正負數的概念及其加減運算

林保平
臺北市立師範學院　數資系

摘要

本文首先簡介古代中國相關的正負數使用，然後根據我國及日本正負數的概念及其加減運算相關的課本內容之分析，建立作者認爲九年一貫課程所應包含的能力指標，並提出正負數教學相關的議題加以討論，且針對教學，介紹了可供教師在課堂上使用以協助教學的電腦教學模型程式。

一、前言

九年一貫課程綱要自綱要草案公布至實施，時間倉促，許多教師不只對課程精神不甚瞭解，對課程綱要中的能力指標也不十分清楚；課程綱要對能力指標說明簡略，使用的許多名詞，教師及各個版本課本的編者解讀各有不同，尤其分段實施，沒有循序漸進，各書局編書時，必須同時編二年級、四年級及七年級的課本，雖然審查之要求是需要有整體的規劃，但限於時間，尚未編到的課程所賦予的思考時間自然較少，且由於一綱多本，且分段實施，形成新舊課程或學生轉學銜接上的困難，造成教師、家長、學生各方的疑慮。九二年正式綱要公布，預定九四年實施，在五至九年級其內容順序與原暫行綱要有相當的出入，銜接的問題更形嚴重。

九二綱要的實施的時程已經成爲定局（九四年），但對指標的詮釋或主題教材內容的含意，則有需要建立較一致的基本共識，做爲教師學生的參考，作者參與國科會九年一貫代數領域能力指標詮釋研究計畫，進行「正負數的概念及其加減運算」(NSC 92-2522-S-133-003)相關指標的研究。在研究過程中，我們參閱了日本及我國的課本中與「正負數」相關的資料，如國編版（74）、國編版（83）、康軒版（92）、南一版（92）、翰林版（92）、仁林版（92）、國編版(92 新綱實驗版)、日本東京書籍(平成 14 年)、日本學校圖書（平成 9 年）、日本新興出版社（平成 14 年）。本文將針對國中階段「正負數概念及其運算」教材應涵蓋的內容及議題作分析及討論，先簡介正負數在古代中國的使用，提出作者認爲應涵蓋的能力指標，然後就相關議題作討論，並介紹正負數電腦輔助教學的模型程式。部分實驗資料則係由某國小六年級畢業班學生的實驗教學中獲得（30 人，時間：93/6/4～93/6/11，上課 12 小時）。

二、正負數在古代中國的使用簡介

正負數的使用，在中國很早就有紀錄了，九章算術成書於西元前一世紀至西元後一世紀之間，是我國最古的算術書，在

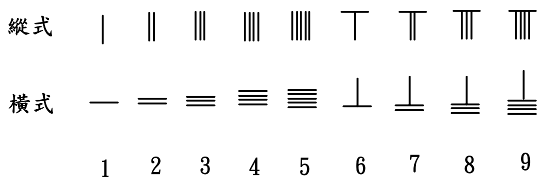
該書中就已經使用正負數的概念，並且完整地描述了正負數的加減法則，九章算術卷八「方程章」第八題說：

> 今有賣牛二、羊五，以買十三豕，有餘錢一千。賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足。賣羊六、豕八，以買牛五，錢不足六百。問牛、羊、豕價各幾何？

它所列的解法：

> 術曰：如方程，置牛二、羊五正、豕十三負，餘錢數正；次置牛三正、羊九負、豕三正；次置牛五負，羊六正、豕八正，不足錢負。以正負術入之。

方程章中的解法是利用用算籌（小竹棒或木棒）表示數，算籌所代表的數如下圖（表示一個數時，從左到右，縱橫相間，如 329 以𝍢𝍪𝍨表示）。



將算籌排列成格式與下方左圖類似的「方程」，透過正負數的運算規則來求解（事實上，就是利用類似矩陣的「行」基本運算的方式將來求解）。

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 2x+5y-13z=1000 \\ 3x-9y+3z=0 \\ -5x+6y+8z=-600 \end{cases}$$

用現代的方程式來看，假設 x, y, z 分別表示牛價、羊價及豕價，則有上方右圖的聯立方程式。九章算數「正負術」術文中明白指出，「賣出」數量用正數表示，「買入」數量用負數表示；「餘錢」用正數，「不足錢」用負數表示。由上面的例子可看出，九章算術已利用正負數來表示有相對意義的數，並使用在方程的各項係數及常數中。劉徽對九章算術作注，說明「正負術」時也指出：「今兩算得失相反，要令正負以名之」，這也說明了在列「方程」時，由於「得」與「失」的意義相反，要用正負來表示，正負數的相對意義明顯可知。劉徽也說：「正算赤，負算黑…」，指出表示正數的算籌為紅色的，表示負數的算籌是黑色的。解方程用算籌相減或相加時，不考慮算籌的顏色，就是只看「數」的絕對值。劉徽注中說：

> …故赤黑相雜足以定上下之程，減益雖殊足以通左右之數…

意即用正負數可以定出「方程」的每一行，而作「行」之間的加減時，左右各行可以互通（若少減多則需負數）。由以上的討論可知，正負數概念固然是建基於意義相反的量，但是其形成原因及必要性，是為了要建立完整的列「方程」及解「方程」之機械性（李，民 81）算法。

九章算術卷八「方程章」第三問題的「術文」上說：

> 正負術曰：同名相除，異名相益，正無入負之，負無入正之；其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。

明確的指出正負數的加減運算規則（參看李、杜，民 81；李，民 81；郭，民 84），其中前半段所述為減法的法則，「同名相除，異名相益」指同號時相減，異號

時相加，相減相加結果的算籌是與被減數或被加數同色的。這正說明同號數相減時，將兩數絕對值相減，取其被減數之符號爲符號；異號數相減時，將兩數絕對值相加，取其被加數的符號爲符號，「**正無入負之，負無入正之**」中的「無入」指「無所對」，整句的意思就是：零減正數爲負數，零減負數爲正數。

後半段所述爲加法的法則，異號數相加時，兩數相減（**異名相除**），同號數相加時，兩數相加（**同名相益**），其符號則與被加數或被減數的符號相同，零加正數爲正數（**正無入正之**），零加負數爲負數（**負無入負之**）。若 $a>b>0$ ，用現代的符號來表示就是：

減法：$(+a)-(+b)=+(a-b)$; $(-a)-(-b)=-(a-b)$;（同名相除）

$(+a)-(-b)=+(a+b)$; $(-a)-(+b)=-(a+b)$;（異名相益）

$0-(+a)=-a$; $0-(-a)=+a$;（正無入負之，負無入正之）

加法：$(+a)+(-b)=+(a-b)$; $(-a)+(+b)=-(a-b)$;（異名相除）

$(+a)+(+b)=+(a+b)$; $(-a)+(-b)=-(a+b)$;（同名相益）

$0+(+a)=+a$; $0+(-a)=-a$;（正無入正之，負無入負之）

正負數的概念及有系統地提出它們的加減運算法則，中國比其他民族超前好幾世紀，印度一直到西元約第七世紀才出現負數的概念，而歐洲則要到西元第十六、十七世紀才對負數有較正確的認識。

三、正負數及其加減運算的能力指標

九年一貫課程暫行綱要及綱要均對正負數及其加減運算列有相關的指標，我們參酌美、日、及我國的新舊教材課本，認爲下述爲正負數及其加減運算教學應達成的指標。

「正負數的概念」相關能力指標

1. 能透過情境中，意義相對的量認識正負數，並能用正負數表徵情境中性質相對的量。
2. 能了解小的數也可以減大的數，其值爲負數。
3. 能透過情境認識正負數可以分別表示位置量與變化量。
4. 能透過數線的形成瞭解數線的三要素原點、單位長、方向。
5. 能透過分割理解整數，小數及分數（有理數）在數線上與點互相對應的關係。
6. 能透過情境及數線理解正負數的大小，並知道比較兩負數的大小，可先比較其相對應的兩正數的大小而後爲之。
7. 能透過位置變化及間隔的數算，認識正負數的有向線段（一維空間向量）表示法。
8. 能分別透過變化量、位置量及數線，瞭解相反數的意義。
9. 能理解一個正負數前面再加上正負符號的意義。
10. 能透過數線，理解一個數絕對值的意義。

「正負數的加減運算」相關能力指標

正負數的加法

1.能透過問題情境，理解正負數加法的意義。

2.能透過性質相反的規定，將情境問題化爲含正負數的加法算式。

3.能透過正負數的相對性質，理解歸納加法的運算規則。

正負數的減法

1.能透過比較型問題、合併型問題之算式填充題，瞭解正負數減法的意義。

2.能透過性質相反的規定，將情境問題化爲含正負數的減法算式。

3.能透過正負數的相對性質，理解歸納減法的運算規則。

4.能理解正負數中，大的數減小的數必爲正數，小的數減大的數必爲負數；反之，若兩數相減爲正數，則第一個數較大，若兩數相減爲負數，則第一個數較小。

5.能夠理解加減運算的一致性，理解減法可看成加法，瞭解減去一個數就是加上它的相反數。

6.能理解 a-b 與 b-a 的數值結果互爲相反數。

7.能透過數線理解兩數差的絕對值的幾何意義。

正負數的加減混合運算

1.理解正負數加法的交換律、結合律，並能利用在簡化運算上。

2.能將正負數的加、減混合運算化成加法，再進行運算。

3.理解正負數加、減混合運算也可透過去括號，然後將要加的數及要減的數分別加起來，兩者再相減。

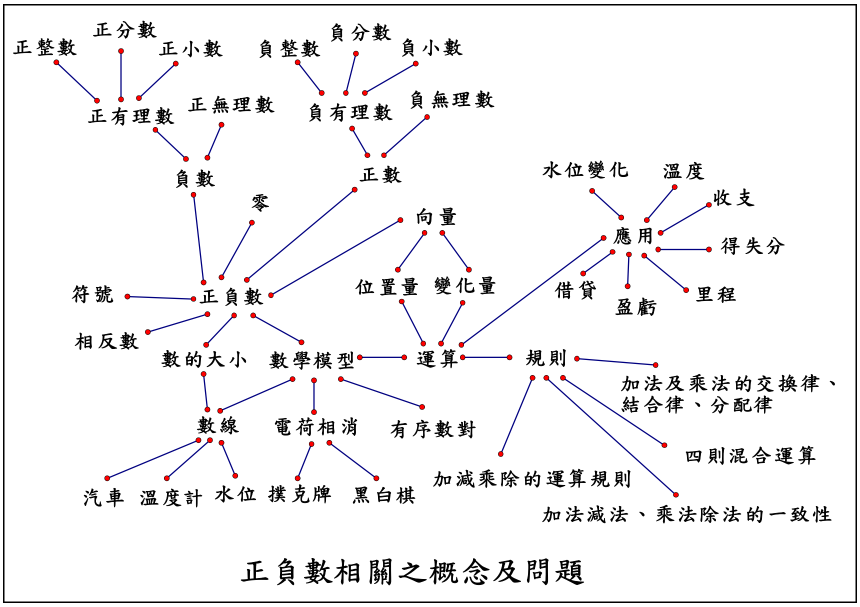
四、正負數在教學中的主要內容與問題

負數不像正數，可以透過數算實物理解其意義，它牽涉到意義相對的量，負數的學習對學生而言是一種新的嘗試，由天氣預報表或溫度計中或許可以看到負號的出現，但對負數的意義，負數的加減運算，學生需要調適由自然數擴充到含負整數、負分數、負小數等更大範圍的數的學習。圖一列出了正負數概念及相關運算間的關係，我們將就相關議題提出討論。

課本編輯

在課本編輯上，我國至八二年以來，逐漸形成教法融入教材的編輯方式，也就是說，在課本中也陳列編者希望教師教學中能夠進行協助學生「思考」以「形成」或「建立」知識的教學歷程，供教師參考採用（當然，所提供的題材是否有效或合理，是需要檢驗的）。對於經驗豐富的教師來說，也許「多餘」，因爲這類教師對各類教材，也許自己已經建立了優良的「教學」方式，參考的必要性不大。但是對於經驗較差的教師而言，這是有相當幫助的，此外，若學生自行閱讀課本，引導啓發思考或說理式的內容，也應有幫助。國編本（92 實驗教材）可能採用「教材」與「教學方法」分列的方式，在課本中，只見數學內

容的描述，少見圖形及引導思考的內容，我們建議課本呈現應適度的「引導」及「探索」，提供學生思考的機會。



圖一　與正負數有關的概念及問題

負數的引入及使用

負號的引入，其實有兩個方向。一為直接呈現符號，然後探討其意義；另一為透過減法不足的情境（小的數減大的數），引入負號紀錄的的需要性，擴充數的範圍。在負號的介紹單元，大部分課本均以呈現正負溫度的各地氣溫預報表來引入負號，並用零上及零下來引入相對意義的量，協助學生理解可用正負號來表示具有相對意義的兩個量。其實，小的數可以減大的數，正是小學「減法」意義的擴充，數的範圍擴大。事實上，很多牽涉意義相對的量的簡單問題，並不一定要用正負數的概念才可以處理，日常生活中正負數的使用也不多，例如，商店十月份「度小月」，收入 63450 元，支出 83450 元，若以正負數處理，應以（＋63450）＋（-83450）算出得負數表示賠錢，但一般均以大小比較後，知其賠錢，再以大數減小數 83450 - 63450 處理，知其所賠之數量。也就是說，在算術中，「甲 - 乙」的數字算式記錄對學生而言，只有當甲大於乙時，才會出現，若乙大於甲，則算式記為「乙-甲」；但在代數的學習中，算式「a - b」不管 a， b 何者為大都可以出現，是兩數比較大小時，統一的表現方式。教學時，除了前者引入的方式外，後者的意義應有考量，協助學生建立比較大小的統一呈現方式，擴大數的範圍，並能由 a － b 之結果為正數或負數來看 a，b 何者為大。

對於小的數減大的數，在 30 個小學六年級的學生（未正式學過正負數）中，

對下兩題（1）28-72（2）5-8-2＋40 算式，詢問是否可以算，每題均只有 13%的學生認爲不能算，認爲能算的學生在（1）中只有 19%學生算錯，可見小的數減大的數對學生而言並非不易接受，學生的經驗中多少有經歷負號（可能是小學或安親班中，教師附帶的討論），（2）的問題在認爲可作的學生中有 35%的學生作錯。

以相對意義來看，可用的正負數教學實例很多，氣溫、溫度計、高度（海平面）、東西方向、水位變化、時間先後、賺賠、收支、撲克牌紅黑點（或黑白棋）、…等。但在建立負數之後，有時會引入一些與日常生活中使用數的不同習慣。通常較「中性」的名詞描述，比較合於習慣，例如，「水位變化 -5 公分」相對於「水位下降 5 公分」，「走 -5 公里」的相對於「向西走 5 公里」（或向西），「走」及「變化」本身因不牽涉方向性，較不易產生誤解，但如用「甲- 乙」比較甲乙的大小得到-3，說成甲比乙大-3 （明明甲比較小）、因「獲利＝收入-支出」，而得到獲利-5000 元的描述（明明沒有獲利），對初學者比較容易造成誤解。

在課堂上並無討論過類似內容情況下，我們給 30 名參與實驗教學且學完「正負數及其加減運算」的小學六年級學生下列問題：

「若甲說他賺了 2000 元，乙說他賺了－2000 元，丙說他賠了 3000 元，丁說他賠了－3000 元，請將甲乙丙丁按照賺錢的多寡順序依序排列出來。」

結果有 47%的學生完全答對，53%答錯的學生，均將丁視爲獲利最差，顯示學生沒有理解「賠了-3000 元」的意義。但對甲乙之順序學生則全無問題，有 27%的學生似乎只按照數的大小來比較，並未同時考慮數字之前賺賠的描述。大部分的課本均未提出類似問題與學生討論，這是較抽象的邏輯思考的問題，觀察答對的百分比，我們建議在課堂上討論這種問題，不止因其與 -(-3000)=3000 有關，且這是正負數抽象推理的使用，我們認爲教學上應予討論（雖然日常生活中並無這種說法）。事實上在學生剛學完相反數及其應用時，學生對直接列出如 $-(-13.4)$，$-(-2\frac{1}{2})$ 的問題，雖約有 84%的學生答對，有些學生可能只是記憶規則而已，並未瞭解其根本意義。對更多重的正負號問題，則不要從情境出發。

正負數的向量意義、變化量、位置量

前曾說過，正負數不只描述「純」量，它還描述量的相對意義。事實上，正負數可看成一維的向量（以有向線段的方式描述），除了數值，它還描述了方向（只有兩個方向），事實上，在後面我們所要討論的正負數加減運算，用數線模型來處理，其實就是向量在一維空間的加減法。在數線上，以坐標的觀點來看，一個正數或負數就是數線上的一個點，反之，數線上的一

個點也可以對應到一個正數或負數（或零），此時，數呈現的是它在數線上的位置，我們使用數線討論正負數時，也牽涉了另一個量的描述 —「變化量」，前述的點，我們以「位置量」來稱呼，因此，正負數及其運算的討論，就牽涉到兩種量。溫度下降 5 度，與溫度零下 5 度，都用-5 度來表示但其意義並不相同，前者描述水銀最高點在刻度上的變化，後者說明水銀最高點在溫度計的位置。在教學之時，若只專注在正負數的運算規則的演示與練習，自不成問題，若想透過情境，協助學生理解，這兩類量均應有其呈現時機，變化量與變化量的運算得到的是變化量，透過比較刻度，我們也可以探討變化量，變化量的向量描述可以是以任意點爲起點的有向線段，位置量以向量描述時，其有向線段的起點一定是原點。

用有向線段描述正負數時，國內許多課本沿用 83 年國編版,在有向線段上方標示變化量時，均不加上正負號，只是標示該線段的長度，事實上，若從向量的意義及符號表示法的獨立性來看，有向線段上標示的應是變化量,而非變化量的絕對值。

量的可加性

量的可加性問題，並非因其具有可化成相同的單位之性質，例如昨日台北氣溫 28 度，高雄氣溫 30 度，此時溫度相加就無意義（位置量，不可加），但溫度相減就有意義（位置量，比較），但並非溫度就無法相加，例如昨日台北氣溫升高了 3 度，今日又升高了 2 度，此時這兩個溫度相加，就有意義（變化量的和）。因此量的可加性其實是指出「加」的意義，例如長度量的加法意義，是因爲要量兩個已知長度的線段合起來有多長，可將兩線段排成一直線再量出其總長度，但也可將這兩個線段的長度加起來（不必量）而知其長度，這就是長度量可加性的意義，其實這在數學正式定義兩點間的距離時，特別定義兩距離相加的意義是一樣的（設 A，B，C 三點共線，若 B 在 A、C 之間，則 AB＋BC＝AC）。

運算符號與性質符號

「＋」及「－」其實既是「運算」符號，也是「性質」符號。Nicole d' Oresme (1323-1382)可能在他所寫的書 *Algorismus proportionum* （出書於 1356 至 1361 間）中，使用 ”+” 來表示 et （拉丁文的 and）。根據 Cajori(1928)之描述，「＋」號及「－」號的使用，也出現於西元 1417 年的某些手寫稿上，其真正列印則是 Johannes Widmann 在 1489 所寫的書本上，但它們所代表的意義並非「加減」，而是表示交易行爲中的「過剩」與「不足」。Smith(1925)認爲 Henricus Grammateus 可能在 1526 年首先將「＋」及「－」，當作運算符號，使用於代數式中，「＋」號其實是拉丁字「*et*」(and)的簡寫。當用爲過剩與不足（表示正或負）時，它其實就是一種性質符號，表示數的性質。

在一個算式中，表示性質的符號，爲

了與性質符號區分出來，我國及日本的課本，通常常用小括號將它與數字括在一起，以有別於運算符號，但英美的課本或課程綱要，有許多不使用括號，但使用較小的「負號」，直接寫在數字的左下方或左上方，例如 5+- 4 +8 +-10 +-7 。這兩種方法，以後者較爲自然，在我們的教學實驗前測中，學生尚未學習使用括號之前，對於有零下（使用負號）的氣溫相差幾度的問題，在列出的運算式中，30 人中約有一半（53%）的學生會使用負號，但沒有學生使用括號區分運算符號及負號。在學生學習過程中，教師並未強調括號的寫法，只是在列式時，直接使用。在後測中，相同的題目用負號的算式列式的約有 87%，其中只有 8%的學生沒有使用括號。我們認爲學生尚未學習時，不使用括號十分自然，但使用括號，並不是很不易接受的事，因此教學中，使用括號對學生應不會有問題，但學生初學時，教師對偶而沒有括號的算式紀錄應予接受，中文並不會像英文一樣，因讀音(如 minus 既可解釋爲「減」，又可解釋爲「負」)的兩種意義而使學生混淆。

對於正號的使用時機，有些書本，一開始就說明正號可省略，此後，所有的正號均不出現，但有些書本，在運算列式時，會因強調其表示意義相反的量而繼續使用，然後逐漸省略，我們建議教師應看情形，使用正號逐漸省略的方式，以協助學生瞭解運算及運算規則。

數線及數的大小

國小數的比較大小，通常透過實物的數算，記錄數量後，再透過量的「包含關係」(部分與全體)、「數算的次序關係」(先小後大)，或「量的比較關係」(一對一對應)，討論量的多少，由此再引入自然數的大小，分數或小數則透過量的分割與比較，討論其大小。但是負數不是「純」量的描述，它包含了相對於其相應正數的反向意義，因此，其大小比較無法以「純」量的數算、比較、或分割來看大小，通常使用模型對照的方式作教學，例如透過溫度計刻度，討論溫度的高低冷熱，定出相應數的大小，然後對照數線討論正負數的大小。學生甚至教師，常不經意地用「負數愈大，它的值愈小」替代本應是「負數的絕對值愈大，該負數愈小」的說法。透過數線模型，以「數線上兩數，左邊的數比右邊的數小」爲基礎，學生在比較或描述時，較不會出錯，不看數線比較兩負數的大小時，則應透過對照其相對應的兩正數的大小（即兩數的絕對值）爲之，並熟知這種比較方法。

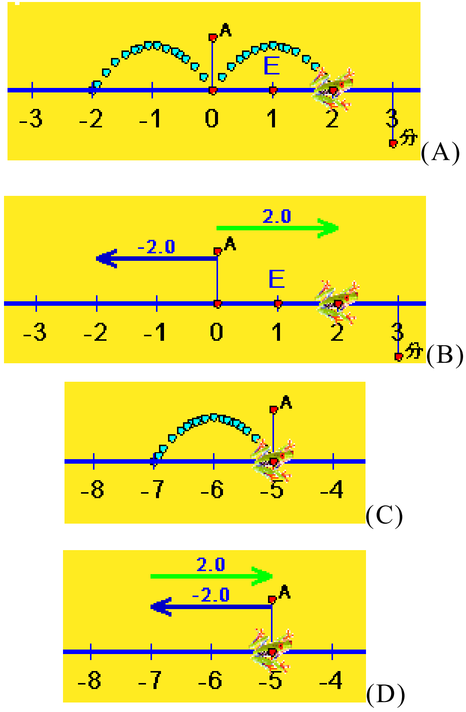
時間軸數線的迷失

許多課本會補充甚至正式加入時間軸（例如歷史上數學家的出生年代）作爲數線應用的實例。在我們編書及與教師的討論的過程中發現，許多老師及學生會認爲西元的時間軸不是數線，他們認爲西元的時間軸上應該沒有 0，因爲沒有西元零年，認爲將西元時間軸作爲數線的使用實

例是錯的。這是因為不瞭解時間軸標示的意義，將數軸上的刻度與間距弄混了。當我們說西元 768 年的時候，西元 768 年表示的是時間的間距，是指西元 768 年 1 月 1 日開始的那一刻至西元 768 年 12 月 31 日結束的那一刻，將 768 標在數線上，應是標示西元 768 年結束的那一刻，但 1 年的間距實在太小了（相對於數千年的歷史），將數線上標為 768 的刻度表示為西元 768 年乃是權宜正常之事，瞭解標示的意義之後，就不會誤解歷史的時間軸不是數線了。

相反數與絕對值

相反數的討論透過數線有兩個處理方式，一為透過原點，以與原點的距離相同的兩點，所表示的數為相反數（位置量）；另一為以任意點以相反的方向各自行進相同的距離，以正負數表示行進的兩數為相反數（變化量），以有向線段表示時，是起點相同長度相同，但方向相反的向量，但也可以透過由任意點移動至另一點，再回到原來之點的兩個變化量（互相還原的兩變化量），用有向線段符號表示，可以表為並列或重疊的兩個箭頭記號。後者的變化量意義，大部分課本均沒有討論，我們認為在討論正負數有向線段表示法的時候，這種意義學生應該有所理解（圖二）。



圖二　(A)、(B)二圖為由 O 點分別跳至 2 及-2 的距離及有向線段表示；(C)、(D)二圖為由非原點向左再向右跳二格的距離及有向線段表示，有還原的意思

絕對值名詞的使用，在國中正負數教學中，基本上只是為了方便以文字描述同號數加法運算的運算規則，或描述兩點間距離的運算規則，在數的絕對值上學生並不會有太大問題，但若牽涉到代表數的文字符號的絕對值意義，對學生比較困難，代表數的文字符號絕對值的意義，應在代數相關單元討論，在正負數及其運算單元，最多只有如兩點的距離公式 $|a-b|$ 的數值代入問題。

正負數的表示法，學生在學過相反數及絕對值後，仍常將相對意義放在第一優

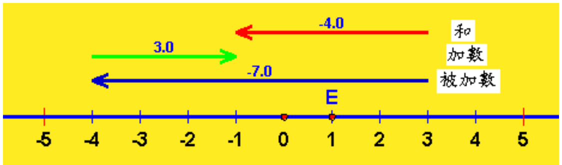
先，例如，下列問題

「一天 24 小時，中午 12 點記為 0 點，下午 7 點記為 +7 點，那麼上午 7 點應記為＿＿＿＿＿點。」

就約有 74%的學生直覺地回答 -7，沒有就情境作仔細的考量。

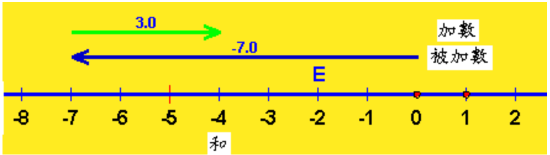
正負數的加減運算

正負數加減法運算的教學，通常有兩種模式，一爲**數線模式（或溫度計模式）**，另一爲**正負電荷相消模式**（Duncan & Saunders 1980，Bennett & Musser 1981，Thompson 1988）。數線模式是將「被加數」、「加數」及「和」，分別用有向線段，在數線的上方予以圖示，這種加法，其實就是一維空間的向量加法。例如 $(-30)+(+12)=-18$，如圖三所示。



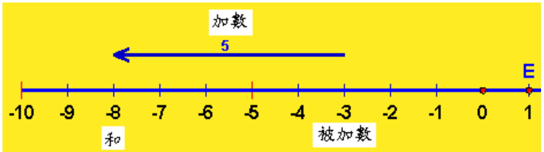
圖三　以三個有向線段分別表示被加數、加數及和的加法圖示

這種表示法將實數看成一維的向量，因此，表示被加數的有向線段的起點不必定在原點上，對非整數的運算，也同樣適用。這種表示法的缺點是：不易有效地解釋減法運算，減法必須建立在「加法的反運算」上；至於減法的向量圖示，則是以加上相反數來呈現。我國自 83 年國編版開始，大部分課本採用的方式是將被加數有向線段的起點定在原點，不顯示「和」的有向線段，此時，在表示加數有向線段的終點位置的坐標，即爲「和」如圖四所示。



圖四　以兩個有向線段及一個位置量呈現 (-7) + 3 = -4 的加法圖示

92 新綱國編本實驗教材，對加法及減法採用日本新興出版社啓林館（平成 14 年）之方式，作更大的簡化。兩數相加時先找到被加數所在的位置，畫出表示加數（變化量）的有向線段，再找出有向線段的箭頭端點所對應的位置量，以此量爲其和，如圖五所示。



圖五　以一個有向線段及兩個位置量呈現 (-3)+（-5）= -8 的加法圖示

這樣的表示法，雖然圖示較簡單，但它只是獲得答案的技巧，在沒有數線、或沒有刻度或起點不在原點時，學生將無法處理問題。而且以模型來教學，最大目的就是透過模型的呈現，引導學生發現或理解加法的計算原理，建立「同號數相加」、「異號數相加」的規則，過度簡化的模型，無法達成此目標。我們建議若要以有向線段圖示來呈現含變化量的加法時（目的在解釋或建立加法或減法的規則），則應考慮

將三量均以有向線段呈現，這也合於向量加減法圖示時「頭尾相接」及減法時「反向」的原則。但若情境的量本就是刻度量，例如溫度的差，則以單一有向線段來描述其刻度的間距，自無不可，但如何協助學生建立運算規則，就需另謀他策。

有些研究者質疑數線模式或溫度計模式對學生整數的運算的協助不大，如 Kohn (1978)， Human & Murry (1987)。他們認為學生在計算時，很少想到溫度計或數線。事實上，學生若已經熟練加法運算規則，已經不需要模型的協助，自然不必再想到它們了。若從協助學生理解加減法的運算規則來看，數線模式應有其某種程度的助益才對（例如以水位升降來討論加法的運算規則)，如果教學目標只是要學生會計算，「告知規則」並「多做練習」即可。

電荷相消模式與我國古代的紅黑算籌表示法類似，首先假設，相同數量但正負相反的電荷合在一起時，可以互相抵消而予以忽略（因為它們的和是零）。所以作數的「合成」或「分解」時，都可以隨時加入或取出數量相等但正負相反的電荷。在這種模式之下，加法可看成兩組電荷的合成，而減法則看成一組電荷的分解（從一組電荷中取走若干電荷）。這種合成及分解的說明方式與學生基本的「加減」概念相符合，加法的原型就是「合併型」(或「添加型」)，減法的原型就是「拿走型」，這是這個模式的優點，但本模式對非整數的處理，不易透過操作進行處理，使用這種方式處理的課本，通常以宣告的方式將運算規則用到非整數的運算，但在數線模式的處理時，非整數仍然適用。

以電荷相消模式作運算時，數的正負號表示一組電荷的性質，其絕對值表示該種電荷的數量。計算 (-3) + (+9) 時，想成有 3 個負電荷，添加 9 個正電荷，合在一起結果是多少。兩組電荷合併後將抵銷的 3 正電荷 3 負電荷移開，所餘 6 個正電荷即表示 +6。嚴格地將過程列成算式可以寫成

$$
\begin{aligned}
&(+3)+(-9)\\
&= (+3)+[(-3)+(-6)]\\
&= [(+3)+(-3)]+(-6) = -6.
\end{aligned}
$$

計算 (-2) - (-8) 時，想成原有 2 個負電荷，要拿走 8 個負電荷，由於不夠拿，所以先補入 6 個負電荷及 6 個正電荷（因為可任意加入或取出同數量但性質不同的電荷)，再取走（減去）8 個負電荷，所餘的 6 個正電荷表示 +6。嚴格地將過程列式可以寫成

$$
\begin{aligned}
&(-2)-(-8)\\
&= (-2)+[(-6)+(+6)]-(-8)\\
&= \{[(-2)+(-6)]+(+6)\}-(-8)\\
&= [(-8)+(+6)]-(-8)\\
&= +6.
\end{aligned}
$$

前面所述嚴格的列式，在教學時透過電荷操作，可以很清楚的認知，若純以列式討論，就過於抽象，學生容易造成困擾，若以這種模式教學，我們建議不必作嚴格的列式，透過操作引導學生發現運算規則即可。

我國古代算籌的正負數算法使用顏

色來表示正負，取其相對的意義，但「籌算」是用算籌列出十進位數值表示法的數，運算時所牽涉的是直接的「數」的加減法，但電荷相消法是以電荷（或標示出正負號之實物或紅黑色色球）之「個數」來表示該數的絕對值，沒有用數的符號表示法，所牽涉的是「量」的「合成與分解」之直接數算，就操作活動來說，較為簡單，但對非整數情境的處理，不易透過操作進行說明。九年一貫課程，至少有兩個版本（92 年版）是使用電荷相消模式來討論正負數的運算(黑白棋、及紅綠魔豆)，很少有課本同時採用兩種模式處理正負數的加減運算。在我們分析的課本中，使用數線模式情境有水位升降、溫度、海拔（等高線）、汽車行進；使用電荷相消的情境有黑白子、紅綠魔豆、撲克牌、黃紅積木。

加法運算規則

許多課本，在正負數的運算教學中，看不出有引導學生透過情境列出含正負數的加法或減法算式的過程。計算時也直接教導運算規則，看不出引導運算規則建立的過程。我們認為對如何依規定列出含正負數的算式應是學習負數的必要活動，引導學生理解及建立運算規則更是重要。加法的運算規則如下：

同號數相加時，將兩數的絕對值相加，再加上兩數的共同符號。

異號數相加時，將兩數絕對值相減（大的減小的），再加上絕對值較大數的符號。

對於加法，我們建議教學使用下列歷程，引導學生歸納出運算規則：

1.透過情境，將有相對意義的量，分別表示為正負數。

2.依照情境將正負數列出算式。

3.透過情境分別決定結果的「方向性」及「數大小」(此處「方向性」指結果應有的符號，「數大小」指結果的絕對值)，並用國小算術（不用正負符號）列算式說明如何算出「數大小」(「兩數的絕對值相加」或「兩數絕對值之差，大的減小的」)。

4.將「數大小」及「方向性」以正負數表示。

5.將 2、3、4 的結果，用等式表示，討論等式的含意。

6.透過 1-5 的過程，協助學生歸納並建立正負數加法的運算規則，瞭解規則中同號、異號、絕對值描述的含意。

下兩例就是利用上述過程模式發展的引導討論教學的問題。

例 1、水庫第一次水位上升 15 公分，第二次水位下降 25 公分，問兩次水位合起來水位上升或下降幾公分。回答下列問題。

1.第一次水位變化是_____公分(用正負數表示)

A： +15

第二次水位變化是_____公分(用正負數表示)

A：-25

2.兩次水位變化合起來用算式怎麼記？

A：(+15)+(-25)

3.兩次水位變化合起來是上升或下降。為什麼？

A：下降，因為下降比較多

上升或下降多少？______公分

A：下降 10 公分

下降多少是怎麼算的？

A：25-15 公分

4.兩次水位變化合起來是______公分（用正負數表示）

A：-5

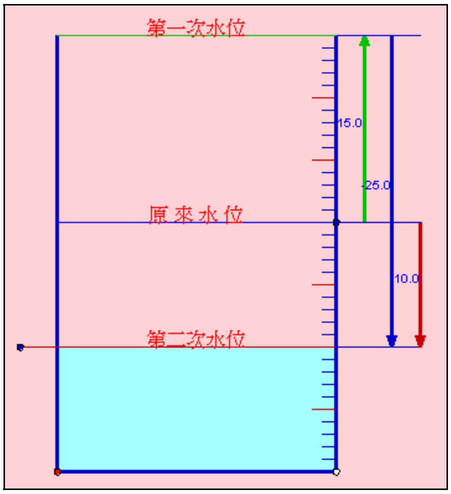
5.將 2、3、4 的結果合起來可記為

______ = - (______)= ______

A：(+15)+(-25) = -(25 － 15) = -10

6.解釋在 5 的答案中，各項表示什麼。

利用水位圖形情境，可十分容易引入有向線段的加法圖示（圖六），透過有向線段的起點終點，兩向量的和是向量的頭尾相接等觀察，學生對正負數的加法，可有一個具體的形象，這對以算式填充題引入的減法運算有幫助。



圖六　透過水位變化引入有向線段加法圖示

例 2、用一個紅球代表+1 分，一黑球代表-1 分，一個紅球與一個黑球可互相抵銷，透過操作討論下列問題：25 個黑球，13 個紅球，合在一起，得分是多少。

1.25 個黑球分數是______分（用正負數表示）

A： -25 分

13 個紅球分數是______分（用正負數表示）

A： +13 分

2.兩種球合在一起用算式可記為

______＋ ______。

A：(-25)+(+13)

3.紅黑抵銷後，剩下的是紅球或黑球？何故？

A：黑球，黑球多

它的個數是怎樣算的？ ______- ______

A：25 - 13

4.所以兩種球合在一起，結果是______分（用正負數表示）

A：-12

5.將 2、3、4 兩項的結果合起來可記為

______ = - (______)=______

A：(-25)+(+13) = -(25 － 13) = -12

6.解釋在 5 的答案中，各項表示什麼。

（未完待續）