第 17 屆亞太數學競賽試題與參考解答

傅承德*　洪文良**

*中央研究院　統計科學研究所

**國立新竹師範學院　數學教育系

2005 年第 17 屆亞太數學競賽於 3 月 15 日同時在台北及高雄兩地舉行，我國共有 96 位選手參賽。本文針對五道 APMO 試題（第一題爲代數題、第二題爲不等式、第三題爲數論題、第四題爲組合題、第五題爲幾何題）提供參考解答，以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第十六屆亞太數學競賽試題

比賽時間：2005 年 3 月 15 日

比賽地點：中央研究院、高雄大學

時間限制：計四小時（9：00am～1：00pm）。計算紙必須連同試卷交回

不得使用計算機

本試卷共五題，每題滿分七分

第一題：

試證對所有的無理數 a ，存在無理數 b 與 b' 使得 $a+b$ 和 ab' 皆爲有理數且 ab 與 $a+b'$ 都是無理數。

Problem 1.

Prove that for every irrational real numbers a, there are irrational real numbers b and b' so that $a+b$ and ab' are both rational while ab and $a+b'$ are both irrational.

第二題：

令 a,b 與 c 都是正實數使得 abc=8.試證：

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geq\frac{4}{3}$$

Problem 2.

Let *a,b* and *c* be positive real numbers such that $abc = 8$. Prove that

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geq\frac{4}{3}$$

第三題：

試證存在一個三角形能被分割成 2005 個全等的三角形。

Problem 3.

Prove that there exists a triangle which can be cut into 2005 congruent triangles.

第四題：

在一個小鎮有 $n\times n$ 間房子，而這些房子以座標 (i,j) 表示，其中 $1\leq i,j\leq n$，此處 i 和 j 分別表示房子的列座標與行座標且座標 $(1,1)$ 表示頂端左上方的房子。在時間 0 時，位於座標 $(1,c)$ 的房子著火，其中 $c\leq\frac{n}{2}$。隨後在每一個時間區間 $[t,t+1]$，消防隊員搶救尚未著火的房子，然而在時間 t 時，火苗擴散到所有未搶救到的鄰域。一旦房子被搶救，則它一直保持原狀。當火苗不在擴散時，搶救過程就算結束。請問：至少有多少間房子能被消防隊員搶救？

若 $|i-k|+|j-l|=1$ 則稱座標 (i,j) 的房子座標 (k,l) 的房子的鄰域。

Problem 4.

In a small town, there are $n\times n$ houses indexed by (i,j) for $1\leq i,j\leq n$ with $(1,1)$ being the houses at the top left corner, where i and j are row and column indices, respectively. At time 0, a fire breaks out at the house index by $(1,c)$, where $c\leq\frac{n}{2}$.During each subsequent time interval $[t,t+1]$,the fire fighters defend a house which is not yet on fire while the fire spreads to all undefended *neighbors* of each house which eas fire can no longer spread. At most how many houses can be saved by the fire fighters?

A house indexed by (i,j) is a *neighbors* of a house indexed by (k,l) if $|i-k|+|j-l|=1$

第五題：

在三角形 *ABC* 中，點 *M* 與 *N* 分別在 *AB* 與 *AC* 邊上使得 *MB*＝*BC*＝*CN*。令 *R* 與 *r* 分別表示三角形 *ABC* 的外接圓與內切圓之半徑。是以 *R* 與 *r* 表示 *MN/BC* 之值。

Problem 5.

In a triangle *ABC*, points *M* and *N* are on sides *AB* and *AC*, respectively, such that *MB*=*BC*=*CN.* Let *R* and *r* denote the circumradius and the inradius of the triangle *ABC*, respectively. Express the ratio *MN/BC* in terms of *R* and *r*.

二、第十七屆亞太數學競賽試題詳解

試題委員會公布的參考解答與評分標準：

參考解答：

令 a 為一無理數。若 a^2 為無理數，則取 $b=-a$。此時，$a+b=0$ 為有理數且 $ab=-a^2$ 是無理數。若 a^2 是有理數，則取 $b=a^2-a$。此時，$a+b=a^2$ 為有理數且 $ab=a^2(a-1)$。底下證明：ab 是無理數。因

$$a=\frac{ab}{a^2}+1 \text{是無理數，}$$

故 ab 是無理數。

取 $b'=\frac{1}{a}$ 或 $b'=\frac{2}{a}$。則 $ab'=1$ 或 2，即 ab' 為有理數。注意

$$a+b'=\frac{a^2+1}{a} \text{或} a+b'=\frac{a^2+2}{a}$$

因

$$\frac{a^2+2}{a}-\frac{a^2+1}{a}=\frac{1}{a}$$

故 $\frac{a^2+2}{a}$ 與 $\frac{a^2+1}{a}$ 兩者之中至少有一個是無理數。

評分標準

- 找出滿足題意的 b：3 分。
- 找出滿足題意的 b'：4 分。
- 一個完整的答案（可能有一點小錯誤但不影響答案的完整性）：7 分。

第二題：

試題委員會公布的參考解答與評分標準：

參考解答：

觀察

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\geq\frac{2}{2+x^2} \tag{1}$$

事實上，**(1)**式等價於 $\left(2+x^2\right)^2\geq 4\left(1+x^2\right)$ 或者 $x^2\left(x-2\right)^2\geq 0$。注意：**(1)**式等號成立的充要條件為 $x=2$。

以 a,b,c 分別取代**(1)**式中的 x，則可得下式

$$\frac{a^2}{\sqrt{\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)}}+\frac{b^2}{\sqrt{\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)}}+\frac{c^2}{\sqrt{\left(1+c^3\right)\left(1+a^3\right)}} \geq \frac{4a^2}{\left(2+a^2\right)\left(2+b^2\right)}+\frac{4b^2}{\left(2+b^2\right)\left(2+c^2\right)}+\frac{4c^2}{\left(2+c^2\right)\left(2+a^2\right)} \quad \textbf{(2)}$$

化簡**(2)**式的右邊可得

$$\textbf{(2)}\text{式的左邊} \geq \frac{2S\left(a,b,c\right)}{36+S\left(a,b,c\right)}=\frac{2S}{1+36/S\left(a,b,c\right)} \quad \textbf{(3)}$$

此處 $S\left(a,b,c\right)=2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(ab\right)^2+\left(bc\right)^2+\left(ca\right)^2$ 由算幾不等式，可知

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}=12$$

$$\left(ab\right)^2+\left(bc\right)^2+\left(ca\right)^2 \geq 3\sqrt[3]{\left(abc\right)^4}=48$$

注意上述兩個不等式等號成立的充要條件為 $a=b=c=2$。此時，上述兩個不等式導出

$$S\left(a,b,c\right)=2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(ab\right)^2+\left(bc\right)^2+\left(ca\right)^2 \geq 72 \quad \textbf{(4)}$$

因此

$$\frac{2}{1+36/S\left(a,b,c\right)} \geq \frac{2}{1+36/72}=\frac{4}{3} \quad \textbf{(5)}$$

故本題得證。

評分標準

底下的評分標準是根據上述的解答。最困難的部分是觀察出**(1)**式。只要學生能觀察出**(1)**式，則其餘部分是例行性的計算。

- (1)-(3)式或等價於(1)-(3)式：4 分
- 求出(1)-(4)式或等價於(1)-(4)式：6 分
- 求出(1)-(5)式或等價於(1)-(5)式(可能有一點小錯誤但不影響答案的完整性)：7 分

第三題：

試題委員會公布的參考解答與評分標準：

參考解答：

假設一個三角形的某一邊長度為 n。則此三角形可以被分割成 n^2 個全等的三角形而這些全等的三角形與原三角形是相似並且其對應到原三角形邊長為 n 的邊其長度為 1。

因為 2005＝5×401 其中 5 和 401 皆為 $4k+1$ 型的質數，所以 2005 可以表示成兩個整數

的平方和。事實上，我們可以發現

$$
\begin{aligned}
2005 &= 5\times 401 = (2^2+1)(20^2+1)\\
&= 40^2+20^2+2^2+1\\
&= (40-1)^2+2\times 40+20^2+2^2\\
&= 39^2+22^2
\end{aligned}
$$

令 ABC 是一直角三角形其中 $\angle B=90^\circ$ 且 $AB=39$，$BC=22$。我們作斜邊 AC 上的高 BK，則 BK 將三角形 ABC 分為兩個相似的三角形：ΔABK 與 ΔBCK。根據上述 ΔABK 可以被分割成 39^2 個全等三角形且 ΔBCK 可以被分割成 22^2 個全等三角形。因 $\Delta ABK \sim \Delta BCK$，故 2005 個三角形是全等的。

評分標準

- 觀察到三角形的其中一邊長度為 n。則此三角形可以被分割成 n^2 個全等的三角形而這些全等的三角形與原三角形是相似並且其對應到原三角形邊長為 n 的邊其長度為 1.：2 分。
- 此外，將 2005 表示為兩個整數的平方和：3 分。

  ＊只將 2005 表示為兩個整數的平方和而沒有上述的觀察：1 分。
- 一個完整的答案（可能有一點小錯誤但不影響答案的完整性）：7 分

第四題：

試題委員會公布的參考解答與評分標準：

參考解答：

至多有 n^2+c^2-nc-c 間房子被消防隊員搶救。依下列的搶救順序便可達成：

$$(2,c),(2,c+1);(3,c-1),(3,c+2);(4,c+3);\ldots\ (c+1,1),(c+1,2c);(c+1,2c+1),\ldots,(c+1,n) \qquad \textbf{(1)}$$

在此策略下，有

2 行（行號為 $c, c+1$），此時有 $n-1$ 間房子被搶救

2 行（行號為 $c-1, c+2$），此時有 $n-2$ 間房子被搶救

…

2 行（行號為 $1, 2c$），此時有 $n-c$ 間房子被搶救

$n-2c$ 行（行號為 $n-2c+1,\ldots,n$），此時有 $n-c$ 間房子被搶救

將上述的情形相加，可得

$$2\left[(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-c)\right]+(n-2c)(n-c)=n^2+c^2-nc-c \qquad \textbf{(2)}$$

若 $|i-1|+|j-c|=t$ 則我們說位於座標 (i,j) 的房子在高度 t。令 $d(t)$ 表示在高度 t 時，經

過t時間被搶救之房子數，且 $p(t)$ 爲在大於高度t時，經過t時間被搶救之房子數。明顯可得

$$p(t)+\sum_{i=1}^{t}d(i)\le t \text{ and } p(t+1)+d(t+1)\le p(t)+1$$

令 $s(t)$ 表示在高度t時，在t時間尚未著火的房子數。我們利用歸納法證明下式：

$$s(t)\le t-p(t)\le t,\quad 1\le t\le n-1$$

當 $t=1$ 時，上式明顯成立。當 $t=k$ 時，假設上式成立。底下證明：當 $t=k+1$時，上式亦成立。

在高度$k+1$時，任意$k-p(k)+1$間房子之鄰域的聯集至少包含在高度爲k 的 $k-p(k)+1$個頂點。因$s\le k-p(k)$，在高度k時，這些房子的其中一間正著火。因此，在高度$k+1$時，至多有$k-p(k)$間房子其鄰域沒有著火。故，我們有

$$\begin{aligned} s(k+1) &\le k-p(k)+d(k+1) \\ &=(k+1)-(p(k)+1-d(k+1)) \\ &\le (k+1)-p(k+1) \end{aligned}$$

底下證明上述的策略是最佳的。因

$$\sum_{t=1}^{n-1}s(t)\le\binom{n}{2},$$

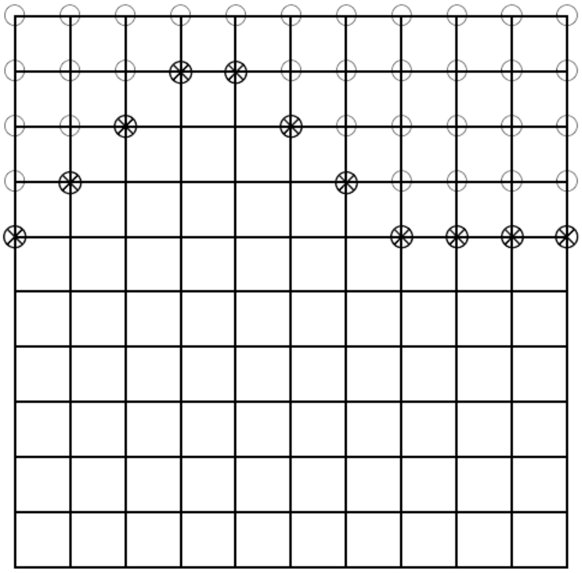
經由上述的策略知：在任何策略下，能被搶救的房子數在小於或等於高度$n-1$時至多爲$\binom{n}{2}$。此外，在高度大於$n-1$時，根據上述的策略：每一間房子都能被搶救。

下面的例子是說明當$n=11$且$c=4$的情形。以○表示著火的房子。以⊗表示堵住一個或多個房子的房子，因此這些房子和位在下面的房子接獲得搶救。

評分標準

- 找到一個最佳策略**(6)**且得到答案**(7)**：**3** 分
- 此外，能證明其答案是最佳的（可能有一點小錯誤但不影響答案的完整性）：**7** 分

＊能提出一個好的證明方法，再加 **1** 分。



第五題：

試題委員會公布的參考解答與評分標準：

參考解答：

令ω，O與I分別表示ΔABC的外接圓，外心與內心。令D表示直線BI與外接圓ω的交點使得$D \neq B$，則D是弧AC的中點。因此$OD \perp CN$且$OD = R$。

首先證明$\Delta MNC \,\square\, \Delta IOD$。因為$BC = BM$，直線$BI$（$\angle MBC$的角平分線）垂直直線$CM$。又因為$OD \perp CN$，$ID \perp MC$，由此可得

$$\angle ODI = \angle NCM \qquad \textbf{(3)}$$

令$\angle ABC = 2\beta$。在ΔBCM中，我們有

$$\frac{CM}{NC} = \frac{CM}{BC} = 2\sin\beta \qquad (4)$$

因$\angle DIC = \angle DCI$，可推得$ID = CD = AD$。令E表示直線DO與外接圓ω的交點使得$E \neq D$。則DE是ω的直徑且$\angle DEC = \angle DBC = \beta$。因此，我們有

$$\frac{DI}{OD} = \frac{CD}{OD} = \frac{2R\sin\theta}{R} = 2\sin\beta \qquad (5)$$

結合**(8)**，**(9)**與**(10)**可證得：$\Delta MNC \,\square\, \Delta IOD$。由此可推得

$$\frac{MN}{BC} = \frac{MN}{NC} = \frac{IO}{OD} = \frac{IO}{R} \qquad \textbf{(6)}$$

再由尤拉公式知

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \tag{7}$$

故

$$\frac{MN}{BC} = \sqrt{1 - \frac{2r}{R}} \tag{8}$$

評分標準

- **(8)**式或等價於**(8)**式：**2** 分
- **(8)-(11)**式或等價於**(8)-(11)**式：**5** 分
- **(8)-(13)**式或等價於**(8)-(13)**式（可能有一點小錯誤但不影響答案的完整性）：**7** 分

另解

令 $a = BC$，$b = AC$，$c = AB$，$\alpha = \angle BAC$，$\beta = \angle ABC$，$\gamma = \angle ACB$。假設 B 點的座標爲 $(0,0)$，$C = (a,0)$，則 M 與 N 的座標分別爲

$$M = (a\cos\beta, a\sin\beta)，N = (a - a\cos\gamma, a\sin\gamma) \tag{9}$$

因此

$$\begin{aligned}
(MN/BC)^2 &= \left[(a - a\cos\gamma - a\cos\beta)^2 + (a\sin\gamma - a\sin\beta)^2\right]/a^2 \\
&= (1 - \cos\gamma - \cos\beta)^2 + (\sin\gamma - \sin\beta)^2 \\
&= 3 - 2\cos\gamma - 2\cos\beta + 2(\cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta) \\
&= 3 - 2\cos\gamma - 2\cos\beta + 2\cos(\gamma+\beta) \\
&= 3 - 2\cos\gamma - 2\cos\beta - 2\cos\alpha \\
&= 3 - 2(\cos\gamma + \cos\beta + \cos\alpha)
\end{aligned} \tag{10}$$

欲證

$$\cos\gamma + \cos\beta + \cos\alpha = \frac{r}{R} + 1 \tag{11}$$

由

$$\begin{aligned}
a &= b\cos\gamma + c\cos\beta \\
b &= c\cos\alpha + a\cos\gamma \\
c &= a\cos\beta + b\cos\alpha
\end{aligned} \tag{12}$$

可推得

$$a(1+\cos\alpha)+b(1+\cos\beta)+c(1+\cos\gamma)=(a+b+c)(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \quad \textbf{(13)}$$

因此

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{a+b+c}(a(1+\cos\alpha)+b(1+\cos\beta)+c(1+\cos\gamma))$$

$$=\frac{1}{a+b+c}(a(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})+b(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})+c(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}))$$

$$=\frac{1}{a+b+c}(a+b+c+\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$

$$=1+\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{2abc(a+b+c)} \quad \textbf{(14)}$$

令一方面，根據 $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$，可得

$$R^2=\frac{a^2}{4(1-\cos^2\alpha)}=\frac{a^2}{4(1-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2)}$$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4} \quad \textbf{(15)}$$

再根據 $\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$，可得

$$r^2=\frac{b^2c^2(1-\cos^2\alpha)}{(a+b+c)^2}=\frac{b^2c^2(1-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})^2)}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4(a+b+c)^2} \quad \textbf{(16)}$$

結合(19)，(20)與(21)式，我們可以證得(16)式。

最後，根據(15)與(16)式，可得

$$\frac{MN}{BC}=\sqrt{1-\frac{2r}{R}} \quad \textbf{(17)}$$

評分標準

- (15)式或等價於(15)式：3 分
- (15)與(16)式或等價於(15)與(16)式：6 分。

  ＊如果學生知道(16)式且能使用它。我們不需要證明(16)式。
- (15)，(16)與(22)式或等價於 (15)，(16)與(22)式 (可能有一點小錯誤但不影響答案的完整性)：7 分

(16)式的另一證明

摘錄自 R.A. Johnson's "Advanced Euclidean Geometry"

由O點分別作三邊的垂直平分線交BC，CA與AB於D，E，F三點。應用 Ptolemy 定理於四邊形$OEAF$上(O，E，A，F四點共圓)，可得

$$\frac{a}{2}\cdot R=\frac{b}{2}\cdot OF=\frac{c}{2}\cdot OE$$

同理可得

$$\frac{b}{2}\cdot R=\frac{c}{2}\cdot OD+\frac{a}{2}\cdot OF\text{ ，}\frac{c}{2}\cdot R=\frac{a}{2}\cdot OE+\frac{b}{2}\cdot OD$$

將上述三式相加，可得

$$sR=OD\cdot\frac{b+c}{2}+OE\cdot\frac{c+a}{2}+OF\cdot\frac{a+b}{2} \tag{18}$$

此處$s=\frac{a+b+c}{2}$。此外，

$$\Delta OBC\text{的面積}=OD\cdot\frac{a}{2}\text{ ，}\Delta OAC\text{的面積}=OE\cdot\frac{b}{2}\text{ ，}\Delta OAB\text{的面積}=OF\cdot\frac{c}{2}$$

由此可得

$$rs=\Delta ABC\text{的面積}=OD\cdot\frac{a}{2}+OE\cdot\frac{b}{2}+OF\cdot\frac{c}{2} \tag{19}$$

將(23)與(24)相加，可得$s(R+r)=s(OD+OE+OF)$或者

$$OD+OE+OF=R+r\text{ 。}$$

因$OD=R\cos\alpha$，$OE=R\cos\beta$，$OF=R\cos\gamma$，故**(16)**式成立。