

利用對差分方程式進行疊代來說明蝴蝶效應

王立光 楊義清

國立台東大學 自然科學教育學系

摘要

本文利用疊代差分方程式的方法來描述非線性微分方程式的運動軌跡，分別考慮在位移和動量的初始條件上具有不可觀測的微小差異。藉由這種方式，讀者可以非常輕易地發現到，初始條件上不可觀測的微小差異在歷經長時間的疊代後會被累積成可觀測的量。

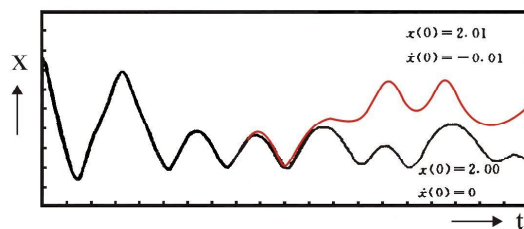
近年來由於電腦計算能力大幅提升，使得人們對於非線性系統的了解更加地透徹。1963年，美國氣象學家 E.N. Lorenz 在研究兩無限平面間的流體運動上，首次明確地由確定性方程式 (deterministic equation) 得到隨機性的結果 [1,2]。對於線性系統而言，初始條件 (initial condition) 上的微小差異一般都只會引起運動狀態的微小差別，即是初始條件接近的軌跡始終是接近的，由此人們可以很容易地預測線性系統的運動。不過非線性系統則是具有對初始條件的敏感依賴性，即初始條件的微小差別常常使軌道按指數形式分開。這種結果並非由外部因素引起的，而是由確定性方程式本身所導致的，這種具有隨機性的運動狀態就稱為混沌 (chaos)。

讓我們以下列受驅動的 Duffing 方程式 [2] 為例：

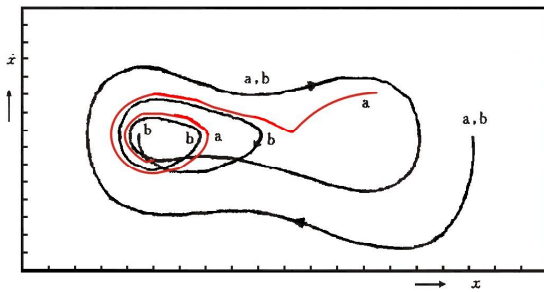
$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - x + x^3 = 0.31\cos 1.2t, \quad (1)$$

使用電腦來解此方程式。當有兩個初始條件相差極小時，由解 $x(t)$ 隨時間變化

(圖一) 和在相空間【註一】上 (圖二) 的軌跡可以發現到，若是時間不長的時候，兩個解的差別極小，甚至還無法分辨。但是隨著時間的增長，兩個解的差別越來越大，而且很快就變得完全不一樣了，真可謂是差之毫釐、失之千里。Lorenz 甚至戲稱混沌運動對初始條件的敏感依賴性為蝴蝶效應 (butterfly effect)：一隻蝴蝶在巴西拍動翅膀，可能在美國德克薩斯州引起龍捲風！



圖一 方程式(1)的解 $x(t)$ 在兩個不同初始條件下隨時間變化的軌跡 [2]，其中 a 為紅線 (初始條件為上方之數據)；b 為黑線 (初始條件為下方之數據)。



圖二 方程式(1)的解 $x(t)$ 在兩個不同初始條件下於相空間中的軌跡[2]

本文中採取對微分方程式進行差分疊代來表現系統的運動軌跡，而不採用繪圖的方式來表現。雖然經由數值計算的結果可以輕易地呈現蝴蝶效應的圖象，但是卻無法由數學公式上來呈現出蝴蝶效應現象的發生；同時以數值方式呈現蝴蝶效應的文章已經很多了，所以本文中希望嘗試以代數運算的方式讓讀者體會蝴蝶效應的產生，可以做到經由理論說明呈現蝴蝶效應現象的發生。首先，選取一個簡單非線性的力學系統（考慮一個非線性彈簧的系統）

$$F = -kx - \mu x^3, \quad (2)$$

其中 F 為系統所受的淨力、 x 為位移、 v 為速度、 k 與 μ 均為彈簧的彈力常數。在系統運動方程式的表示上有兩種方式：一種是利用 Newton 運動方程式寫出一個關於於位移 x 的二階微分方程式，接著對其差分【註二】可以得到一個差分方程式；另一種是將 Newton 方程式分離成兩條一階微分方程式（稱為正則方程式），再對這兩條方程式進行差分以得到兩個差分方程式。本文中採用第二種方法，因為這個方

法容易為讀者瞭解如何導出差分方程式。因此，將系統的運動方程式以正則方程式的形式寫出來為

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad (4)$$

其中 p 代表的是系統的動量。若將第(2)式代入第(3)式後，可以得到

$$\frac{dp}{dt} = -kx - \mu x^3, \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}. \quad (6)$$

我們將上述第(5)、(6)式表示成差分的形式

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} = -kx_n - \mu x_n^3, \quad (7)$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = \frac{p_n}{m}. \quad (8)$$

其中 Δt 為進行疊代時所選取的最小時間差距。再次整理可得差分方程式

$$p_{n+1} = p_n + (-kx_n - \mu x_n^3) \times \Delta t, \quad (9)$$

$$x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{m} p_n\right) \times \Delta t. \quad (10)$$

這裡只要先選定初始條件後，再對第(9)、(10)兩式進行疊代就可以得到 x 與 p 隨時間變化的值。

接著我們將利用這個非線性系統，說明初始條件的不可觀察的差異可以引起運動狀態上的可觀察的差別。選擇下列兩組初始條件來進行討論：

一、微小的動量差異 δp :

考慮兩個不同的初始條件 ($\bar{X}_0 = 0$, $\bar{P}_0 = p$) 和 ($X_0 = 0$, $P_0 = p + \delta p$), 其中 δp 為微小的動量差異。這兩個初始條件的動量間所具有的差異為 $P_0 - \bar{P}_0 = \delta p$, 我們可要求這個動量差異小於可觀測的最小尺度。經過 n 個 Δt 時間後, 再對這兩個動量之間的差異 $P_n - \bar{P}_n$ 比較。

一開始我們以 ($X_0 = 0$, $P_0 = p + \delta p$) 為初始條件來進行疊代, 經過時間 Δt 後, 系統的位移與動量就變成爲

$$X_1 = X_0 + \frac{1}{m} P_0 \times \Delta t = \frac{1}{m} (p + \delta p) \Delta t,$$

$$P_1 = P_0 + (-kX_0 - \mu X_0^3) \times \Delta t = p + \delta p.$$

再經過時間 Δt 後

$$X_2 = X_1 + \frac{1}{m} P_1 \times \Delta t = \frac{2}{m} (p + \delta p) \Delta t,$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + (-kX_1 - \mu X_1^3) \times \Delta t \\ &= p + \delta p - k \left(\frac{p}{m} \Delta t + \frac{\delta p}{m} \Delta t \right) \times \Delta t \\ &\quad - \mu \left(\frac{p}{m} \Delta t + \frac{\delta p}{m} \Delta t \right)^3 \times \Delta t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= p + \delta p - \frac{k}{m} p (\Delta t)^2 - \frac{k}{m} \delta p (\Delta t)^2 \\ &\quad - \frac{\mu}{m^3} p^3 (\Delta t)^4 - \frac{3\mu}{m^3} p^2 \delta p (\Delta t)^4 \\ &\quad - \frac{3\mu}{m^3} p (\delta p)^2 (\Delta t)^4 - \frac{\mu}{m^3} (\delta p)^3 (\Delta t)^4 \end{aligned}$$

接著的位移與動量再經過時間 Δt 後就成爲

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 + \frac{1}{m} P_2 \times \Delta t \\ &= \frac{3}{m} (p + \delta p) \Delta t - \frac{k}{m^2} (p + \delta p) (\Delta t)^3 \\ &\quad - \frac{\mu}{m^4} (p + \delta p)^3 (\Delta t)^5, \\ &= \frac{3p}{m} \Delta t + \frac{3\delta p}{m} \Delta t - \frac{kp}{m^2} (\Delta t)^3 \\ &\quad - \frac{k\delta p}{m^2} (\Delta t)^3 - \frac{\mu p^3}{m^4} (\Delta t)^5 \\ &\quad - \frac{3\mu p^2 \delta p}{m^4} (\Delta t)^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + (-kX_2 - \mu X_2^3) \times \Delta t \\ &= p + \delta p - 3k \left(\frac{p}{m} \Delta t + \frac{\delta p}{m} \Delta t \right) \\ &\quad \times \Delta t - 9\mu \left(\frac{p}{m} \Delta t + \frac{\delta p}{m} \Delta t \right)^3 \times \Delta t \\ &= p + \delta p - \frac{3kp}{m} (\Delta t)^2 - \frac{3k\delta p}{m} (\Delta t)^2 \\ &\quad - \frac{9\mu p^3}{m^3} (\Delta t)^4 - \frac{27\mu p^2 \delta p}{m^3} (\Delta t)^4 \\ &\quad - \frac{27\mu p (\delta p)^2}{m^3} (\Delta t)^4 - \frac{9\mu (\delta p)^3}{m^3} (\Delta t)^4 \end{aligned}$$

再對經過時間 Δt 進行一次疊代, 則新的位移與動量爲

$$\begin{aligned} X_4 &= X_3 + \frac{1}{m} P_3 \times \Delta t \\ &= \frac{4}{m} (p + \delta p) \Delta t - \frac{4k}{m^2} (p + \delta p) (\Delta t)^3 \\ &\quad - \frac{10\mu}{m^4} (p + \delta p)^3 (\Delta t)^5, \\ &= \frac{4p}{m} \Delta t + \frac{4\delta p}{m} \Delta t - \frac{4kp}{m^2} (\Delta t)^3 \\ &\quad - \frac{4k\delta p}{m^2} (\Delta t)^3 - \frac{10\mu p^3}{m^4} (\Delta t)^5 \\ &\quad - \frac{30\mu p^2 \delta p}{m^4} (\Delta t)^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_4 &= P_3 + (-kX_3 - \mu X_3^3) \times \Delta t \\
 &= p + \delta p - 6k \left(\frac{p}{m} \Delta t + \frac{\delta p}{m} \Delta t \right) \times \Delta t \\
 &\quad - 36\mu \left(\frac{p}{m} \Delta t + \frac{\delta p}{m} \Delta t \right)^3 \times \Delta t \\
 &\quad + \frac{k^2}{m^2} (p + \delta p) (\Delta t)^4 + \dots \\
 &= p + \delta p - \frac{6kp}{m} (\Delta t)^2 - \frac{6k\delta p}{m} (\Delta t)^2 \\
 &\quad + \frac{k^2 p}{m^2} (\Delta t)^4 + \frac{k^2 (\delta p)}{m^2} (\Delta t)^4 \\
 &\quad - \frac{36\mu p^3}{m^3} (\Delta t)^4 - \frac{108\mu p^2 \delta p}{m^3} (\Delta t)^4 \\
 &\quad - \frac{108\mu p (\delta p)^2}{m^3} (\Delta t)^4 - \frac{36\mu (\delta p)^3}{m^3} (\Delta t)^4 + \dots
 \end{aligned}$$

這兩個動量 P_n 與 \bar{P}_n 間的差別只在於 \bar{P}_n 中是不會出現含有 δp 的項，所以想要比較出動量間的差異 $P_n - \bar{P}_n$ ，只需觀察動量 P_n 中含有 δp 的各個低階項之係數變化就可以得到。在動量 P_n 中含有 δp 的各個項裏，除了 δp 這一項會出現以外，還有 $\frac{k\delta p(\Delta t)^2}{m}$ 、 $\frac{k^2\delta p(\Delta t)^4}{m^2}$ 、 $\frac{\mu p^2\delta p(\Delta t)^4}{m^3}$ 、 $\frac{\mu p(\delta p)^2(\Delta t)^4}{m^3}$... 等各項，我們將這些項中較為低階項的部分整理於表一中。

表一：動量 P_n 中含有 δp 各項的係數

$n \backslash P_n$	$\frac{k\delta p(\Delta t)^2}{m}$	$\frac{k^2\delta p(\Delta t)^4}{m^2}$	$\frac{\mu p^2\delta p(\Delta t)^4}{m^3}$	$\frac{\mu p(\delta p)^2(\Delta t)^4}{m^3}$	$\frac{\mu(\delta p)^3(\Delta t)^4}{m^3}$
1	0	0	0	0	0
2	-1	0	-3	-3	-1
3	-3	0	-27	-27	-9
4	-6	1	-108	-108	-36
5	-10	5	-300	-300	-100
6	-15	15	-675	-675	-225
7	-21	35	-1323	-1323	-441
8	-28	70	-2352	-2352	-784
9	-36	126	-3888	-3888	-1296
10	-45	210	-6075	-6075	-2025

我們在考慮最容易影響動量差異 $P_n - \bar{P}_n$ 值的低階項中，可以區分出兩種類型的數項：第一類 Q_n 為只含有彈力常數 k 的項（也就是說項中不可以含有 μ ），例如 $\frac{k\delta p(\Delta t)^2}{m}$ 、 $\frac{k^2\delta p(\Delta t)^4}{m^2}$... 等各項；第二類 R_n 為包含有彈力常數 μ 的項（當然項中可

以含有 k ），例如 $\frac{\mu p^2\delta p(\Delta t)^4}{m^3}$ 、 $\frac{\mu p(\delta p)^2(\Delta t)^4}{m^3}$... 等各項。在我們要求 $\mu = 0$ 後，我們可以發現系統就回復成爲線性的，而且只剩下第一類的項 Q_n 。由於線性系統不具有蝴蝶效應，我們也可以這麼說：這些第一類的項 Q_n 是不會引起蝴蝶效

應的，因此我們只需將注意力擺在第二類的項 R_n 即可。當然在第二類的項 R_n 中，我們首先應當試著選取對 δp 和 Δt 這兩項而言是屬於最低階的那一個項來分析，也就是先分析 $\frac{\mu p^2 \delta p (\Delta t)^4}{m^3}$ 項的係數。因此，在

經過歸納後可得到下列關係

$$P_n = \bar{P}_n + \delta p + Q_n + R_n, \quad (11)$$

其中 $R_n = -A_n \frac{\mu p^2 \delta p (\Delta t)^4}{m^3} + \dots$ ，而

$$A_n = 3 \times \left(\frac{n^2 - n}{2} \right)^2 \text{ 也就是 } \frac{\mu p^2 \delta p (\Delta t)^4}{m^3}$$

項的係數。如果我們設定動量測量上的最小尺度為 $10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ，疊代上的時間間隔為 $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$ ，動量差異的值為

$$\delta p = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}。由於動量差異的值小於$$

動量測量上的最小尺度，所以為儀器所測量不出來。然後我們再計算出 1 秒鐘、2 秒鐘、3 秒鐘、4 秒鐘及 5 秒鐘後，此項係數的數量級於表二中。在觀察 5 秒鐘後，

$\frac{\mu p^2 \delta p (\Delta t)^4}{m^3}$ 項係數的數量級為 10，而

$\delta p (\Delta t)^4$ 的數量級為 -11，雖然兩部分相乘

之後 $\frac{\mu p^2 \delta p (\Delta t)^4}{m^3}$ 項的數量級是 -1（在這

裡，我們暫先設定 $\frac{\mu p^2}{m^3} = 1$ ），但已經高過

於儀器可測量出的 $10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ （數量級

-2），使得動量差異變成可以觀測得到的。

表二：不同時間下， $\frac{\mu p^2 \delta p (\Delta t)^4}{m^3}$ 項的係數

的數量級

時間 \ P_i	$\frac{\mu p^2 \delta p (\Delta t)^4}{m^3}$ 係數的數量級
1 秒鐘	7
2 秒鐘	9
3 秒鐘	9
4 秒鐘	10
5 秒鐘	10

二、微小的位移差異 δx ：

再次選取兩組不同的初始條件 ($\bar{X}_0 = x, \bar{P}_0 = 0$) 和 ($X_0 = x + \delta x, P_0 = 0$)，其中 δx 為微小的位移差異。在這裡，兩個初始條件的位移間所具有的差異為 $X_0 - \bar{X}_0 = \delta x$ ，同樣我們也可以要求這個位移差異小於可觀測的最小尺度。

在經過 $n\Delta t$ 時間後，再對這兩組位移之間的差異 $X_n - \bar{X}_n$ 來比較。

一開始我們以 ($X_0 = x + \delta x, P_0 = 0$) 為初始條件來進行疊代，經過時間 Δt 後，系統的位移與動量就變成爲

$$X_1 = X_0 + \frac{1}{m} P_0 \times \Delta t = x + \delta x,$$

$$P_1 = P_0 + (-kX_0 - \mu X_0^3) \times \Delta t = -k(x + \delta x)\Delta t - \mu(x + \delta x)^3 \Delta t$$

再經過時間 Δt 後

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 + \frac{1}{m} P_1 \times \Delta t \\ &= x + \delta x - \frac{k}{m} (x + \delta x) (\Delta t)^2, \\ &\quad - \frac{\mu}{m} (x + \delta x)^3 (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + (-kX_1 - \mu X_1^3) \times \Delta t \\ &= -2k(x + \delta x) \Delta t - 2\mu(x + \delta x)^3 \Delta t \end{aligned}$$

接著的位移與動量再經過時間 Δt 後就成爲

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 + \frac{1}{m} P_2 \times \Delta t \\ &= x + \delta x - \frac{3k}{m} (x + \delta x) (\Delta t)^2, \\ &\quad - \frac{3\mu}{m} (x + \delta x)^3 (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + (-kX_2 - \mu X_2^3) \times \Delta t \\ &= -3k(x + \delta x) \Delta t - 3\mu(x + \delta x)^3 \Delta t \\ &\quad + \frac{k^2}{m} (x + \delta x) (\Delta t)^3 + \frac{4k\mu}{m} (x + \delta x)^3 (\Delta t)^3 \\ &\quad + \frac{3\mu^2}{m} (x + \delta x)^5 (\Delta t)^3 + \dots \end{aligned}$$

再對經過時間 Δt 進行一次疊代，則新的位移與動量爲

$$\begin{aligned} X_4 &= X_3 + \frac{1}{m} P_3 \times \Delta t \\ &= x + \delta x - \frac{6k}{m} (x + \delta x) (\Delta t)^2 \\ &\quad - \frac{6\mu}{m} (x + \delta x)^3 (\Delta t)^2, \\ &\quad + \frac{k^2}{m^2} (x + \delta x) (\Delta t)^4 \\ &\quad + \frac{4k\mu}{m^2} (x + \delta x)^3 (\Delta t)^4 \\ &\quad + \frac{3\mu^2}{m^2} (x + \delta x)^5 (\Delta t)^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= P_3 + (-kX_3 - \mu X_3^3) \times \Delta t \\ &= -4k(x + \delta x) \Delta t - 4\mu(x + \delta x)^3 \Delta t \\ &\quad + \frac{4k^2}{m} (x + \delta x) (\Delta t)^3 + \frac{16k\mu}{m} (x + \delta x)^3 (\Delta t)^3 \\ &\quad + \frac{12\mu^2}{m} (x + \delta x)^5 (\Delta t)^3 + \dots \end{aligned}$$

在此我們令初始條件爲 ($X_0 = x + \delta x$, $P_0 = 0$) 進行疊代，在這兩個位移 X_n 與 \bar{X}_n 間的差別只在於 \bar{X}_n 中是不會出現含有 δx 的項，所以想要比較出位移間的差異 $X_n - \bar{X}_n$ ，只需觀察位移 X_n 中含有 δx 的各個低階項之係數變化就可以得到。在位移 X_n 中出現含有 δx 的項有 $\frac{k\delta x(\Delta t)^2}{m}$ 、 $\frac{k^2\delta x(\Delta t)^4}{m^2}$ 、 $\frac{\mu x^2\delta x(\Delta t)^2}{m}$... 等等，我們將這些項中較爲低階項的部分整理於表中，其中最容易影響位移 X_n 值的低階項爲 $\frac{\mu x^2\delta x(\Delta t)^2}{m}$ 。

同樣地，在考慮最容易影響位移差異 $X_n - \bar{X}_n$ 值的低階項中，也可以區分出兩種類型的數項：第一類 Y_n 爲只含有彈力常數 k 的項（也就是說項中不可以含有 μ ），例如 $\frac{k\delta x(\Delta t)^2}{m}$ 、 $\frac{k^2\delta x(\Delta t)^4}{m^2}$... 等各項；第二類 Z_n 爲包含有彈力常數 μ 的項（當然項中可以含有 k ），例如 $\frac{\mu x^2\delta x(\Delta t)^2}{m}$ 、 $\frac{\mu x(\delta x)^2(\Delta t)^2}{m}$ 、 $\frac{k\mu x^2\delta x(\Delta t)^4}{m^2}$... 等各項。在我們要求 $\mu = 0$ 後，我們可以發現系統就回復成爲線性的，而且只剩下第一類的項 Y_n 。由於線性系統不具有蝴蝶效應，我們

也可以這麼說：這些第一類的項 Y_n 是不會引起蝴蝶效應的，因此我們只需將注意力擺在第二類的項 Z_n 即可。當然在第二類的項 Z_n 中，我們首先應當試著選取對 δx 和 Δt 這兩項而言是屬於最低階的那一個項

表三：位移 X_n 中各項的係數

$n \backslash X_n$	$\frac{k\delta x(\Delta t)^2}{m}$	$\frac{k^2\delta x(\Delta t)^4}{m^2}$	$\frac{\mu x^2\delta x(\Delta t)^2}{m}$	$\frac{\mu x(\delta x)^2(\Delta t)^2}{m}$	$\frac{\mu(\delta x)^3(\Delta t)^2}{m}$
1	0	0	0	0	0
2	-1	0	-3	-3	-1
3	-3	0	-9	-9	-3
4	-6	1	-18	-18	-6
5	-10	5	-30	-30	-10
6	-15	15	-45	-45	-15
7	-21	35	-63	-63	-21
8	-28	70	-84	-84	-28
9	-36	126	-108	-108	-36
10	-45	210	-135	-135	-45

其中 $Z_n = -B_n \frac{\mu x^2 \delta x(\Delta t)^2}{m} + \dots$ ，而 $B_n = 3 \times \left(\frac{n^2 - n}{2}\right)^2$ 為 $\frac{\mu x^2 \delta x(\Delta t)^2}{m}$ 項的係數。如果我們設定位移測量上的最小尺度為 10^{-4} cm ，同樣設定疊代上的時間間隔為 $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$ ，位移差異的值為 $\delta x = 10^{-5} \text{ cm}$ 。由於位移差異的值小於位移測量上的最小尺度，所以為儀器所測量不出來。然後我們再計算出 1 秒鐘，5 秒鐘，10 秒鐘，20 秒鐘及 30 秒鐘後，此項係數的數量級於表四中。

來分析，也就是先分析 $\frac{\mu x^2 \delta x(\Delta t)^2}{m}$ 項的係數。經過歸納後可以得到下列關係

$$X_n = \bar{X}_n + \delta x + Y_n + Z_n, \quad (12)$$

表四：不同時間下， $\frac{\mu x^2 \delta x(\Delta t)^2}{m}$ 項的係數的數量級

時間 \ X_i	$\frac{\mu x^2 \delta x(\Delta t)^2}{m}$ 係數的數量級
1 秒鐘	4
5 秒鐘	5
10 秒鐘	6
20 秒鐘	6
30 秒鐘	7

觀察 30 秒鐘後， $\frac{\mu x^2 \delta x(\Delta t)^2}{m}$ 項係數的其數量級為 7，而 $\delta x(\Delta t)^2$ 的數量級為

-9，雖然兩部分相乘之後 $\frac{\mu x^2 \delta x (\Delta t)^2}{m}$ 項的數量級是 -2（在這裡，我們暫先設定 $\frac{\mu x^2}{m} = 1$ ），但是已高過於儀器可測量出的 10^{-4} cm （數量級 -4），使得位移差異變成可以觀測得到的。

雖然上述兩個例子是我們選取的特殊範例，分別地單獨考慮位移與動量上的微小差異，嘗試著從範例中表現出在非線性系統上若存在小於最小可量測尺度的微小差異時，會如何被累積成為可量測的差異；而且不論這個差異是來自於位移還是動量，都是會造成蝴蝶效應。當然這樣的範例還可以被列舉出非常地多個，但是我們所選取的這兩個範例已經足以在教學上來展示蝴蝶效應的形成。在兩個範例中的第一類項 Q_n 和 Y_n 是不會造成蝴蝶效應，在本文中我們將此視為已知的常識而未加以證明。當然這個問題的證明可以由對一簡諧運動的解【註三】代入 $(\bar{X}_0 = x, \bar{P}_0 = 0)$

（上承第 57 頁）

的「國中自學方案」本想終結掉升學考試，結果是自身被終結掉了，所以現階段以「優質的考題引導正常的教學」是較可行的途徑，一般而言，已考過的學測自然科考題，水準尚稱良好，筆者不知道出題者選擇本題時是以上述一般參考書解法來判定其難度，或是明知其難度，而就是要出一題決定高手是否達滿分的關鍵考題，但是本題的出現多少會讓國中理化教師增加對繁複計算題的教學份量，而排擠掉對基本概念

和 $(X_0 = x + \delta x, P_0 = 0)$ 兩個起始條件的結果得出來。雖然，蝴蝶效應的存在已是不爭的事實，但是蝴蝶效應存在的證明卻非本文的主旨，本文的重點是在於以代數疊代的技巧展示蝴蝶效應是如何形成的。

【註一】：相空間就是考慮以物體位置和動量來描述物體運動狀態所虛構出來的空間；而一般我們在物理裡所談的歐氏空間是只考慮物體位置的描述。

【註二】：關於如何對二階微分方程式進行差分，可以參閱數值分析相關書籍。

【註三】：即要求第(2)式中 $\mu = 0$ 後所的解

$$x = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)。$$

參考文獻

1. 吳祥興、陳忠等編著，混沌學導論，上海科學技術文獻出版社。（民 85）
2. 劉秉正編著，非線性動力學與混沌基礎，徐氏基金會。（民 87）

強調、練習的機會，畢竟國中基本學測對國中教師的教學有著「風行草偃」的影響力，主事者不可不慎！

參考資料：

1. 國民中學第四冊理化課本 國立編譯館主編
2. 教育部基本學力測驗推動委員會網站 <http://www.bctest.ntnu.edu.tw/>