臺北市九十三學年度高級中學數學及自然科能力競賽數學科複賽試題及參考解答

國立臺灣師範大學　數學系

《試題部分》

一、筆試（一）

【問題一】: 給定一矩形 $ABCD$ 以及分別在邊 $\overline{BC}$ 上、邊 $\overline{CD}$ 上的各一點 E、F。設 $\triangle ABE$、$\triangle AEF$ 與 $\triangle AFD$ 的面積分別為 α、β 與 γ。

(1)令 $\overline{BE}=a$，$\overline{EC}=b$、$\overline{CF}=c$、$\overline{FD}=d$，試以 a、b、c 與 d 表示 $\triangle AEF$ 的面積 β。(5 分)

(2)試以 α、β 與 γ 表示矩形 $ABCD$ 的面積 (不能含 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$)。(8 分)

【問題二】: 試求出滿足下述兩方程式的所有數對 (x, y)，其中 $x>0$ 而 $0 \le y < 2\pi$：

$$\cos y+\frac{1}{4}\cos 4y = x\cos y，$$

$$\sin y-\frac{1}{4}\sin 4y = x\sin y。$$ (12 分)

【問題三】:

(1)試證：存在兩個正整數 a 與 b 滿足 $a^2-b^2=101$。(4 分)

(2)試求滿足下述條件的正整數 n 之最小值：在任意 n 個 ($n \ge 2$) 相異的正整數中，必存在兩相異數 a 與 b 使得 a^2-b^2 是 101 的倍數。(8 分)

【問題四】: 設 $\triangle ABC$ 的內部有一點 D 滿足 $\angle CAD=\angle ACB$，過點 D 作一直線與 $\overline{AB}$ 平行，過頂點 B 作一直線與 $\overline{AC}$ 平行，設所作二直線相交於點 E。在 $\overline{BC}$ 上選取一點 F 使得 $\angle DFE=\angle ACB$ 且點 F 與點 E 在直線 AD 的異側。試證：$\triangle ABC$ 的外接圓與 $\triangle DEF$ 的外接圓相切。(12 分)

二、筆試（二）

1.在實驗室做球的反彈試驗，當乒乓球從 60 公分高的地方自然落下，第一次反彈的高度為 48 公分，接下來都是以相同的比例反彈。試問在第__(一)__次反彈後，其高度會低於 6 公分。($\log 2=0.3010\cdots$，$\log 3=0.4771\cdots$。)

2.已知 $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\frac{4}{5}$，其中 $\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，則 $\cos(\frac{\pi}{4}+2\alpha)=$__(二)__。

3.試寫出滿足方程組

$$\begin{cases} A+B+C=93 \\ \frac{4}{5}A+\frac{5}{6}B+\frac{6}{7}C=79 \end{cases}$$

的所有正整數組 (A, B, C)：__(三)__。

4.在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，$\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{AC}=2$、$\overline{DF}=5$、$\angle B+\angle E=180^\circ$ 且 $\angle C+\angle F=120^\circ$，則 $\overline{BC}+\overline{EF}=$__(四)__。

5.設 $\angle BAC=45^\circ$，而 X 為其內部一點且

$\overline{AX}=6$，在射線$\overrightarrow{AB}$與射線$\overrightarrow{AC}$上分別取異於角頂A的一點Y與Z，並使X、Y、Z三點不共線，則△XYZ的周長之最小值爲__（五）__。

6. 滿足$1\le a\le b<c\le d\le 15$的整數組(a,b,c,d)共有__（六）__組。。

7.若下列二拋物線的兩交點的連線通過原點，則兩交點坐標爲__（七）__。
$y=x^2+a$，$y=-x^2+4x+3$。

《參考解答》

一、筆試（一）

【問題一】解：

(1)因爲矩形$ABCD$的面積爲$(a+b)(c+d)$，△ABE、△CEF與△AFD的面積分別爲$a(c+d)/2$、$bc/2$與$d(a+b)/2$，所以，可得$(a+b)(c+d)$

$=a(c+d)/2+bc/2+d(a+b)/2+\beta$。

由此可得

$$\beta=\frac{1}{2}[2(a+b)(c+d)-a(c+d)-bc-d(a+b)]$$

$$=\frac{1}{2}(ac+bc+bd)。$$

(2)令x表示矩形$ABCD$的面積。因爲

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{a(c+d)}{2}\\ \beta=\dfrac{ac+bc+bd}{2}\\ \gamma=\dfrac{d(a+b)}{2}\end{cases}，$$

所以，可得

$x=(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$

$$=2\beta+ad=2\beta+\frac{2\alpha}{c+d}\cdot\frac{2\gamma}{a+b}=2\beta+\frac{4\alpha\gamma}{x}。$$

移項、化簡、解方程式，即得

$x^2-2\beta x-4\alpha\gamma=0$，$x=\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma}$。

因爲$x>0$，所以，$x=\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma}$。‖

【問題二】解：

將第一式乘以$\sin y$、第二式乘以$\cos y$、相減，即得

$\sin y\cos 4y+\sin 4y\cos y=0$，$\sin 5y=0$。

由此得

$y=\dfrac{k\pi}{5}$，$k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$。

當k是奇數$2n+1$（$n=0,1,2,3,4$），

$4y+y=(2n+1)\pi$。因此，得

$\cos 4y=-\cos y$，$\sin 4y=\sin y$，$x=\dfrac{3}{4}$。

因此，在此情形中，所求數對爲

$(x,y)=(\dfrac{3}{4},\dfrac{\pi}{5}),(\dfrac{3}{4},\dfrac{3\pi}{5}),$

$(\dfrac{3}{4},\dfrac{5\pi}{5}),(\dfrac{3}{4},\dfrac{7\pi}{5})$或$(\dfrac{3}{4},\dfrac{9\pi}{5})$。

當k是偶數$2n$（$n=0,1,2,3,4$），

$4y+y=2n\pi$。因此，得

$\cos 4y=\cos y$，$\sin 4y=-\sin y$，$x=\dfrac{5}{4}$。

因此，在此情形中，所求數對爲

$(x,y)=(\dfrac{5}{4},0),(\dfrac{5}{4},\dfrac{2\pi}{5}),$

$(\dfrac{5}{4},\dfrac{4\pi}{5}),(\dfrac{5}{4},\dfrac{6\pi}{5})$或$(\dfrac{5}{4},\dfrac{8\pi}{5})$。‖

【問題三】證：

(1) 因爲 101 是質數，所以，由 $(a+b)(a-b)=101$ 可得 $a+b=101$ 且 $a-b=1$。解得：$a=51$，$b=50$。

(2)因爲 101 是質數，所以，由 101 整除 $(a+b)(a-b)$ 可知 101 整除 $(a-b)$ 或 101 整除 $(a+b)$。101 整除 $(a-b)$ 表示將 a 與 b 分別除以 101，所得的餘數相等；

101 整除 $(a+b)$ 表示將 a 與 b 分別除以 101，所得的餘數之和等於 101。

因爲由 51 至 101 的五十一個正整數中，任何兩相異數的和與差都不是 101 的倍數，所以，滿足本題所述條件的正整數 n 必大於 51。我們將證明滿足本題所述條件的正整數 n 之最小値爲 52。

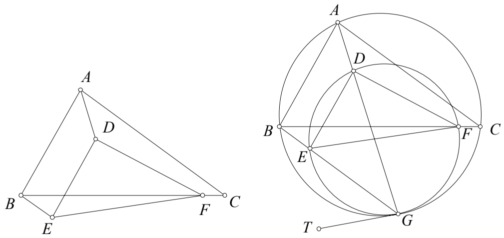
設 $a_1,a_2,\cdots,a_{52}$ 是任意 52 個相異正整數，對每個 $i=1,2,\cdots,52$，令 r_i 表示 a_i 除以 101 的餘數，又令

$$s_i=\begin{cases} r_i, & 若\ 0\le r_i\le 50; \\ 101-r_i, & 若\ 51\le r_i\le 100; \end{cases}$$

則 $s_1,s_2,\cdots,s_{52}$ 等 52 個整數都屬於集合 $\{0,1,2,\cdots,50\}$。因爲此集合只有 51 個元素，所以，依鴿籠原理知：必存在一對 i 與 j $(1\le i<j\le 52)$ 使得 $s_i=s_j$。由此進一步得 $r_i=r_j$ 或 $r_i+r_j=101$。不論是哪一種情形，都可得 $101\mid(r_i+r_j)(r_i-r_j)$，$101\mid(a_i+a_j)(a_i-a_j)$，亦即：$a_i^2-a_j^2$ 是 101 的倍數。 ||

【問題四】證：

設直線 AD 與 BE 相交於點 G。因爲 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BG}$ 平行，所以，$\angle AGB=\angle CAD$。再依 $\angle CAD=\angle ACB$ 的假設，可得 $\angle AGB=\angle CAD=\angle ACB$。



於是，A、B、G 與 C 四點共圓。另一方面，依 $\angle DFE=\angle ACB$ 的假設，可得 $\angle DFE=\angle ACB=\angle AGB=\angle DGE$。

於是，D、E、G 與 F 四點共圓。由此可知：$\triangle ABC$ 的外接圓與 $\triangle DEF$ 的外接圓相交於點 G。

設直線 GT 是 $\triangle ABC$ 的外接圓過點 G 的切線，其中點 T 與點 B、點 E 在直線 AD 的同側。依弦切角定理，可知 $\angle GAB=\angle BGT$。另一方面，因爲 $\overline{DE}$ 與 $\overline{AB}$ 平行，所以，$\angle GAB=\angle GDE$。於是，可得 $\angle GDE=\angle GAB=\angle BGT=\angle EGT$。

依弦切角定理，可知直線 GT 與 $\triangle DEF$ 的外接圓相切於點 G。因此，$\triangle ABC$ 的外接圓與 $\triangle DEF$ 的外接圓相切於點 G。 ||

二、筆試（二）

(一) 11。

(二) $-\dfrac{31}{25\sqrt{2}}$。

(三) $(5,18,70)$ 或 $(10,6,77)$。

(四) $\sqrt{19}$

(五) $6\sqrt{2}$

(六) 2380。

(七) $(-1,-2)$ 與 $(3,6)$。