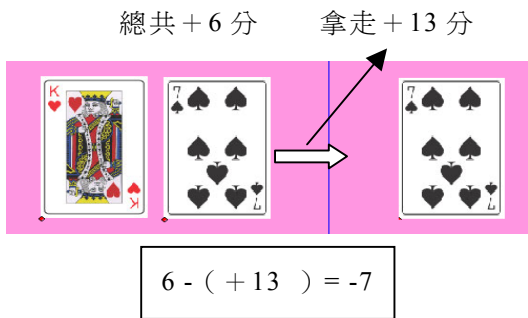
4.原來分數是 -6 分，丟 13 分，用算式計算總分時記為 $(-6) - (-13) = -7$

抽-13分時，用算式計算總分時記為 $-6 + (+13) = -7$

5.比較 4 中兩個加減的式子，你有什麼結論？

A：一個數減 -13，和加 +13 是一樣的。

在圖八的幫助下，與學生的討論應更容易。



圖八 撲克牌對「減一負數就是加上它的相反數」的圖示

透過算式填充題也可以引導學生建立減法算式，下例利用水位變化來處理。

例 2.水庫兩次合起來是下降了 13 公分，第二次水位下降 5 公分，問第一次水位是上升或下降多少公分？回答下列問題。

1.兩次合起來的水位變化是_____公分(用正負數表示)

第二次水位變化是_____公分(用正負數表示)

2.用算式填充，可將算式列成 _____

A：() + (-5) = -13

仿照國小的方法，上式可以列成 () = _____ - _____。

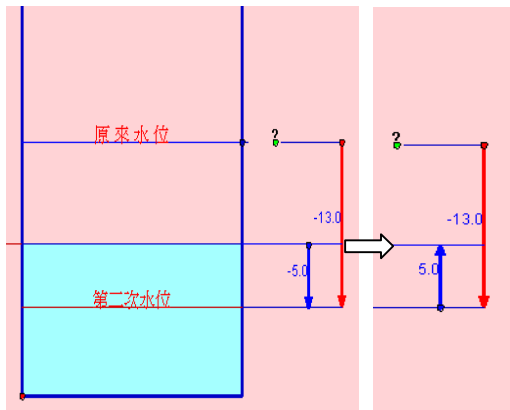
A: () = -13 - (-5)

3.看水位圖，若將第二次的水位變化還原，第一次水位可以用算式記為 _____ + _____

A：-13 + (+5)

4.比較 2,3 可知 _____ - _____ = _____ + _____

討論本題前，應先處理合於國小算式填充題互逆或還原求解之問題，改變上題的數字及方向，可以協助學生歸納「減掉一個數就是加上它的相反數」。圖九展示利用動態程式，透過相反數的有向線段圖示，可協助學生理解將第二次下降的量還原，就是將總變化量加上第二次水變化量的相反數。



圖九 將第二次水位還原的圖示，此時，總變化加上還原量就是第一次水位變化。

兩數差的絕對值之幾何意義

由於正負數的減法已經討論（兩刻度的差或兩變化量的差），亦即 $a-b$ 的數值意義已經獲得，若透過與 $b-a$ 之比較，數線上兩點間的距離是兩坐標差的絕對值，應可繼續討論，由於牽涉到 $|a-b|$ 的符號表示會較困難，初學之時只建立數值之意義就夠了之探討。

分數的加減運算

在數的概念及數線的教學時，許多課本，將正負分數的加減運算（或乘除運算）與整數分開為兩個不同的單元，事實上正負小數及分數，從運算規則來看，其實與整數的運算是一樣的。運算規則的建立在較小的整數狀況下，透過數線間格的數算，或黑白旗子的數算，有時直觀便可知其結果，沒有必要運算過程，規則建立的必要性並不存在。但對於直觀無法直接處

理的分數運算，則需要列式及運算過程，

$$\text{例如 } \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{4}{7}\right) = \left(-\frac{35}{56}\right) + \left(\frac{32}{56}\right) = -\left(\frac{35}{56} - \frac{32}{56}\right)$$

$$= -\frac{3}{56}$$

此時，學生仍只是使用小學的通分技能，但卻可看出異號數相加時規則的重要性，透過運算規則，含負數的運算，都可簡化為不含負號的運算。規則建立的過程當然是事先討論整數，方便引出規則，再推廣到分數及小數（在數線模式下，水位升降之量以整數、分數或小數表示意義上並無太大不同）。而分數的比較大小也應在含在正負數的大小比較單元，學生對正負分數或小數的運算較有問題，其實是由於分數及小數本身的複雜性，而非正負概念的問題。因此，我們建議，在加減規則建立之後，可直接討論分數的運算，做為規則的應用。

事實上分數的加減運算，其處理除上述方式之外，另一處理的方法是擴充分數的意義及內容，使其分子分母都可以是負整數，並將正分數的運算法則，擴充為分母分子含負號的運算法則（更基本的說法是擴充等價分數至分母及分子可以有負整數），例如，有理數的加減法則，定義為

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

其中 a, b, c, d 為整數，此時，正有理數的加減法就擴充為有理數的加減法，上例即可處理為

$$\left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{4}{7} = \frac{-5}{8} + \frac{4}{7} = \frac{(-5) \times 7}{8 \times 7} + \frac{8 \times 4}{8 \times 7} = \frac{-35}{56} + \frac{32}{56}$$

$$= \frac{-35+32}{56} = \frac{-3}{56} = -\frac{3}{56}。這種方式的運算，學$$

生都能理解，才算理解有理數的運算，但是後者的處理，相當麻煩，大部分的課本都沒有詳細處理，是屬於代數的運算規則，由於純代數的規則使用於純數字的運算，並無熟練之必要，因此我們建議教學中不必過度強調，能套用就好，不必對其運算規則作詳細的引導，學生有此認識就夠了。

分子或分母為負數之分數

在前述第二種分數運算處理過程中，牽涉到分數的分子或分母有負號的問題（如 $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{-2}{-3}$ ），此時分數的意義是什麼？這樣的分數是如何形成的呢？有些課本企圖以數線及分割的方法討論，解釋時將 0 到 -2 的線段分割成 3 等分，認為這就是 $\frac{-2}{3}$ ，但事實上，圖形呈現的仍然是 $\frac{2}{3}$ ，

因為這仍然是一個長為 2 的線段平分為 3 等分（雖然此線段在原點的右邊），不是 $\frac{-2}{3}$ 。看不出這種處理解決了任何問題。事

實上，像 $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{-2}{-3}$ 的出現，無法透過分數出現的原始意義來解釋，應由分數意義的擴充來處理。由整數乘除的運算法則，我們知道 $(-8) \div 2 = -(8 \div 2)$ ，非整除的運算也可以以同樣的想法處理，例如，

$$(-8) \div 3 = -(8 \div 3) = -\frac{8}{3}，但在國小時學生$$

$$(-8) \div 3 = -\frac{8}{3}，但在國小時學生$$

已經知道兩數相除可以寫成分數，前式若依照舊經驗處理寫成分數，就變成

$$(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}，但這個數是學生不知其意$$

義的數，為賦予意義，比較兩式就應規定

$$\frac{-8}{3} = -\frac{8}{3} 較為合理，透過這樣的處理， $\frac{-8}{3}$$$

的意義就建立出來，同時也形成了

$$\frac{-8}{3} = -\frac{8}{3} 的運算法則，同樣的， $\frac{3}{-8}, \frac{-3}{-8}$ 的$$

意義及其與負分數的關係也可以依這個方式建立。這種建立分子分母含負號的數的

意義的處理方式，雷同於負指數意義之賦予及擴充的方式，例如 $3^0, 3^{-2}$ 對未學過 0

指數或負指數的學生來說是無意義的，因為根據指數的原始意義（幾個相同的數相

乘的簡記）來看，「0 個 3 或 -2 個 3 相乘」

並無意義，但由指數的運算，學生應能發

現類似 $\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$ 利用指數相減的原

理，若將此原理，運用如下， $\frac{3^5}{3^5} = 3^{5-5} = 3^0$ ，

$$\frac{3^3}{3^5} = 3^{3-5} = 3^{-2} 就形成正指數意義無法解釋$$

的 0 指數及負指數（嚴格地說， $3^1 = 3$ 也是規定的，因 1 個 3 相乘也是說不通的），

若要探明或建立負指數或 0 指數的意義，

回頭檢視 $\frac{3^5}{3^5} = 1$ 及 $\frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2}$ ，就可確定 $3^0 =$

1， $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ 之規定的合理性了，因此教學

時，由無意義變成有意義，其實是一種規

時，由無意義變成有意義，其實是一種規

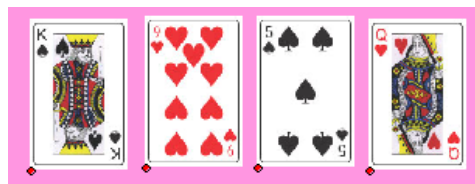
約，但規約有時是不能隨便規定的，它必須維持原有的規則，不與原有的規則矛盾。在數學上意義的擴充有時也行不通，例如 $3 \div 0$ 不論從等分除或包含除來看都是無意義的（例如，「3 個糖果平分給 0 個人，每人分幾個？」或「3 個糖果，每人分 0 個，可分給幾個人？」），但我們無法擴充其意義，因為不論規定 $3 \div 0$ 為任何一數均會導致與「乘除互逆」規則的矛盾（ $3 \div 0 = x \Rightarrow 3 = 0 \times x \Rightarrow 3 = 0$ ），因此，0 不能當除數。

交換律與結合律

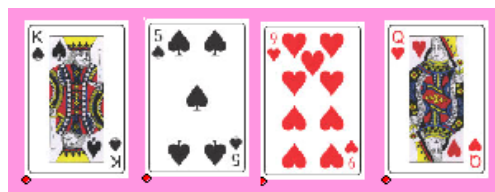
國小學生對正數的加法與乘法的交換律及結合律已經有初步的概念，牽涉有負數的加法的算式中，各數是否可交換或結合其實不難理解，許多課本，以多個實例計算比較 $a+b$ 及 $b+a$ ，或 $(a+b)+c$ 及 $a+(b+c)$ 之結果後，再宣告兩律成立，是建立兩規律於「計算結果」的「相等」上，此法對未曾計算過的式子，並無類推的作用，我們認為交換律可透過實例情境的類推、比較、及討論，引導學生自行建立，計算則可當作檢驗的例子。下例為討論交換律的問題實例（此處採 4 卡並列，因 2 卡並列似乎太過簡單。）。

例、撲克牌中，每點表示一分，紅牌表示得分，黑牌表示失分，得分用正數表示，失分用負數表示，計算總分時，得失相抵銷，試比較下列三組撲克牌的總分，然後列出並比較這三個算式，說說看你有什麼結論？

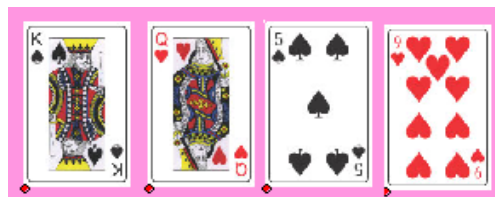
(a)



(b)



(c)



結合律則可利用簡化如 $[(-23456) + (+76543)] + (-76543)$ 的計算方式予以討論。

加減的混合運算

對於含正負數的加減混合運算，有許多不同的方法，大部分的課本討論時都是將所有的減法運算化為加法，然後依序或運用加法的交換律或結合律對該加法式子作簡化的運算。但卻遺漏了一個重要的算法，那就是「省略正號」並利用「符號法則」將所有的括號去除（因此式子中只有運算符號），然後將要加的數及要減的數分別加起來，兩者再相減，這是一般處理時的方法，我們建議教學中必需有這種方法的討論。

五、以電腦程式呈現的教學模型

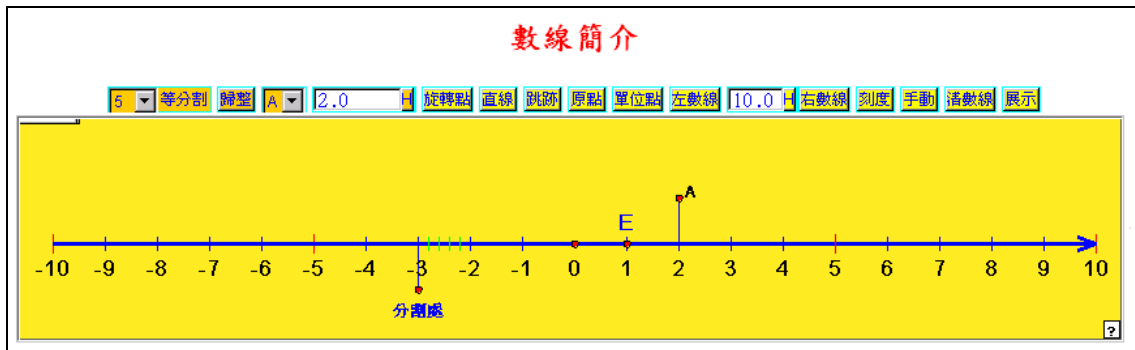
電腦及網路科技的日新夜異，使得使用電腦協助教學成為未來的必然趨勢，底下簡介幾個我們發展的程式，供讀者上網參考使用。

一、數線簡介

本程式展示數線形成的過程，教師可按「展示」按鈕，由電腦自動清畫面並展示數線的形成過程，也可先按鈕「清畫面」，再依序按「直線」、「原點」、「單位點」、

「手動」等按鈕後，以滑鼠向左及右方拖曳，形成正向及負向的數線。也可以按鈕

「旋轉點」呈現旋轉點，以滑鼠拖曳使數線以非水平線的方式呈現，程式也提供選擇分割任一單位為 2-10 等分的功能，方便討論數與點間的對應關係。選擇 A、B、C 或 D 可以呈現把手，移動其位置，可以就位置與學生問答討論其坐標，也可以按「S」及「H」以顯示或隱藏其坐標值，如圖十所示。

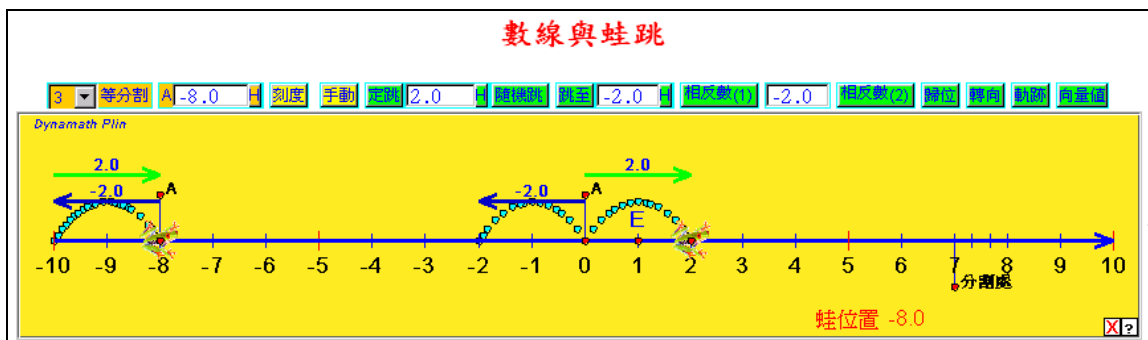


圖十 數線簡介程式起始畫面

二、數線與蛙跳

本程式展示青蛙的跳躍，呈現跳躍的軌跡，可輸入跳躍的數值（正負數，正向前，負向後），可以固定跳一個輸入的量（有理數），隨機跳一個量（1-7 單位，整

數），也可以跳至規定的位置（有理數），青蛙也可以轉變方向，可供教師討論位置量與變化量，瞭解在數線上量呈現的方式。變化量也可以用有向線段呈現，對相反數的意義，也可有探討（圖十一）。

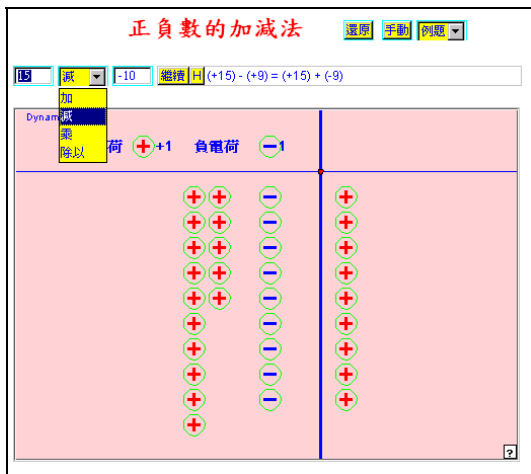


圖十一 數線與蛙跳程式呈現的畫面

三、正負數的加減運算

1. 電荷相消模型（或紅黑球相消模型）

本程式可展示電荷相消模式的加減運算過程，可選加、減、乘、除運算（乘除只展示數值計算過程），可分別輸入兩個正負數（輸入完成要按 Enter 鍵，使用的正負電荷數（或紅黑球數），每種都不得超過 40 個，否則只呈現數值計算過程），再按「操作」、「繼續」、「繼續」…至該鈕再出現「操作」為止，程式會依序自動取出或拿走正負電荷，並呈現相對應的算式。可供教師與學生討論操作正負電荷數量之方法及意義。

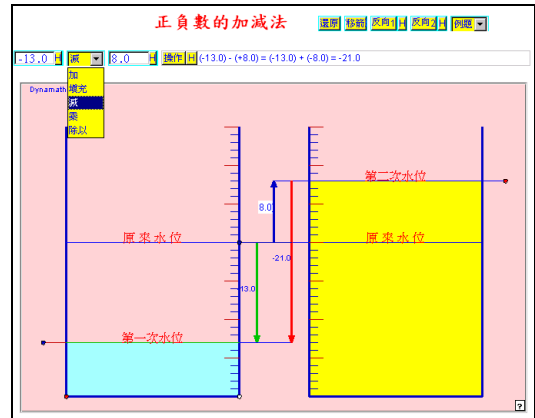


圖十二 正負電荷相消模式型呈現的畫面

2. 水位變化模型

本程式呈現一個或兩個水杯（相同的），並以水位上升下降呈現正負數的加減法，呈現水位升降的過程，並配以相應的算式。兩個水杯是比較不同水庫水位時使用（減法），例如某日兩水庫原來水位一樣高，一個月後，甲水庫水位水下降 13 公

分，乙水庫水位上升 8 公分，此時，甲水庫比乙水庫水位高（或低）幾公分？幾公分？圖十三為原題列式為「甲水庫水位變化-乙水庫水位變化」時的圖示。



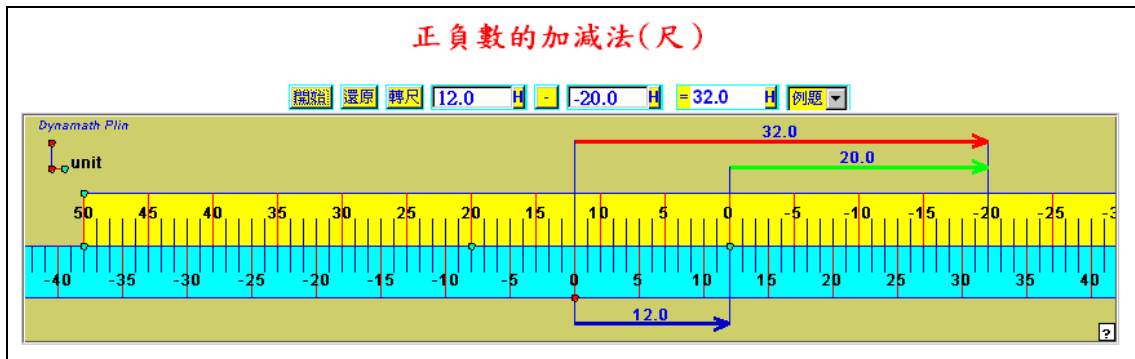
圖十三 水位變化模呈現的減法過程

3. 滑尺操作模型

本程式提供可滑動的兩條直尺，兩數相加時，按「±」鈕使其呈現“+”號（預定的符號）；兩數相減時，先按「±」鈕使其呈現“-”號，此時上方直尺的刻度會自動轉向，負刻度在右方，正刻度在左方（好像將直尺轉向一樣），找出和或差的步驟如下：

- 確定被加（減）數下方直尺的位置
- 將上方直尺的原點，滑往該位置，
- 看加（減）數在上方直尺的位置在哪裡，對照下方直尺刻度，就是兩數之和（差）。

本程式除提供操作的按鈕外，直尺滑動時，也會展示有向線段的加減表示法。若供學生操作求和及差，對年紀較小的學生也是不錯的活動，如圖十四。



圖十四 直尺操作模型呈現 $12 - (-20) = 32$ 的畫面

4. 汽車行進模型

本程式類似滑尺加減，以汽車面向為準，前進為正，後退為負（通常汽車開始時均面朝正向），汽車行進時，會將對應的有向線段畫出來。其操作步驟如下：

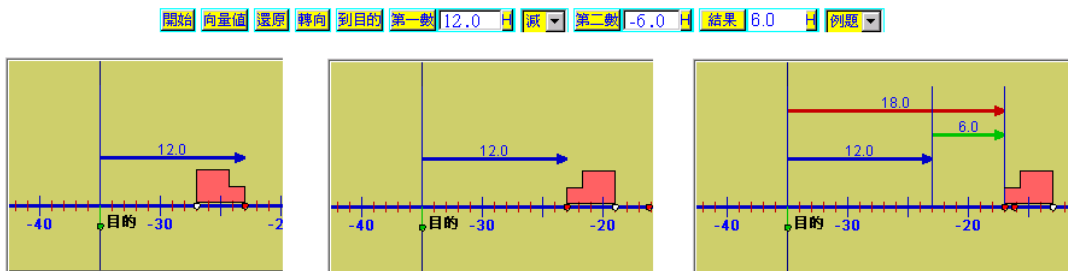
- 輸入兩數，並決定要作加法還是減法
- 按鈕「開始」— 程式會清除畫面，汽車面向正方向，並依第一數的大小及方向行進之後，按鈕名稱會變為「繼續」。
- 再按「繼續」— 汽車會依第二數的方向及大小行進（若是作減法，汽車會先轉

向再行進，如圖十五所示），按鈕名稱仍為「繼續」。

- 再按一次「繼續」，程式會呈現兩量相加或相減的結果（也會畫出與結果相應的有向線段），按鈕名稱回覆為「操作」。

也可以自行依序按「第一數」、「加」（或「減」）「第二數」、「結果」等鈕，來觀察汽車的行進。

正負數的加減法(車)

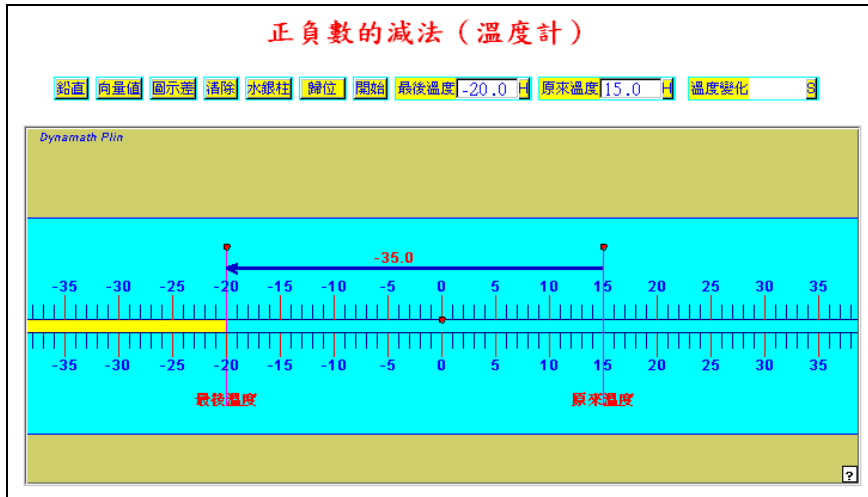


圖十五 汽車模型呈現減法時，汽車會先轉向再依輸入的第二數行進（第二圖）

5. 溫度計模型

本程式呈現溫度計（圖十六），可以手動或輸入原來溫度及最後溫度，並按鈕

「圖示差」呈現溫度的變化，可作為討論減法規則的模型，溫度計也可以水平或鉛直呈現。

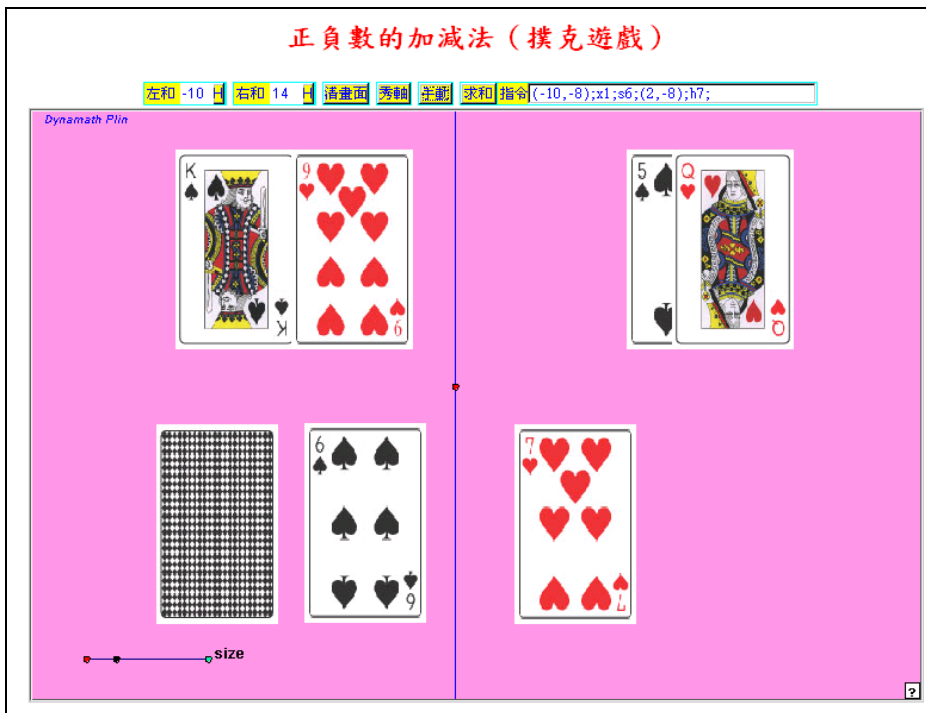


圖十六 溫度計模型呈現的畫面

6. 撲克牌程式

本程式提供一套撲克牌，及兩張蓋牌，方便教師使用撲克牌教學，可鍵入相關指令，移動撲克牌(至相應的坐標位置，以撲克牌的左下角定位置)，可供教師上課

時，作撲克牌相關活動時作呈現之用。圖十七呈現一些撲克牌，問題「圖中第二列，若左邊兩牌點數之和與右邊點數相等，問蓋牌可以是哪一張牌？」就可讓學生討論加法的算式填充題。



圖十七 撲克牌程式呈現的畫面

六、結語

本文首先介紹了正負數及其加減運算，在古代中國使用的狀況，並列出我們認為正負數及其加減運算在國中教學時，所應完成的能力指標，並就相關概念及議題，提出討論，最後舉例列出我們所發展的與正負數教學有關的電腦教學模型，供國中教師教學之參考，這些程式可上網 <http://dynamath.idv.tw> 或 <http://動態數學網.tw> 察看使用，希望對國中教師有幫助。

參考書目

- 1.李嚴、杜石然（民 81）中國古代數學簡史（4 版）。九章出版社。
- 2.李繼閔（民 81）九章算術及其劉徽注研究。九章出版社。
- 3.郭書春（民 84）古代世界數學泰斗—劉徽。明文出版社。
- 4.Bennett, A. B. & Musser, G.(1981). A concrete approach to integer addition and subtraction. In Kenneth E. Easterday & Loren I. Henry (Ed.) *Activities for Junior High School and Middle School Mathematics - Readings from the Arithmetic Teacher & Mathematics Teacher*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- 5.Cajori, F. (1928, 1929) . *A History of Mathematical Notations*. 2 volumes. Lasalle, Illinois: The Open Court Publishing Co.
- 6.Duncan, R. K., & Saunders, W. J. (1980). Introduction to integers. *Instructor*, 90(3), pp.152-154.
- 7.Human, P., & Murray, H. (1987). Non-concrete approaches to integer arithmetic. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. III, pp. 437-443). Montreal: Universite de Montreal.
- 8.Kohn, J. B. (1978). A physical model for operations with integers. *Mathematics Teacher*, 71(9), pp. 734-736.
- 9.Smith, David Eugene (1860-1944). *History of Mathematics*, vol. I. New York: Dover Publications, Inc., 1958.
- 10.Smith, David Eugene. *History of Mathematics*, vol. II. Boston: Ginn and Co., 1925.
- 11.Thompson, F. M. (1988). Algebraic instruction for the younger child. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp.69-77). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.