

學生的小數概念

劉曼麗

國立屏東師範學院 數理教育研究所

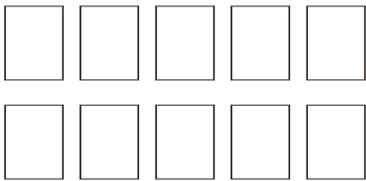
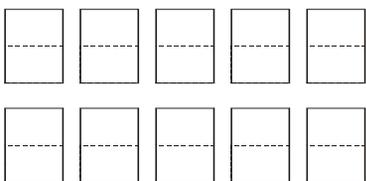
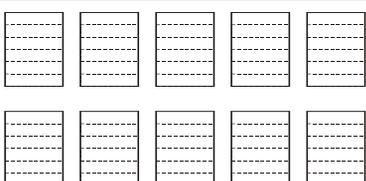
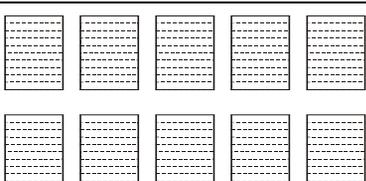
壹、前言

由於小數與整數、分數皆有淵源，學生在學習小數時便易受整數和分數的影響而產生迷思概念。本文擬從兩份試卷（試卷一：93年3月施測，三年級291人、四年級352人，這些學生是由北部、中部、南部的城鄉學校中選取而來，是接受九年一貫暫行綱要的數學領域課程；試卷二：91年5月施測，四年級898人、五年級962人、六年級990人，這些學生是由全國分層隨機取樣而來，是接受八十二年版的數學科課程）擇取部份重要結果，以學生的答題表現來說明學生在學習小數概念上可能有哪些迷思概念或錯誤想法，以提供教師在進行小數教學時的參考。此兩份試卷皆為國科會研究計畫的研究工具，試卷一為國科會研究計畫「九年一貫數學領域分數與小數能力指標的詮釋：子計畫三—小數」（計畫編號 NSC92-2522-S-153-008）所發展的；而試卷二則為國科會研究計畫「國小學童小數與小數運算概念之調查研究」（計畫編號 NSC90-2521-S-153-003）所發展的。由於篇幅限制，本文僅以一位純小數的意義、一位帶小數的意義、小數與分數的互換、不同位數的小數比大小和加減來說明學生在學習這些概念的理解情形。

貳、學生的小數概念

一、學生對一位純小數意義的理解情形

試題 1:  表示一張白紙，小明想要塗黑 0.2 張白紙，請先從 ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄏ 四種圖中選出一種適當的圖，再塗黑 0.2 張白紙。

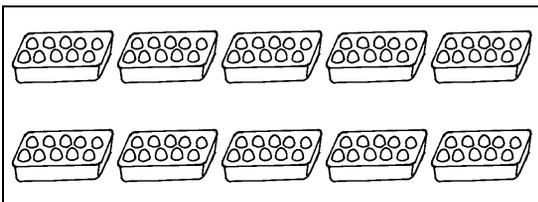
ㄅ	
ㄆ	
ㄇ	
ㄏ	

答題結果：

年 級 答 案	三	四
ㄅ圖塗 1 張	0.7	0.3
ㄅ圖塗 2 張	18.2	15.9
ㄆ圖塗 2 張	4.5	0.9
ㄆ圖塗 5 張	0.3	0.0
ㄆ圖塗 10 張	0.7	0.3
ㄆ圖塗 2 格	8.9	13.6
ㄆ圖塗 1 格	0.7	5.1
ㄇ圖 2 張	0.7	0.0
ㄇ圖塗 2 格	2.4	9.9
ㄏ圖塗 2 張	0.7	0.9
ㄏ圖塗 2 格	*38.5	*39.2
ㄏ圖每一張皆塗 2 格	0.3	0.0
ㄅㄆㄇㄏ皆塗 2 張	2.4	0.9
ㄅㄆㄇㄏ皆塗 2 格	5.2	8.0
其他錯誤答案	8.9	3.6
空白	6.9	1.4

*號者為正確答案

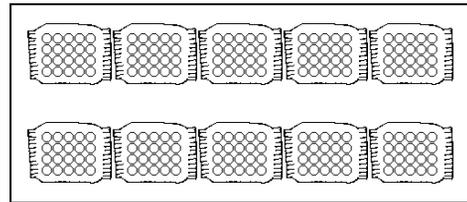
試題 2： 表示一盒雞蛋，裡面有 10 顆，下圖有 10 盒雞蛋。媽媽用了 0.8 盒雞蛋，請將媽媽用的雞蛋塗黑：



答題結果：

年 級 答 案	三	四
8 顆	*71.1	*89.5
8 盒	19.2	8.0
18 顆	0.3	0.0
其他錯誤答案	5.8	1.1
空白	3.4	1.4

試題 3： 表示一袋糖果，裡面有 20 顆，下圖有 10 袋糖果。小新吃了 0.3 袋糖果，請將小新吃的糖果塗黑：



答題結果：

年 級 答 案	三	四
6 顆	*10.3	*4.8
3 顆	55.3	82.1
3 袋	21.0	7.7
6 袋	0.3	0.0
13 顆	1.0	0.6
其他錯誤答案	4.8	2.3
空白	7.2	2.6

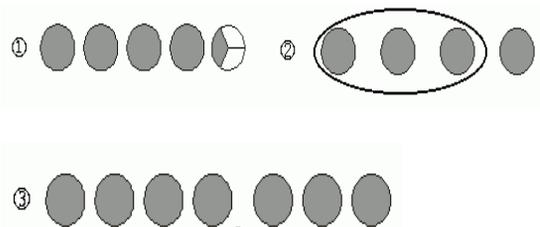
試題 1、2、3 主要是想了解學生在不同情境下，對一位純小數意義的理解情形。試題 1 為連續量的情境，試題 2 和 3 則為離散量情境。由於離散量情境同時涉及兩種單位：單位量的單位（以大單位稱之）和單位量內離散物件的單位（此為自然單位以小單位稱之），故單位小數的內容物可再分為單一個物（簡稱內單）和多個個物（簡稱內多）兩種情形。試題 2 即為內單情境而試題 3 則為內多情境。三年級在此三題的答對率分別為 38.5%、71.1%、10.3%，四年級分別為 39.2%、89.5%、4.8%。由此可知，兩個年級要三題皆對相當不易，且都是在內單情境表現最佳，而在內多情境表現最糟。學生最容易犯的錯誤有三種，第一種是將小數 $0.a$ 的意義視為 a 個單位，此結果可由學生在試題 1 選擇 \cup 、 \times 、 \sqcap 或 \sqsubset 圖後，塗其中的 2 張紙或四張圖中皆塗 2 張紙（三、四年級分別為 26.5%、18.6%）、在試題 2 塗 8 盒雞蛋（三、四年級分別為 19.2%、8.0%）或在試題 3 塗 3 袋糖果（三、四年級分別為 21.0%、7.7%）顯示。第二種是在連續量情境中將小數 $0.a$ 的意義視為從一個單位中取出 a 等分而並未考量此單位量是否被十等分割，此結果可由學生在試題 1 中，選擇 \times 或 \sqcap 圖後，塗其中的 2 小格（三、四年級分別為 11.3%、23.5%）顯示。第三種是在離散量情境中將小數 $0.a$ 的意義視為 a 個小單位而並未考量此單位量是否僅含 10 個小單位，此結果可再統計學生在試題 2 塗 8 顆雞蛋也同時在試題 3 塗 3 顆糖

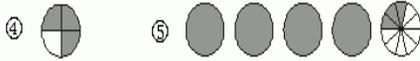
果而得，結果顯示三、四年級分別為五成和八成。事實上，這些學生在試題 2 的內單情境（即單位量內含 10 個小單位）是可以選對，而在試題 3 的內多情境便會挫敗，此正是造成學生在這兩題答對率相差懸殊的原因。

此外，除了上述錯誤類型外，我們還發現有一類學生將 $0.a$ 的意義視為 a 等分，即認為不論是分成幾等分，只要取其中的 a 等分就是 $0.a$ ，此結果可由學生在試題 1 中，同時在 \cup 圖塗 2 分（指 2 張），也在 \times 、 \sqcap 和 \sqsubset 圖塗 2 分（指 2 格）（三、四年級分別為 5.2%、8.0%）顯示。另有一類學生則將 $0.a$ 視為 a 等分中的一分，此結果可由學生在試題 1 選擇 \times 圖後，塗 1 格（三、四年級分別為 0.7%、5.1%）顯示。由上述種種答題情形顯示，對於學生理解一位純小數與十等分的連結關係須要加強，而在單位量的掌握上也須再加強。

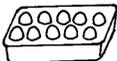
二、學生對一位帶小數意義的理解情形

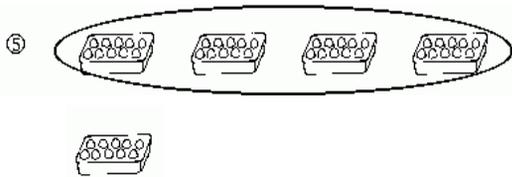
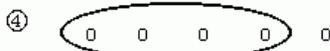
試題 4： 表示一個蔥油餅，請問 4.3 個蔥油餅要怎樣表示？



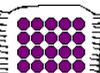


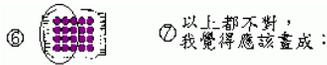
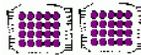
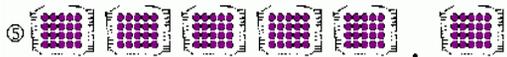
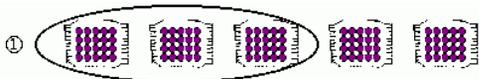
⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：

試題 5：一盒雞蛋  有 10 顆，請問
5.4 盒雞蛋要怎樣表示？



⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：

試題 6：一袋糖果  有 20 顆，請問
5.3 袋糖果要怎樣表示？



答題結果：

答對率	年級	試題 4	試題 5	試題 6
選項①	四	5.6	8.5	6.0
	五	8.5	7.1	6.8
	六	4.9	4.7	5.2
選項②	四	8.6	*69.9	65.4
	五	7.6	*77.5	63.2
	六	5.2	*84.9	57.2
選項③	四	10.9	8.1	3.2
	五	7.7	5.0	2.3
	六	3.8	3.9	1.9
選項④	四	12.5	4.2	*6.3
	五	9.8	3.3	*14.1
	六	7.8	1.1	*27.8
選項⑤	四	*55.1	5.6	8.8
	五	*62.3	5.2	5.3
	六	*68.4	3.4	2.8
選項⑥	四	0.7	0.9	6.9

	五	0.3	0.2	5.1
	六	0.4	0.5	2.2
選項㉔	四			0.1
	五			0.6
	六			0.4
空白	四	6.6	2.8	3.2
	五	3.8	1.7	2.5
	六	3.5	1.3	2.5

試題 4、5、6 主要是想了解學生在不同情境下，對一位帶小數意義的理解情形。試題 4 為連續量的情境，試題 5 和 6 則為離散量情境，但前者為內單情境，而後者為內多情境。四年級在此三題的答對率分別為 55.1%、69.9%、6.3%，五年級為 62.3%、77.5%、14.1%，六年級則為 68.4%、84.9%、27.8%。由此可知，這三個年級要三題皆對實非不易，且都是在內單情境表現最佳，而在內多情境表現最糟。學生最容易犯的錯誤有三種，一種是將小數 $a.b$ 的意義視為兩個獨立的整數 a 和 b ，此結果可由學生選答試題 4 的選項㉓（四、五、六年級分別為 10.9%、7.7%、3.8%）、試題 5 的選項㉓（四、五、六年級分別為 8.1%、5.0%、3.9%）或試題 6 的選項㉓（四、五、六年級分別為 8.8%、5.3%、2.8%）顯示。第二種是將小數 $a.b$ 的意義視為 a 等分中的 b 等分，只因情境和選擇的單位量不同而再細分成不同的類型。在連續量情境，有以 a 個單位當單位量（以此新單位量而言應為離散量情境），此結果可由學生選答試題 4 的選項㉒（四、五、六年級分別為

8.6%、7.6%、5.2%）顯示；也有以 1 個單位當單位量，此結果可由學生選答試題 4 的選項㉔（四、五、六年級分別為 12.5%、9.8%、7.8%）顯示。在離散量情境，由於有大小單位的區分，故學生可選擇的單位量較連續量複雜。有以 a 個大單位當單位量，此結果可由學生選答試題 5 的選項㉑（四、五、六年級分別為 5.6%、5.2%、3.4%）或試題 6 的選項㉑（四、五、六年級分別為 6.0%、6.8%、5.2%）顯示；也有以 a 個小單位當單位量，此結果可由學生選答試題 5 的選項㉔（四、五、六年級分別為 4.2%、3.3%、1.1%）或試題 6 的選項㉑（四、五、六年級分別為 3.2%、2.3%、1.9%）顯示；或以 1 個大單位當單位量，此結果可由學生選答試題 5 的選項㉑（四、五、六年級分別為 8.5%、7.1%、4.7%）或試題 6 的選項㉑（四、五、六年級分別為 6.9%、5.1%、2.2%）顯示。第三種是將小數 $a.b$ 的意義視為 a 個大單位和 b 個小單位合起來的，此結果可再統計學生選答試題 5 的選項㉒也同時選答試題 6 的選項㉒而得，結果顯示四、五、六年級皆為六成左右。事實上，這些學生在試題 5 的離散量內單情境是可以選對，而在試題 6 的離散量內多情境便會挫敗，這也就是造成三個年級在試題 5 和 6 答對率相差懸殊的原因。在前述一位純小數的離散量試題中，我們也見到了類似的結果。

尚有一點值得注意，還有一類學生在連續量情境中將小數 $a.b$ 視為 a 個單位再外加一小部份（此為將一個單位分成 b 等

分中的一分)，此結果可由學生選答試題 4 的選項①（四、五、六年級分別為 5.6%、8.5%、4.9%）顯示。同樣地，在所述一位純小數的試題 1 中，我們也見到了有少數學生將 0.2 張紙視為 2 等分中的一分。在透過不同情境的檢驗下，學生對小數的迷思概念很容易原形畢露。

三、學生對小數與分數互換的理解情形

試題 7：阿和吃了 9.7 個小蛋糕，用分數表示的話，下面哪一個是對的呢？

(① $\frac{97}{1}$ 個 ② $\frac{97}{100}$ 個 ③ $\frac{7}{9}$ 個 ④ $\frac{9}{7}$ 個

⑤ $9\frac{1}{7}$ 個 ⑥ $9\frac{7}{10}$ 個)

試題 8：太一喝了 $\frac{4}{5}$ 杯牛奶，用小數表示

的話，哪一個是對呢？

(① 5.4 杯 ② 4.5 杯 ③ 1.25 杯 ④ 0.8 杯 ⑤ 0.4 杯)

答題結果：

答對率	年級	試題 7	試題 8
選項①	四	1.7	69.6
	五	1.8	48.4
	六	1.0	26.2
選項②	四	12.0	6.3
	五	6.2	7.6
	六	9.1	11.5
選項③	四	43.2	0.3
	五	35.0	1.7

	六	22.2	3.0
選項④	四	3.1	*4.3
	五	4.7	*24.5
	六	6.6	*51.1
選項⑤	四	1.0	17.7
	五	1.8	15.9
	六	2.0	6.0
選項⑥	四	*37.3	
	五	*49.2	
	六	*57.1	
空白	四	1.6	0.1
	五	1.4	1.7
	六	2.0	1.8

試題 7 和 8 兩題是想了解學生對分數與小數互換的概念；前者是一位小數化分數、後者是分母為 5 的分數化小數。四年級在此兩題的答對率分別為 37.3% 和 4.3%，而五年級為 49.2% 和 24.5%，即使是已學過用除法來解決分數化小數問題的六年級，答對率也分別只有 57.1% 和 51.1%。各年級學生最容易犯的錯誤都是將符號表面有的數字拼湊出答案，即 9.7 化為 $\frac{7}{9}$ ，或 $\frac{4}{5}$ 化為 5.4。此結果可由試題 7 的選項③（四、五、六年級分別為 43.2%、35.0%、22.2%）和試題 8 的選項①（四、五、六年級分別為 69.6%、48.4%、26.2%）顯示。這樣的錯誤情形從學生在試題 4、5 和 6 所選的圖像中也可略窺一二。進一步統計資料後發現，四、五、六年級學生中，

認為 9.7 為 $\frac{7}{9}$ 者也同時也認為 $\frac{4}{5}$ 為 5.4 的分別為四、三、二成，可見此系統性錯誤者不在少數。另外，也有三成的四年級學生即使知道 9.7 可化為 $9\frac{7}{10}$ ，但卻認為 $\frac{4}{5}$ 為 5.4，可見這些學生在面對教材中尚未出現過的「 $\frac{4}{5}$ 化為小數」題目時，就傾向於回到從符號表面的數字來拼湊出小數型式的答案。再者，分數化小數題的前三個選項(5.4、4.5、1.25)都不合理，但四、五、六年級的學生卻分別有近八成、六成、四成選了其中之一。此結果顯示學生並未對答案的不合理性提高警覺，或者這些學生對於分數和小數基本的意義掌握不夠，以至於對分數和小數的大小感覺絲毫不察。

四、學生對不同位數小數比大小的理解情形

試題 9：賤兔有三條髮帶，紅色長 0.536 公尺、黃色長 0.28 公尺、綠色長 0.3 公尺

(1) () 如果他想綁「最長」的髮帶，應該選擇哪一種顏色？

(Ⓐ紅色 Ⓑ黃色 Ⓒ綠色)。

(2) () 如果他想綁「最短」的髮帶，應該選擇哪一種顏色？

(Ⓐ紅色 Ⓑ黃色 Ⓒ綠色)。

答題結果：

年級 選項 選答率	四	五	六
	①①	0.1	0.1
①②	*44.9	*73.0	*70.1
①③	39.0	14.8	14.5
②①	1.0	0.4	0.3
②②	0.0	0.0	0.0
②③	0.3	0.2	0.5
③①	11.9	9.1	12.6
③②	2.3	1.5	1.2
③③	0.0	0.1	0.0
空白	0.4	0.6	0.2

試題 9 主要是在連續量的情境，透過髮帶的比長短以了解學生對不同位數小數比大小的理解情形。結果發現四年級的答對率雖只有 44.9%，但對於已學過三位小數的五六年級學生而言，答對率也不過只有七成左右。學生最容易犯的錯誤有兩種，一種是受整數的影響，而另一種是受分數的影響。四年級有 39%、五年級有 14.8%、六年級有 14.5% 的學生認為 0.536 公尺最長，而 0.3 公尺最短（見答題結果標黑處），顯示這些學生受整數的影響，認為位數越多就越大，因此小數點後數字越多其值越大。另外，四年級有 11.9%、五年級有 9.1%、六年級有 12.6% 的學生認為 0.3 公尺最長，而 0.536 公尺最短（見答題結果標黑處），顯示這些學生受分數的影響，認為分割份數越多就越小，因此小數點後數字越多其值越小。

五、學生對不同位數小數加減的理 解情形

試題 10： $0.38 + 12 = (\quad)$

答題結果：

年級 選項 \ 選答率	年級		
	四	五	六
$\begin{array}{r} 0.38 \\ + 12 \\ \hline 12.38 \end{array}$	*35.0	*61.7	*66.8
$\begin{array}{r} 0.38 \\ + 12 \\ \hline 0.50 \end{array}$	43.7	26.1	25.9
$\begin{array}{r} 0.38 \\ + 12 \\ \hline 1.58 \end{array}$	13.0	6.0	3.2
其他 錯誤答案	7.3	5.3	3.0
空白	1.0	0.7	1.1

試題 11： $10.73 - 0.5 = (\quad)$

答題結果：

年級 選項 \ 選答率	年級		
	四	五	六
$\begin{array}{r} 10.73 \\ - 0.5 \\ \hline 10.23 \end{array}$	*57.2	*80.2	*79.6
$\begin{array}{r} 10.73 \\ - 0.5 \\ \hline 10.68 \end{array}$	15.3	4.5	7.6
$\begin{array}{r} 10.73 \\ - 0.5 \\ \hline 106.8 \end{array}$	0.2	0.2	0.1
$\begin{array}{r} 10.73 \\ - 0.5 \\ \hline 1.068 \end{array}$	0.0	0.1	1.1
$\begin{array}{r} 10.73 \\ - 0.5 \\ \hline 5.73 \end{array}$	0.0	0.1	0.0
$\begin{array}{r} 10.73 \\ - 0.5 \\ \hline 0.573 \end{array}$	0.0	0.1	0.0
其他 錯誤答案	24.8	13.4	9.8

空白	2.4	1.4	1.8
----	-----	-----	-----

試題 10 和 11 主要是了解學生在不同位數小數加減的表現情形，前者為加法題，而後者為減法題。四年級在此兩題的答對率分別為 35.0%和 57.2%，五年級為 61.7%和 80.2%，六年級則為 66.8%和 79.6%。五六年級相差不多，可見我國學生在小數加減上的成長到了五年級已漸趨穩定。三個年級學生最容易犯的錯誤都是在直式計算中將被加數（被減數）和加數（減數）採向右對齊來計算，此結果可由學生在試題 10 的答案為「0.5」（四、五、六年級為 43.7%、26.1%、25.9%）或在試題 11 的答案為「10.68」、「106.8」或「1.068」（四、五、六年級為 15.5%、4.8%、8.7%）顯示。如再仔細對照，三個年級在加法題有此錯誤解題策略的學生均明顯地較減法題高出兩成多。進一步細究，推測這些學生可能是習慣以「對齊小數點，再進行計算」的程序性知識來解題，但在加法題的加數為整數而無小數點參照下，發現可用招式失效，只好回歸到其所熟悉的整數直式計算方式，採取向右對齊來解題。由此可知，這些學生只是熟記小數加減時要對齊小數點的算則，卻不清楚背後的原理。一旦沒有小數點可以對齊時，所記憶的算則受到了試鍊，便產生了將整數加減算則「張冠李戴」的情況。但即使有小數點，有些學生在試題 11 仍採取向右對齊來解題，最後算出來的答案頗耐人尋味，都是

小數點惹的禍。從這些跡象顯示，程序性知識一旦缺乏概念性知識的支撐，學生所學到的知識極易受到挑戰而搖搖欲墜，教師焉能不慎！

參、結語

本文透過 11 個問題和學生的答題結果來說明學生的小數概念。整體而言，學生極不易掌握小數符號背後的數學意義；連帶地，對小數的比大小和小數的加減就會產生一些錯誤或迷思概念。小數與分數都與等分的概念有關。對分數符號而言，一個單位被等分成多少等份是由分母顯

示，而佔多少等份是由分子顯示。但對小數符號而言，一個單位被等分成多少等份是隱含在位數中，而佔多少等份是由小數點後的部分顯示。因此，小數符號的抽象性自不在話下。再者，由於小數與整數都是採十進位制，在符號結構上十分相似，學生在不了解小數意義的情況下，便容易將之視為整數來處理。另一方面，由於小數的等分內涵是建立在分數概念上，學生若未能掌握單位量概念，也極易延伸到小數而產生一些迷思概念。因此，我們擬以本文的發現為基礎，將以另文再介紹一些小數教學的活動，以提供教師參考。