

小數的教學活動

劉曼麗* 侯淑芬**

*國立屏東師範學院 數理教育研究所

**高雄市立十全國民小學

壹、前言

九年一貫數學領域課程綱要中指出，學生應在小學畢業前熟練小數與分數的四則運算（教育部，2003），可見小數的學習對國小學生的重要性。然而，從「學生的小數概念」（劉曼麗，2005）一文中發現，學生在小數方面的學習並不理想，且存有許多的錯誤或迷思概念。有鑑於此，教師必需清楚了解小數與整數和分數的關係，以及在此兩者的影響下學生可能產生的迷思概念，以便在教學時能正確地引導學生理解小數。針對「學生的小數概念」一文中所提到的錯誤或迷思概念，在小數教學方面，本文提出一些看法。就小數意義的教學而言，教師應強調小數等分的內涵、小數的單位量概念、小數點的功用以及培養學生對小數大小的感覺。就小數計算的教學而言，教師應要強調大小單位間的換算關係及在直式紀錄中小數點定位的意義與理由。基於篇幅，本文僅以一位純小數、一位帶小數和小數加減來說明如何將上述理念落實在小數教學中。

貳、小數的教學活動

一、一位純小數的教學

1. 教師可提供多元情境幫助學生建立一位

純小數十等分的內涵，並以非十等分的圖形對照來凸顯十等分的必要性

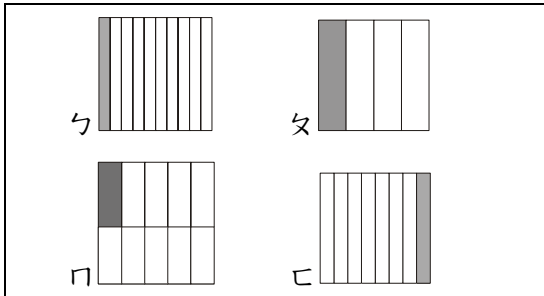
在引入純小數概念時，教師應提供學生不同的具體情境，讓學生有豐富的經驗將小數符號抽象化。情境可以很多元，包括連續量，如線段、披薩和杯水等；以及離散量，如一包糖果、一條串珠（內含 10 顆等）等。在此要特別強調的是，教師在呈現這些圖形時，一定要讓學生「明確數出十等分」，否則我們一再強調 $0.1 = \frac{1}{10}$ ，但學生注意到的可能還是塗顏色或做記號的那 1 份，而忽略了單位量是否被等分成 10 份。此外，教師還可同時呈現十等分與非十等分的圖形（如教學示例 1），以凸顯十等分的必要性。

教學示例 1：凸顯十等分的必要性

***教學重點：**教師在黑板上展示數張等分的圖（含非十等分者，見下方），請學生選出有顏色部分表示 0.1 張紙的圖，以凸顯十等分的必要性。

【布題】：這是一張紙：





*** 教學流程與關鍵問話：**

1. 先強調單位量為一張紙，再讓學生將答案寫在白板上。T：這是一張紙！請選出有顏色的部分為 0.1 張紙的圖。可以複選喔！
2. 先請選擇 ㄅ 與 ㄊ 的學生發表想法，再請答題正確的學生發表想法。
3. 總結說明解題正確學生之想法，並帶領學生實際數出每一張圖等分成幾份，以及有顏色部分所佔的份數，再次澄清 0.1 張紙就是 $\frac{1}{10}$ 張紙， $\frac{1}{4}$ 張紙或 $\frac{1}{8}$ 張紙（非十等分）並不能表示為 0.1 張紙。

2. 教師可呈現十個大單位且每個大單位內含十個小單位的情境迫使學生能區別被十等分的單位量為十個大單位還是一個大單位

一般教科書中均只提供學生一個已等分好十片的披薩圖或一串 10 顆的彩珠，請學生塗出 0.4 個披薩或 0.3 串彩珠。在這樣的布題之下，學生即使不清楚 0.4 的意義，也能因多次練習而知道 0.4 個披薩就是要塗 4 片；0.3 串就是塗 3 顆。因此教師在呈現圖片或具體物時，應提供十個大單位且每個大單位內含十個小單位的

情境，例如，一次提供學生十串彩珠而每串皆有 10 顆彩珠（如教學示例 2），以刺激學生思考到底要標示出 3 串彩珠還是 3 顆彩珠。

教學示例 2：區辨小數的單位量

*** 教學重點：**教師以 10 串彩珠而每串各有

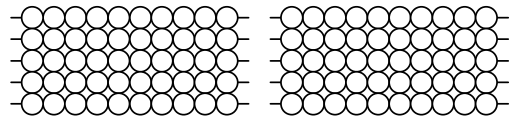
10 顆彩珠的情境，請學生塗出 3 串和 0.3 串彩珠，迫使學生思考 0.3 串中，被十等分的單位量是十串彩珠還是 1 串彩珠。

【學習單】：

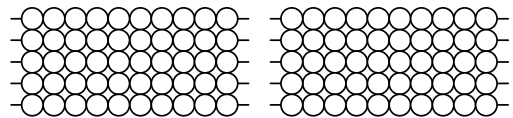
—○○○○○○○○○○—表示一串彩珠，

請回答下面問題。

1. 小萍將她的彩珠排列如下，其中有 3 串是紅色的，請將紅色的彩珠塗上顏色：



2. 小誠有下圖這麼多串彩珠，其中有 0.3 串是藍色的，請將藍色的彩珠塗上顏色：



*** 教學流程與關鍵問話：**

1. 先要求學生塗出 3 串彩珠。教師進行行間巡視，檢查學生是否有塗 3 顆彩珠的情況，並請學生發表想法，進行全班討論。
T：有人塗 3 顆彩珠，你們覺得對嗎？
2. 藉由 3 串與 1 串數量的比較，澄清 3 串彩珠的數量大小。

T：3 串有沒有超過 1 串？3 串是幾個 1 串呢？

3. 要求學生塗出 0.3 串彩珠，並與學生討論 0.3 串與 3 串的差異。
4. 與學生一同數出一串彩珠的數量，並藉由小數與分數的連結，引導學生塗出 0.3 串彩珠。

3. 教師可利用拉鍊讓學生表徵出一位純小數的數量來培養學生對一位純小數的量的感

從「學生的小數概念」一文中可發現，學生對於小數量感的貧乏，使其選擇了錯誤的答案而不自知。為培養學生的小數量感，教師可以拉鍊替代線或繩子等一維連續量情境來進行教學（如教學示例 3）。透過動態的拉拉鍊活動，學生可從拉鍊長度的變化感受小數的大小。這樣的教學活動不但可引導學生掌握小數的意義，也有利於學生小數量感的培養。

教學示例 3：培養小數量感

***教學重點：**教師發給每組學生一條拉鍊（長 10 公分），請其做出 0.1 條拉鍊、0.2 條拉鍊、0.3 條拉鍊...0.9 條拉鍊，並將之與 1 條拉鍊的長做比較。

【拉鍊圖】：



*教學流程與關鍵問話：

1. 說明單位量為拉鍊塗紅色處，並在學生動手前，先討論做法。

T：這是一條拉鍊，塗紅色的地方代表 1 條拉鍊的長。整個拉開後，我們說是 0 條拉鍊。

T：想想看，我們怎麼做出 0.1 條拉鍊？誰要說說看！

2. 總結學生想法，並引導學生將小數與分數做連結。

T：0.1 條拉鍊很難感覺它有多少，這個時候要把 0.1 換成什麼？幾分之幾？因為 0.1 條就是把這一條分成 10 份取 1 份，就是 0.1 條了。

3. 各組動手做出 0.1 條拉鍊，並在拉鍊上標記「0.1」。

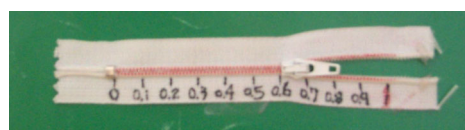
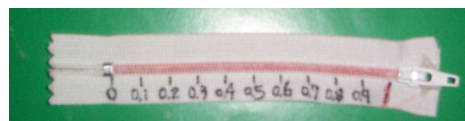
4. 總結各組做法，引導學生實際數出十等分，並強調 0.1 的意義。

5. 引導學生比較 1 條拉鍊與 0.1 條拉鍊的大小。

T：比較看看，這是 1 條拉鍊，那 0.1 條拉鍊只有到這裡喔！

6. 重複 1.~5.，請學生做出 0.2 條拉鍊、0.3 條拉鍊、0.4 條拉鍊...、0.8 條拉鍊、0.9 條拉鍊，並分別與 1 條拉鍊的長做比較。

【學生作品示例】：



值得一提的是，教師在呈現純小數圖形表徵時，可先讓學生以分數符號來記錄數量，或在學生以小數符號記錄後提問：「如果用分數表示會是多少呢？」，透過反覆強調圖形表徵、分數符號與小數符號三者間的連結應可加強學生對小數意義的了解。



二、一位帶小數的教學

1. 教師可透過圖形表徵的例子強調小數點分隔整數與非整數部分的功用，讓學生明顯感受小數點兩邊所代表的數量大小與大小單位間的關係。

從「學生的小數概念」一文中可以發現，學生在選擇表徵帶小數符號的圖形時，會將小數點左右兩邊的數視為兩個獨立的整數來處理，或將 $a.b$ 視為 a 等分中的 b 等分；在進行小數加減直式計算時，則會和整數加減直式計算一樣，將被加（減）數和加（減）數向右對齊來計算。這些結果顯示，學生不清楚小數點分隔整數與非整數部分的功用，也不清楚小數點兩邊數量的大小以及大小單位間的關係。因此，教師在呈現帶小數圖形表徵時應強調小數點的功用，並讓學生明顯感受小數點兩邊所代表的數量大小和大小單位之間的關係（見教學示例 4），而此點正是一般教科書所忽略之處。

教學示例 4：強調小數點的功用與其兩邊數量大小和大小單位間的關係

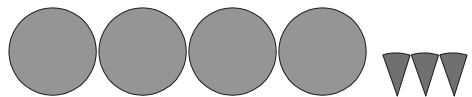
*** 教學重點：**教師與學生討論 4.3 個披薩的圖形表徵中，小數點兩邊的數所表示的披薩大小，並強調小數點有分隔「披薩的個數」與「不到一個披薩的個數」之功能。此外，提問

一片披薩  和一個披薩  的關係，以強調大小單位間的關係。

*** 教學流程與關鍵問話：**

1. 在學生自行利用披薩圖片表徵出 4.3 個披薩後，請學生指出小數點兩邊的數所對應的圖片。

【學生解法】：





T：從小朋友排出的圖形中，哪個部分是表示 4.3 個披薩中的 4？哪個部分是表示 4.3 個披薩中的 3？

2. 配合圖形表徵強調小數點的功用

T：小數點是用來指揮交通的！代表幾個 1 的部分就記在它的左邊！像剛剛有 4 個披薩所以「4」要記在「·」的左邊。代表不到 1 的部分，就記在它的右邊。像剛剛 3 片披薩還不到 1 個披薩，所以「3」要記在「·」的右邊！小數點是有功用的喔！

3. 提問一片披薩與一個披薩間的關係。

T：一片披薩  與一個披薩  有什麼關係呢？

2. 教師可利用尚未等分的具體物，讓學生實際動手做小數，用以凸顯十等分的必要性與小數點兩邊的數所表示的數量大小；亦可讓學生疊合與對照做好的具體物與單位量的大小以培養其小數量感。

一般教科書在做小數的教學活動設計上，均給予學生十等分好的具體物，讓學生根據指定的小數數量塗上顏色。為凸顯十等分的必要性與小數點兩邊的數所表示的數量大小，我們建議教師應給予學生尚未十等分好的具體物，讓學生實際將具體物十等分後，再做出小數（如教學示例 5）。在操作的過程中，學生會遭遇到不易將具體物十等分的困難，而教師便可趁此提問：「10 等分不好做，那分成 8 等分，取其中的 6 份也可以說是 0.6 嗎？」以凸顯十等分的必要性！再者，學生必需相當清楚小數點兩邊的數所表示的數量大小，才能選取正確的單位量並做出小數。最後，教師可讓學生將做好的具體物與單位量相疊合與對照，使其能實際地感受小數所表示的數量大小，藉以培養小數量感。

教學示例 5：凸顯十等分的必要性與小數點兩邊的數所表數量的大小，並培養小數量感

*** 教學重點：**教師發給每生 10 張長 5 公分，寬 2 公分的紙(便利學生透過測量將紙十等分)，請學生分別剪出 0.6 張紙和 1.6 張紙。在實作與討論的過程中，強調小數十等分的內涵，並與 1 張紙疊合比較以培養學生的量感。

*** 教學流程與關鍵問話：**

1. 先強調單位量 1 為 1 張紙，再請學生將 0.6 張紙塗上顏色。

T：這是一張的紙！請做出 0.6 張紙！說說看你想怎麼做！

T：請先將 0.6 張紙塗上顏色！

2. 進行行間巡視，觀察學生的做法，待學生提出不會或不易折出十等分後，與學生討論十等分的必要性。

T：不好摺出 10 等分，那摺 8 等分，取其中的 6 份也可以說是 0.6 張紙嗎？

3. 總結學生的想法，強調要做出 0.6 張紙，一定要將一張紙等分成 10 份，取其中的 6 份。

4. 請學生剪下 0.6 張紙，將之與 1 張紙疊合，藉以感覺小數數量大小。

T：把 0.6 張紙和 1 張紙疊在一起，比比看！0.6 張紙比 1 張紙大還是小呢？

5. 請學生做出 1.6 張紙，並在學生動手前，先藉由提問幫助學生思考 1.6 的 1 和 6 所表示數量大小為何。

T：想想看，什麼叫做 1.6 張紙？1.6 張紙的 1 和 6 分別和 1 張紙有什麼關係？

6. 比較 1.6 張紙與 1 張紙、2 張紙的大小，藉以感覺小數所表示的數量大小。

T：把 1.6 張紙和 1 張紙、2 張紙放在一起，比比看，哪一個比較大？哪一個比較小？

三、小數加減的教學

在「學生的小數概念」一文可以發現，學生若只熟記小數加減時要對齊小數點的算則，卻不清楚背後的原理，一旦遇到沒有小數點可以對齊的問題，便很容易回歸到其所熟悉的整數直式計算方式，採取向右對齊來解題。然而，也有另一類學生甚至連對齊小數點的算則也不知道，即使被減數和減數都有小數點，仍然以向右對齊的方式來解題。由此可知，整數直式算則對學生的影響也甚鉅。我們建議教師應讓學生先操作具體物解題，並配合定位板讓學生掌握計算過程中各數字所代表的大小，以助其理解小數點對齊後再計算的原因。最後教師還應點出，不同位數小數加減計算為何不像整數般可以向右對齊來計算的原因。讓學生知道兩數系在加減計算上的相異處，以助其擺脫整數算則的影響（如教學示例 6）。

教學示例 6：強調小數點對齊的原因

***教學重點：**教師布題：「小麗有 2.58 張百格板，弟弟拿走 1.3 張後，小麗還有幾張百格板？」，請學生先以直式計算，了解學生具有的迷思概念。再發給學生 10 張百格板、10 條橘色積木和 10 個白色積木供其操作，以幫助學生了解小數點對齊

*教學流程與關鍵問話：

- 1.請學生試著以直式求解。教師進行行間巡視，檢查學生是否有向右對齊的迷思概念，並請有迷思概念的學生與答題正確的學生發表想法。

【學生可能解法】：

迷思概念

$$\begin{array}{r} 2.58 \\ - 1.3 \\ \hline 2.45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.58 \\ - 1.3 \\ \hline 2.45 \end{array}$$

解法一 解法二

$$\begin{array}{r} 2.58 \\ - 1.3 \\ \hline 245 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.58 \\ - 1.3 \\ \hline 1.55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.58 \\ - 1.3 \\ \hline 155 \end{array}$$

解法三 解法四 解法五

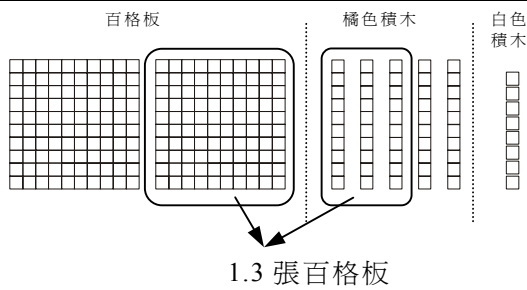
正確解法

$$\begin{array}{r} 2.58 \\ - 1.3 \\ \hline 1.28 \end{array}$$

解法六

若學生未出現迷思概念，建議教師可呈現解法一、二和四（此為研究論文中經常指出的迷思概念）以引導學生關注小數點對齊的原因。

- 2.請學生利用百格板、橘色積木及白色積木解題，並請學生說明解題想法，同時確認剛剛發表的直式算法中，何者的答案才是正確的。
- 3.利用學生於黑板呈現的積木幫助學生連結具體物操作與直式算法，並說明小數點對齊的原因。



T: 2.58 張百格板的「2」是指積木的哪個部分？5 是指哪個部分，8 又是指哪個部分？

T: 怎麼從 2.58 張百格板中拿走 1.3 張百格板的？1.3 張百格板的「1」是指 1 張百格板、1 條橘色積木還是 1 個百色積木？「3」是指 1 張百格板、1 條橘色積木還是 1 個百色積木？

T: 所以我們是從 2 張百格板中拿走 1 張百格板，從 5 條橘色積木中拿走 3 條橘色積木。那麼 2.58-1.3，是誰要減 1？誰要減 3 呢？（若學生有提出解法三或五，教師可先追問學生小數點要點在哪裡，再繼續以下問話）

T: 所以你們可不可以說說看這樣的算法為什麼不對（此算法可為解法一、二或四）？這樣的算法（指解法六）為什麼對？

T: 像這樣（指著解法六）將同樣單位的數對齊來計算，有什麼好處？有比較好算嗎？

T: 在小數中，小數點分隔整數部分和不到 1 的部分，因此要對齊同樣單位的數字，只要把小數點對齊就可以囉！但要注意喔！小數點左右兩邊的數也要同樣單位對同樣單位喔！像這樣（指解法

四），雖然小數點對齊了，但是把 3 對齊 8 是不對的喔！

4. 利用定位板輔助說明。

T: 對齊同樣單位的數是很重要的喔！我們可以像整數加減計算一樣，請定位板幫忙。

T: 2.58 在定位板怎麼記？1.3 在定位板怎麼記？兩數相減可以記成這樣（如下圖）。

	個	十	百	分	分
	位	分	分	位	位
	2	.	5	8	
-	1	.	3		
	1	.	2	8	

定位板

5. 強調整數與小數加減算則的差異。

T: 請用直式算算看「258-13=?」

T: 你能說說看，為什麼整數減法是向右對齊來算，而小數減法不是呢？

此外，我們建議教師應以沒有小數點可對齊的加減法問題，如小數加減整數等，來了解學生是否仍有向右對齊的錯誤想法。倘若學生仍以向右對齊策略解題，教師可讓學生操作具體物解題，並對照操作所得的結果與使用向右對齊策略所得答案，進而發現此策略是錯誤的（如教學示例 7）。透過這樣的對照過程，以加深學生小數計算時向右對齊策略是錯誤的印象。

教學示例 7：凸顯向右對齊策略是錯誤的

***教學重點：**教師布題：「小葵吃了 0.3 個披薩，小新吃了 2 個披薩，他們共吃了幾個披薩？」先請學生以直式解題並發表解題想法。最後發給學生 3 個披薩與 10 片披薩（1 片代表 0.1 個披薩），供其操作。

***教學流程與關鍵問話：**

1. 請學生用直式解題，教師進行行間巡視，檢查是否有以向右對齊策略解題的學生，並請其發表想法。

【學生使用向右對齊策略的解法】：

$$\begin{array}{r} 0.3 \\ + \quad 2 \\ \hline 0.5 \end{array}$$

2. 請學生操作披薩圖片解題，並討論向右對齊策略所得答案的不合理性。

T：從你拿的披薩圖來看，小葵和小新共吃了幾個披薩呢？

T：如果用這樣的算法（指向右對齊策略），小葵和小新共吃了幾個披薩呢？

T：0.5 個披薩要怎麼表示呢？比 1 個多，還是少？

T：0.5 個披薩和你剛剛操作披薩圖得出的答案有一樣多嗎？

3. 總結學生的想法，配合披薩圖片，強調直式中的 2 是指 2 個披薩，0.3 的 3 是指 3 個 0.1 個披薩，不能將 2 對齊 3 後相加。

T：0.3 是指 3 個什麼？2 是指 2 個什麼？可以把 2 和 3 加起來嗎？

參、結語

本文針對小數教學的理念提出一些教學活動，整體而言，在小數意義的教學方面，教師可以使用正例（提供多元的情境）與非例（提供非十等分的圖形）來強調小數十等分的內涵，也可藉由拉鍊表徵或做小數的活動來培養學生對小數的量感。在布題時，教師則可呈現多個大單位，而每個大單位又內含十個小單位的情境使學生能分辨單位量。此外，在連結小數符號與圖形表徵時，教師也應特別強調小數點分隔整數與非整數部分的功用以及小數點兩邊數量大小與大小單位間的關係。在小數加減的教學方面，教師可讓學生操作具體物解題，強調小數點的功能，並搭配定位板幫助學生理解直式算則的原理。本文雖舉一位小數為例，但仍可將上述教學活動略加變化應用在二位和三位小數的教學上。

參考文獻

1. 教育部（2003）：數學學習領域，國民中小學九年一貫課程綱要。
2. 劉曼麗（2005）：學生的小數概念。科學教育月刊，276，2-10。