數學解題「數或形」的替換

許建銘
高雄市立龍華國中

一、前言：

【問題】

(1)有一正六邊形 $ABCDEF$ ，連出其中 3 個不相鄰頂點的線段，則所形成的正三角形 ACE (如圖 1-1)面積爲原正六邊形的多少倍？

(2)若再連接其它 3 個不相鄰頂點的線段，則所形成另一個正六邊形 $PQRSTU$ (如圖 1-3)的面積爲原正六邊形的多少倍？

【解答】

(1)由圖 1-2 中，可知是 $\frac{1}{2}$ 倍。(2)由圖 1-4 至圖 1-7，可知是 $\frac{1}{3}$ 倍。

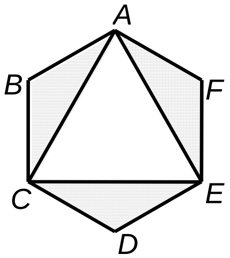


圖 1-1

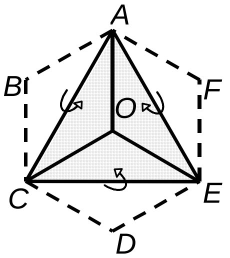


圖 1-2

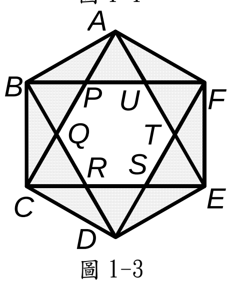


圖 1-3

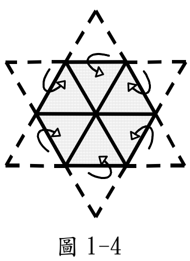


圖 1-4

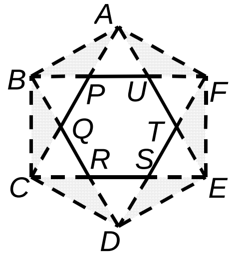


圖 1-5

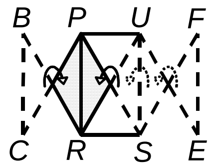


圖 1-6

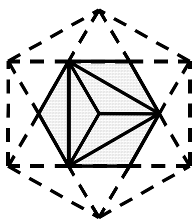


圖 1-7

以上的圖解觀念，並不全然是靜態的全等性質運用，而是蘊含一種「失而復得」的替換歷程。圖 1-6 中的替換過程，讓人聯想到馬戲團兩個空中飛人表演連續翻轉後，拉緊雙手的畫面(三組人一起交叉表演更精彩！)。至於在教學上，如果能夠運用教具(摺剪紙的方式也很適合)，操作示範「替換」的過程給學生看，必然也可以提高教學成效。

以下問題的兩種解題形式，雖是學生的想法，但對解題或教學而言，都值得肯定和介紹。

【問題】

如圖 1-8，求方格內 25 個數的總和。

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^4	2^5	2^6	2^7	2^8

圖 1−8

【解一】如圖 1-9

$\therefore$ 總和= $\boxed{31}\times(1+2^1+2^2+2^3+2^4) = 31\times31=961$

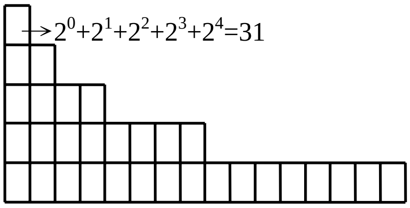


圖 1−9

【解二】

如圖 1-10(為了便於解說，將圖 1-8 作中心順轉 $45°$)，以 2^4 為基準值(使用「剖半」的觀念)，並利用 $2^a=2\times2^{a-1}$ 的性質進行替換和累加(也就是 2 個 2^1 等於 1 個 2^2，加上 3 個 2^2 後就等於 4 個 2^2；4 個 2^2 等於 2 個 2^3，再加上 4 個 2^3 就等於 6 個 2^3，……)：

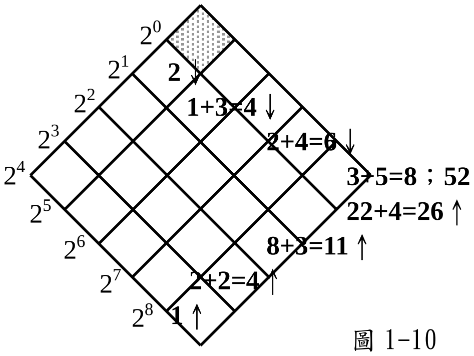


圖 1−10

$\therefore$ 總和 $=(8+52)\times2^4+2^0=960+1=961$

等值或等量替換，是數與形的替換方式中，基本且司空見慣的面貌。正如大家熟知拍攝電影武打或特技場面時，常常要由「替身」擔任演出。導演給予這些演員的任務，就是期待他(或他們)恰到好處地接續劇中演員的角色扮演，成功拍出符合劇情要求的效果。同樣的理由，數與形透過適當「替身」的輔助，可以開啓「換」然一新的局面，直接或間接達到有效的解程安排，而且替換形式具多樣化與多變性的本質，所以解題過程也處處充滿著趣味和驚奇。

【問題】

黃先生以每小時 5 公里的速度，從 2 公里遠的地方走路回家，此時他身旁的狗卻以每小時 10 公里的速度先跑回家，狗一回到家就立即回頭，再跑到黃先生身邊，然後又立即跑回家…像這樣來回跑來跑去的狗，在黃先生回到家之時，牠一共跑了多少路程。

【解一】

狗第一次跑回黃先生身邊時，人與狗共走了 4 公里。因為人和狗的速度合計為 15 公里，所以狗第一次跑回黃先生身邊時，兩者都花 $\frac{4}{15}$ 小時，而且狗跑 $\frac{8}{3}$ 公里，人走 $\frac{4}{3}$ 公里，兩者離家的距離皆縮短 $(2-\frac{4}{3})\div2=\frac{1}{3}$ (倍)。

狗如此來回反覆地跑，人與狗同時回到家時，狗一共跑了

$$\frac{8}{3}\left[1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+\cdots\cdots\right]$$
$$=\frac{8}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=4(\text{公里})$$

【解二】黃先生以每小時 5 公里的速度走 2 公里需 $\frac{2}{5}$ 小時。而狗不停地跑 $\frac{2}{5}$ 小時，跑的路程共 $10\times\frac{2}{5}=4$ 公里。

第二種解法如同由人走路的時間轉換出狗跑來跑去的時間，也就是說：從時間的角度來看，黃先生便是這條狗的「替身」。

【問題】

設一直角△的兩股和為 23，斜邊長為 17，求三角形面積。

以下讓我們看看兩位教師，各自對這個問題的解答方式(含口頭與文字解說)，以及他們掌控「替換」技巧的不同領略程度：

【甲師解答】

雖然已學過方程式的許多概念，但尚未學到如何解一元二次方程式。所以此題必須運用兩種代表數列式，答案也可以輕鬆被解出來。設兩股長分別為 a ，b

$$\begin{cases} a+b=23 \\ a^2+b^2=17^2 \end{cases}$$

$\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab \Rightarrow 23^2=17^2+2ab$

$\Rightarrow ab=120$ ，故三角形面積 $=\frac{1}{2}ab=60$

【乙師解答】

設一股長 x ，另一股長 $23-x$

$x^2+(23-x)^2=17^2 \quad \Rightarrow 2x^2-46x+529=289$

$\Rightarrow x^2-23x+120=0$

等到學會解一元二次方程式，就可解出 x ，然後就可求出兩股長與面積。不過雖然暫時無法解出 x ，還是可以求出面積的。

$\because$ 三角形面積 $=\frac{1}{2}x(23-x)=\frac{23x-x^2}{2}$

由 $x^2-23x+120=0 \Rightarrow 23x-x^2=120$

可得出三角形面積 $=\frac{23x-x^2}{2}=\frac{120}{2}=60$

還有一種很不錯的方法，就是運用兩種代表數列出一些等式和算式，再設法求出面積。

設兩股長分別為 a ，b

$\because \begin{cases} a+b=23 \\ a^2+b^2=17^2 \end{cases}$ ，三角形面積 $=\frac{1}{2}ab$

但如何算出 ab 的值呢？

$\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab \Rightarrow 23^2=17^2+2ab$

$\Rightarrow ab=120$

$\therefore$ 三角形面積 $=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times120=60$

如果還記得四個全等直角三角形，可拼出兩個正方形的圖形(如圖 1-11)，也可以運用它來解這個問題。圖中小正方形的邊長為直角三角形的斜邊長 17，大正方形的邊長就是直角三角形的兩股和 23，所以利用簡單的面積關係，就可算出每個直角三角形面積為：

$(23^2-17^2)\div4=(529-289)\div4=240\div4=60$

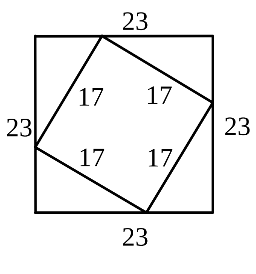


圖 1-11

筆者認為以上兩位教師的解答內容中，無論是 $a+b=23$ ，或是 $a^2+b^2=17^2$ ，還是

$23x-x^2=120$，甚至依賴圖形的觀點輔助解題，它們都是解題者解程發展與運用時，一個重要的「替換」形式或程序。

二、本文：

【問題一】

已知：$\frac{1}{x+5}=3$，求$\frac{1}{x+6}$的值。

【解一】

$$\frac{1}{x+5}=3\Rightarrow 1=3x+15\Rightarrow x=-\frac{14}{3}$$

$$\frac{1}{x+6}=\frac{1}{-\frac{14}{3}+6}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

【解二】

$$\frac{1}{x+5}=3\Rightarrow x+5=\frac{1}{3}\Rightarrow x+6=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{x+6}=\frac{3}{4}$$

【問題二】

已知：$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，求$\frac{2x+5xy-2y}{x-2xy-y}$的值。

【解一】

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3\Rightarrow y-x=3xy\Rightarrow x-y=-3xy$$

$$\frac{2x+5xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{2(x-y)+5xy}{(x-y)-2xy}=\frac{-xy}{-5xy}=\frac{1}{5}$$

【解二】

$$\frac{2x+5xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{2(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})+5}{(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})-2}=\frac{2\times(-3)+5}{(-3)-2}=\frac{1}{5}$$

【問題三】

$f(x)=x^3+3x^2-x+4$

$=a(x+3)^3+b(x+3)^2+c(x+3)+d$

，試求 a ，b ，c ，d 之值。

【解一】

(1)比較等號兩邊 x^3 的係數$\Rightarrow$ $a=1$

(2)由 $f(-3)=d$

$\Rightarrow -27+27+3+4=d\Rightarrow d=7$

(3)由 $f(-2)=a+b+c+d$

$\Rightarrow 10=1+b+c+7\Rightarrow b+c=2$

由 $f(-4)=-a+b-c+d$

$\Rightarrow -8=-1+b-c+7\Rightarrow b-c=-14$

$\therefore \begin{cases} b+c=2 \\ b-c=-14 \end{cases}\Rightarrow b=-6$ ，$c=8$

(4)$\therefore a=1$ ，$b=-6$ ，$c=8$ ，$d=7$

【解二】

設 $y=x+3\Rightarrow x=y-3$

$\therefore (y-3)^3+3(y-3)^2-(y-3)+4$

$=ay^3+by^2+cy+d$

$\Rightarrow y^3-6y^2+8y+7=ay^3+by^2+cy+d$

$\therefore a=1$ ，$b=-6$ ，$c=8$ ，$d=7$

【問題四】

長方體水槽內部空間為長 16 公分，寬 11 公分，高 30 公分的大小，若將底面為邊長 4 公分的正方形，且高 25 公分的長條狀鐵棒，插至水槽底部，此時水深恰為 20 公分(如圖 2-1-(a)與圖 2-2-(a))，則(1)將鐵棒上拉至距離水槽底部 5 公分時(如圖 2-1-(b))，水面會下降多少公分？(2)將鐵棒上拉，使露出水面的鐵棒高度再多出 5 公分時(如圖 2-2-(b))，水面會

下降多少公分？

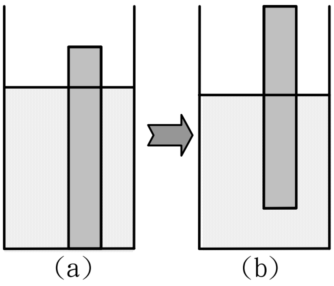


圖 2-1

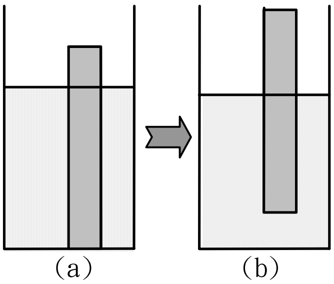


圖 2-2

第(1)小題的兩種解法：

【解一】

總水量 $=(16\times 11-4^2)\times 20=3200\,(c.c.)$

水位 5 公分以下的水量 $=16\times 11\times 5=880\,(c.c.)$

$3200-880=2320$，$2320\div 160=14\frac{1}{2}$

$20-(5+14\frac{1}{2})=0.5$，所以水面會下降 0.5 公分。

【解二】

$4^2\times 5=80$，$16\times 11-4^2=160$

$80\div 160=0.5$　所以水面會下降 0.5 公分。

第一種解法是從整個水量的分布變化去思考與計算水位的改變；第二種解法僅思考 5 公分長的鐵棒體積替換成水時，對水位產生的影響。而且從解題中，我們也可以了解鐵棒上拉時，鐵棒下端距水槽底部的高度，與鐵棒露出水面的增加高度並不相等。

第(2)小題的兩種解法：

【解一】

設水面下降 x 公分

$\therefore$ 鐵棒下端距水槽底部的高度為 $(5-x)$ 公分

$(5-x)\cdot 16=(16\times 11-4^2)\cdot x\Rightarrow 80-16x=160x$

$176x=80\Rightarrow x=\frac{80}{176}=\frac{5}{11}$，所以水面會下降 $\frac{5}{11}$ 公分。

【解二】

將多露出水面 5 公分的鐵棒替換成(或當成)水就可以了。

$4^2\times 5=80$，$80\div(11\times 16)=\frac{80}{176}=\frac{5}{11}$

所以水面會下降 $\frac{5}{11}$ 公分。

【問題五】

如圖 2-3 的 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle BAD=40^\circ$，$\overline{AE}=\overline{AD}$，求 $\angle CDE$ 的度數。

【解一】

設 $\angle A=x^\circ$

$\because \overline{AB}=\overline{AC}\quad \therefore \angle B=\angle C=\frac{180^\circ-x^\circ}{2}$

又 $\overline{AD}=\overline{AE}\quad \therefore \angle ADE=\angle AED=\frac{180^\circ-(x^\circ-40^\circ)}{2}$

$\therefore \angle CDE=\angle AED-\angle C=\frac{40^\circ}{2}=20^\circ$

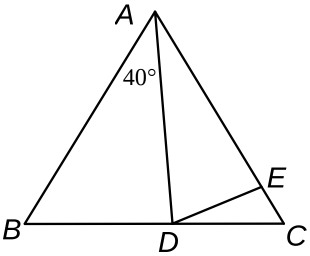


圖 2-3

【解二】

想到使用 ΔADE 的替身：全等形 $\Delta AD'E'$，且使 $\angle BAD' = 20°$ (如圖 2-4)。

由於 $\overleftrightarrow{D'E'} \,//\, \overline{BC}$ $\therefore \angle AFD' = \angle B$

依三角形外角定理可知：

$\angle AD'E' = \angle AFD' + 20° = \angle B + 20° = \angle ADE$

又 $\angle ADC = \angle ADE + \angle CDE = \angle B + 40°$

$\Rightarrow \angle CDE = 20°$

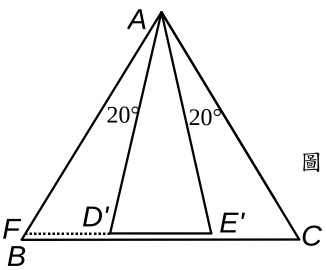


圖 2-4

【問題六】

如圖 2-5 的矩形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AD} = 12$，$\overline{AB} = 5$，P 爲 $\overline{AD}$ 上任一點，且 $\overline{PE} \perp \overline{AC}$，$\overline{PF} \perp \overline{BD}$，求 $\overline{PE} + \overline{PF}$。

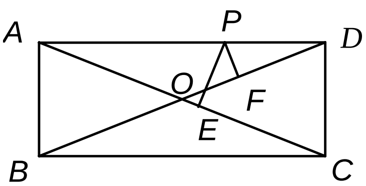


圖 2-5

【解一】

連 $\overline{BP}$，$\overline{CP}$ (如圖 2-6)

$\because \overline{PE} \perp \overline{AC}$，$\overline{PF} \perp \overline{BD}$

$\therefore \Delta APC$面積$= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{PE}$，

ΔBPD面積$= \frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{BD}$

又 $\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

ΔACD面積$= (\Delta APC + \Delta PCD)$面積

$= (\Delta APC + \Delta BPD)$面積

$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \overline{PE} + \frac{1}{2} \times 13 \times \overline{PF}$

$\Rightarrow \overline{PE} + \overline{PF} = \frac{60}{13}$

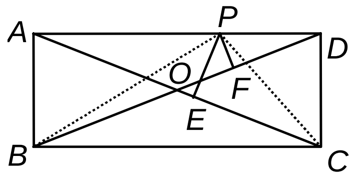


圖 2-6

【解二】

連 $\overline{OP}$，並作 $\overline{DG} \perp \overline{AC}$ (如圖 2-7)

$\Rightarrow \overline{DG} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$

$\because \overline{PE} \perp \overline{AC}$，$\overline{PF} \perp \overline{BD}$

$\therefore \Delta AOD$面積$= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{DG}$，$\Delta PDO$面積

$= \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times \overline{PF}$，$\Delta PAO$面積$= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{PE}$

$\because \Delta AOD$面積$= (\Delta PDO + \Delta PAO)$面積，$\overline{OA} = \overline{OD}$

$\therefore \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{DG} = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{PE} + \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times \overline{PF}$

$\Rightarrow \overline{PE}+\overline{PF}=\overline{DG}=\dfrac{60}{13}$

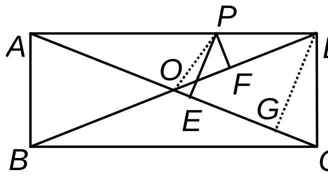


圖 2-7

【解三】

作 $\overline{DF'}\perp\overleftrightarrow{PE}$ ， $\overline{DG}\perp\overline{AC}$ ，垂足分別爲 F' 和 G (如圖 2-8)

$\Rightarrow \overline{DF'}\,//\,\overline{AC}\quad \therefore \angle F'DP=\angle DAO$

又 $\angle DAO=\angle FDP \quad \therefore \angle F'DP=\angle FDP$

$\because \angle DF'P=\angle DFP=90^\circ$ ， $\overline{DP}=\overline{DP}$

$\therefore \Delta DF'P$面積 $\cong \Delta DFP$面積 $\Rightarrow \overline{PF'}=\overline{PF}$

$\therefore \overline{PE}+\overline{PF}=\overline{PE}+\overline{PF'}=\overline{F'E}=\overline{DG}=\dfrac{12\times 5}{13}=\dfrac{60}{13}$

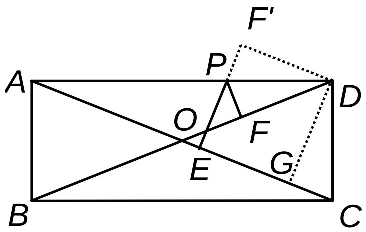


圖 2-8

【問題七】

如圖 2-9，求 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$的度數。

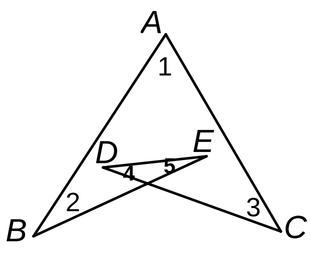


圖 2-9

【解一】

如圖 2-10

(1)連 $\overline{BC}\Rightarrow \angle 4+\angle 5=\angle 6+\angle 7$

(2) $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 6+\angle 7$

$=\angle 1+(\angle 2+\angle 6)+(\angle 3+\angle 7)$

$=\angle 1+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$

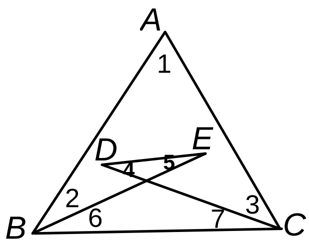


圖 2-10

【解二】

如圖 2-11

(1)延長 $\overleftrightarrow{BE}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F 。

(2) $\angle 4+\angle 5=\angle 6$ ， $\angle 3+\angle 6=\angle 7$

(3) $\angle 1+\angle 2+\angle 3+(\angle 4+\angle 5)$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 6=\angle 1+\angle 2+(\angle 3+\angle 6)$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 7=180^\circ$

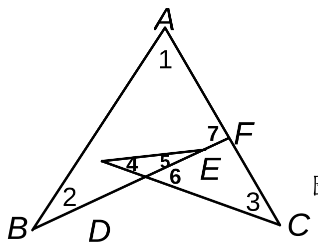


圖 2-11

【解三】

如圖 2-12

(1)延長 $\overleftrightarrow{DE}$ 分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 F 、 G 。

(2) $\angle 2+\angle 5=\angle 6$ ， $\angle 3+\angle 4=\angle 7$

(3) $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=\angle 1+(\angle 2+\angle 5)+(\angle 3+\angle 4)$

$=\angle 1+\angle 6+\angle 7=180^\circ$

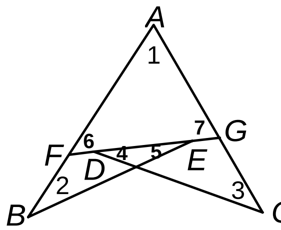


圖 2-12

【問題八】

如圖 2-13，$ABCD$ 與 $CEFG$ 皆爲正方形，若 $\overline{AB}=3$，求 ΔBDF 的面積。

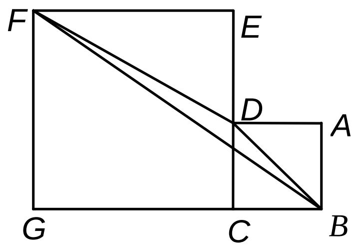


圖 2-13

【解一】

設 $\overline{EF}=a$

ΔBDF 面積

$=(\Delta BCD+$ 梯形 $CDFG-\Delta BFG)$ 面積

$=\frac{1}{2}\times 3^2+\frac{1}{2}(3+a)\cdot a-\frac{1}{2}a\times(a+3)=\frac{9}{2}$

【解二】

連 $\overline{CF}$ (如圖 2-14)

$\because \angle FCG=\angle DBC=45^\circ \quad \therefore \overline{DB}\,//\,\overline{FC}$

$\Rightarrow \Delta BDF$面積$=\Delta BDC$面積$=\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{9}{2}$

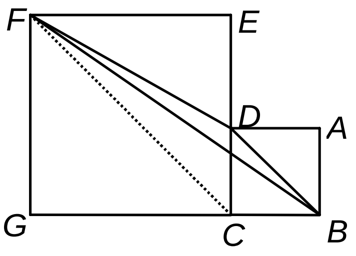


圖 2-14

【問題九】

如圖 2-15 的 $ABCD$ 與 $CEFG$ 皆爲矩形，且矩形 $ABCD$ 與矩形 $DEFH$ 的面積相等。若 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6$，ΔEHP面積$=42$，求 $\overline{CP}$。

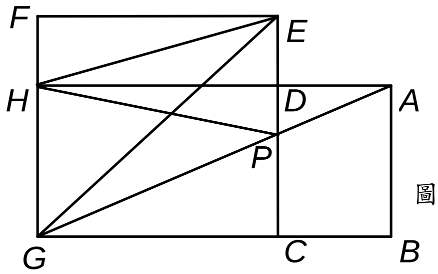


圖 2-15

【解一】

$\because \overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6 \quad \therefore ABCD$ 面積$=48$

$\Rightarrow DEFH$ 面積$=48 \quad \Rightarrow \Delta DEH$面積$=24$

ΔDHP面積$=42-24=18$

$\overline{DE}:\overline{DP}=24:18=4:3$

令 $\overline{DE}=4r$，$\overline{DP}=3r$

$\Rightarrow \overline{CP}=8-3r$，$\overline{CG}=\overline{EF}=\frac{48}{4r}=\frac{12}{r}$

$\because \Delta ADP\sim\Delta GCP \quad \therefore \overline{AD}:\overline{CG}=\overline{DP}:\overline{CP}$

$\Rightarrow 6:\frac{12}{r}=3r:(8-3r) \quad \Rightarrow r=\frac{2}{3}$

$\therefore \overline{CP}=8-3r=8-2=6$

【解二】

$\because \overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6 \quad \therefore ABCD$ 面積$=48$

$\Rightarrow DEFH$ 面積$=48 \quad \Rightarrow \Delta DEH$面積$=24$

$\therefore \Delta DHP$面積$=42-24=18$

又 ΔDGP面積$=\Delta DHP$面積$=18$

$\because \overline{AD}\,//\,\overline{CG} \quad \therefore \Delta ACP$面積$=\Delta DGP$面積$=18$

$\Rightarrow \Delta ADP$面積$=24-18=6$

$\therefore \overline{CP}:\overline{PD}=18:6=3:1$

$\Rightarrow \overline{CP}=8\times\frac{3}{4}=6$

【問題十】

如圖 2-16 中，$ABCD$ 為平行四邊形，$\overline{PR}$ // $\overline{BD}$，求證：ΔADP面積 $=\Delta ABR$ 面積。

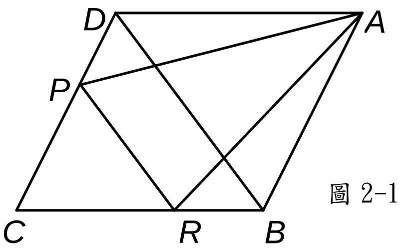


圖 2-16

【證一】

(1)連 $\overline{BP}$，$\overline{DR}$ (如圖 2-17)

(2) $\because ABCD$ 為平行四邊形 $\Rightarrow \overline{AD}$ // $\overline{BR}$

$\therefore \Delta ABR$面積 $=\Delta DBR$面積 (同底等高)

(3) $\because \overline{AB}$ // $\overline{DP}$　$\therefore \Delta ADP$面積 $=\Delta PBD$面積

(4) $\because \overline{PR}$ // $\overline{BD}$　$\therefore \Delta DBR$面積 $=\Delta PBD$面積

故 ΔADP面積 $=\Delta ABR$面積

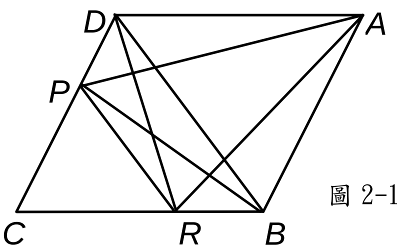


圖 2-17

【證二】

$\because \overline{PR}$ // $\overline{BD}$　$\therefore \dfrac{\overline{DP}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BR}}{\overline{BC}}$

設平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 s

$\Rightarrow \Delta ADP$面積 $= s\times\dfrac{\overline{DP}}{\overline{CD}}\times\dfrac{1}{2}= s\times\dfrac{\overline{BR}}{\overline{BC}}\times\dfrac{1}{2}$

$=\Delta ABR$面積　$\therefore \Delta ADP$面積 $=\Delta ABR$面積

【問題十一】

如圖 2-18 中，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 兩弦交

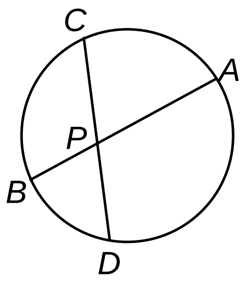


圖 2-18

於圓內點 P，試證：$\angle APC=\dfrac{1}{2}$ (弧 $BD+$弧 AC)的度數。

【證一】

如圖 2-19

(1)連 $\overline{AD}$

(2) $\because \angle APC=\angle A+\angle D$

又 $\angle A=\dfrac{1}{2}$ 弧 BD 度數，$\angle D=\dfrac{1}{2}$ 弧 AC 度數

$\therefore \angle APC=\dfrac{1}{2}$ (弧 $BD+$弧 AC)的度數

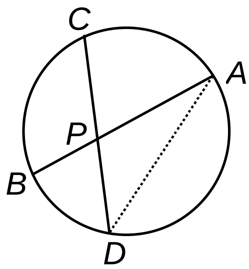


圖 2-19

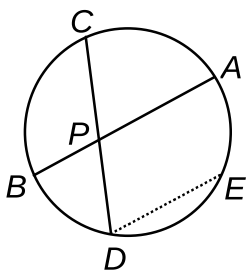


圖 2-20

【證二】

如圖 2-20

(1)過 D 作弦 $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$

$\Rightarrow \angle APC = \angle D$，弧 AE 度數＝弧 BD 度數

(2) $\because \angle D = \frac{1}{2}$ 弧 CAE 度數

$\therefore \angle APC = \frac{1}{2}$(弧 AE + 弧 AC)度數

$= \frac{1}{2}$(弧 BD + 弧 AC)度數

【問題十二】

如圖 2-21 中，$\angle C = 90°$，$\overline{AC} = 3$，$\overline{BC} = 4$，若 I 為 ΔABC 的內心，且 $\overline{ID} // \overline{AC}$，$\overline{IE} // \overline{BC}$，求 ΔIDE 的周長。

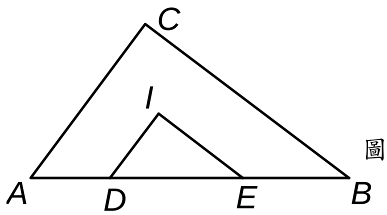


圖 2-21

【解一】

作 $\overline{CF} \perp \overline{AB}$，$\overline{IH} \perp \overline{AB}$ (如圖 2-22)

$\because \angle C = 90°$，I 為 ΔABC 的內心

$\therefore \overline{CF} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$，$\overline{IH} = \frac{3+4-5}{2} = 1$

$\because \Delta IDE \sim \Delta CAB$

$\therefore \Delta IDE$ 周長: ΔCAB 周長 $= \overline{IH} : \overline{CF} = 5:12$

$\Rightarrow$ ΔIDE 的周長 $= (3+4+5) \times \frac{5}{12} = 5$

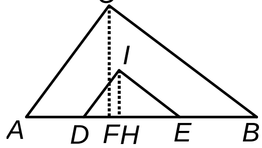


圖 2-22

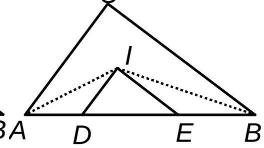


圖 2-23

【解二】

連 $\overline{IA}$ 和 $\overline{IB}$ (如圖 2-23)

$\because I$ 為 ΔABC 的內心　$\therefore \angle IAC = \angle IAD$

又 $\overline{ID} // \overline{CA}$

$\therefore \angle IAC = \angle DIA$　$\Rightarrow \angle DAI = \angle DIA \Rightarrow \overline{DI} = \overline{DA}$

同理可證得：$\overline{EI} = \overline{EB}$

$\Rightarrow$ ΔIDE 的周長 $= \overline{DI} + \overline{EI} + \overline{DE}$

$= \overline{DA} + \overline{EB} + \overline{DE} = \overline{AB} = 5$

【問題十三】

如圖 2-24 中，$ABCD$ 為正方形，$\overline{AB}$ 為半圓弧 AB 的直徑，也是四分之一弧 BD 的半徑，若 P 為弧 BD 上異於 B 和 D 的任一點，且 $\overline{PM} \perp \overline{BC}$，$\overline{PA}$ 交弧 AB 於 Q，試證：$\overline{PM} = \overline{PQ}$。

【證一】

如圖 2-25，連 $\overline{BP}$，$\overline{BQ}$

$\because AB$ 弧是半圓

$\therefore \angle BQA = 90° \Rightarrow \angle PQB = 90°$

$\Rightarrow \angle PMB = 90° = \angle PQB$

$\because \overline{PM} // \overline{AB} \Rightarrow \angle 1 = \angle ABP$

$\overline{AP} = \overline{AB} \Rightarrow \angle 2 = \angle ABP$　$\therefore \angle 1 = \angle 2$

又 $\overline{PB} = \overline{PB}$　$\therefore \Delta PBM \cong \Delta PBQ \Rightarrow \overline{PM} = \overline{PQ}$

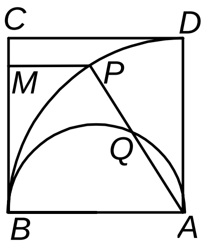


圖 2-24

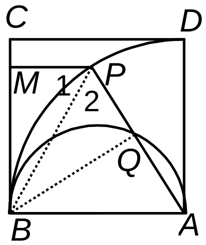


圖 2-25

【證二】

如圖 2-26，連 $\overline{BQ}$，作 $\overline{PR} \perp \overline{AD}$

$\because AB$ 弧是半圓　$\therefore \angle BQA = 90°$

$\Rightarrow \angle ARP = 90° = \angle BQA$

$\because \overline{PR} // \overline{AB} \Rightarrow \angle RPA = \angle QAB$

又 $\overline{AP} = \overline{AB}$　$\therefore \Delta APR \cong \Delta BAQ \Rightarrow \overline{PR} = \overline{AQ}$

$\therefore \overline{MR} - \overline{PR} = \overline{AP} - \overline{AQ} \Rightarrow \overline{PM} = \overline{PQ}$

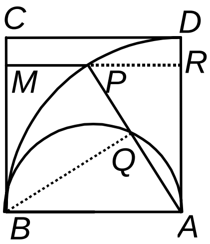


圖 2-26

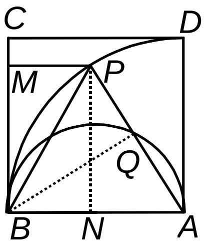


圖 2-27

【證三】

如圖 2-27，連 $\overline{BQ}$ ，作 $\overline{PN} \perp \overline{AB}$

$\because AB$ 弧是半圓　$\therefore \angle BQA = 90° \Rightarrow \overline{BQ} \perp \overline{AP}$

$\because \Delta ABP$ 爲等腰三角形

$\therefore \overline{PQ} = \overline{BN}$ (線對稱性質)

又 $PMBN$ 爲矩形　$\therefore \overline{PM} = \overline{BN}$　$\Rightarrow \overline{PM} = \overline{PQ}$ 。

【問題十四】如圖 2-28 中，$ABCD$ 爲正方形，P 爲內部一點，且 $\overline{AP} = 1$ ，$\overline{BP} = 3$ ，$\overline{DP} = \sqrt{7}$ ，求 $ABCD$ 的面積。

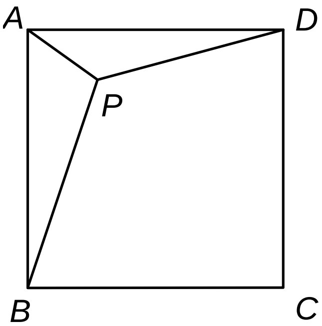


圖 2-28

【解一】

如圖 2-29，以 A 爲中心，將 ΔABP 逆時針旋轉 $90°$ 成 $\Delta ADP'$ 。

連 $\overline{PP'} \Rightarrow \angle P'AP = 90°$ ，$\overline{P'A} = \overline{PA} = 1$

$\therefore \overline{P'P} = \sqrt{2}$ ，$\angle APP' = 45°$

$\because \overline{PD} = \sqrt{7}$ ，$\overline{P'D} = \overline{PB} = 3$

$\therefore \overline{PP'}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{P'D}^2 \Rightarrow \angle P'PD = 90°$

$\Rightarrow \angle APD = \angle APP' + \angle P'PD = 135°$

作 $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{DP}$ ，令兩直線交點爲 E

$\Rightarrow \overline{AE} = \overline{PE} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{7}\right)^2$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \sqrt{14} + 7 = 8 + \sqrt{14}$

$\therefore ABCD$ 面積爲 $8 + \sqrt{14}$

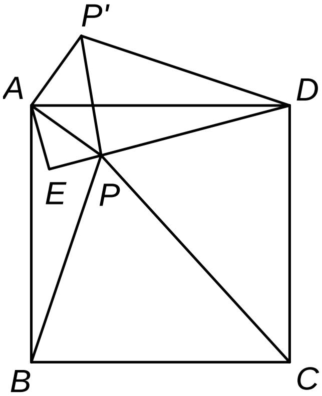


圖 2-29

【解二】

如圖 2-30，連 $\overline{CP}$ ，過 P 分別作 $\overline{PE} \perp \overline{AB}$ ，$\overline{PF} \perp \overline{BC}$ ，$\overline{PG} \perp \overline{CD}$ ，$\overline{PH} \perp \overline{AD}$ ，垂足分別爲 E 、 F 、 G 、 H 。

令 $\overline{PE} = a$ ，$\overline{PG} = b$ ，$\overline{PH} = c$ ，$\overline{PF} = d$ ，$a + b = c + d = x$

$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$

$\Rightarrow \overline{PC} = \sqrt{15}$

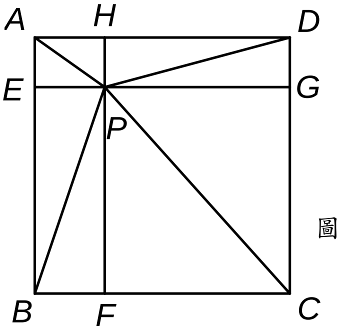


圖 2-30

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+c^2=7 \\ a^2+d^2=9 \\ b^2+d^2=15 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=16$$

$$b^2-a^2=6 \Rightarrow (b+a)(b-a)=6$$

$$\Rightarrow b-a=\frac{6}{a+b}=\frac{6}{x}$$

由 $(a+b)^2-(b-a)^2=4ab$

推得 $x^2-\left(\frac{6}{x}\right)^2=4ab \Rightarrow 4ab=x^2-\frac{36}{x^2}$

$$d^2-c^2=8 \Rightarrow (d+c)(d-c)=8$$

$$\Rightarrow d-c=\frac{8}{c+d}=\frac{8}{x}$$

由 $(c+d)^2-(d-c)^2=4cd$

推得 $x^2-\left(\frac{8}{x}\right)^2=4cd \Rightarrow 4cd=x^2-\frac{64}{x^2}$

$$(a+b)^2+(c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd$$

$$2x^2=16+\frac{1}{2}\times\left(x^2-\frac{36}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(x^2-\frac{64}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2-16+\frac{50}{x^2}=0 \Rightarrow x^4-16x^2+50=0$$

令 $x^2=P \quad \therefore P^2-16P+50=0$

$$P=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\times 50}}{2}=8\pm\sqrt{14}(8-\sqrt{14}\text{不合})$$

$\therefore ABCD$ 面積爲 $8+\sqrt{14}$

【解三】

如圖 2-31，過 P 作 $\overline{PE}\perp\overline{AB}$ ， $\overline{PF}\perp\overline{BC}$ ，垂足分別爲 E 、 F 。

令 $\overline{AB}=x$ ， $\overline{AE}=a$ ， $\overline{AF}=b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1^2=1\cdots\cdots(1) \\ (x-a)^2+b^2=3^2=9\cdots\cdots(2) \\ (x-b)^2+a^2=(\sqrt{7})^2=7\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

$$(2)-(1) \Rightarrow x^2-2ax=8 \Rightarrow a=\frac{x^2-8}{2x}\cdots\cdots(4)$$

$$(3)-(1) \Rightarrow x^2-2bx=6 \Rightarrow b=\frac{x^2-6}{2x}\cdots\cdots(5)$$

(4)和(5)同時代入(1)

$$\Rightarrow \frac{x^4-16x^2+64}{4x^2}+\frac{x^4-12x^2+36}{4x^2}=1$$

$$\Rightarrow x^4-16x^2+50=0$$

$$\Rightarrow x^2=8\pm\sqrt{14}(8-\sqrt{14}\text{不合})$$

$\therefore ABCD$ 面積爲 $8+\sqrt{14}$

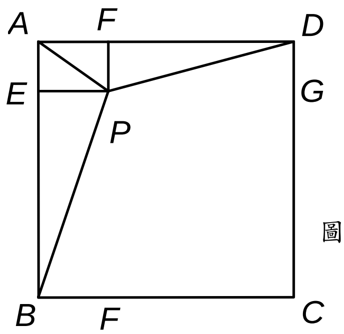


圖 2-31

【問題十五】

設 $x\in R$ ，求 $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-6x+25}$ 之最小值。

【解一】

令 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-6x+25}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x+5)^{-\frac{1}{2}}(2x-2)$$

$$+\frac{1}{2}(x^2-6x+25)^{-\frac{1}{2}}(2x-6)$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+25}}$$

$$=\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-6x+25})+(x-3)(\sqrt{x^2-2x+5})}{\sqrt{(x^2-2x+5)(x^2-6x+25)}}$$

假如 $f'(x)=0$

$$\Rightarrow (x-1)(\sqrt{x^2-6x+25})=(3-x)(\sqrt{x^2-2x+5})$$

$$=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x^2-6x+25)-(3-x)^2(x^2-2x+5)=0$$

$$\Rightarrow (x^2-2x+1)(x^2-6x+25)$$

$$-(x^2-6x+9)(x^2-2x+5)=0$$

$$\Rightarrow 12x^2-8x-20=0\Rightarrow 3x^2-2x-5=0$$

$$\Rightarrow (3x-5)(x+1)=0$$

$\therefore x=\frac{5}{3}$ 或 $x=-1$ (不合 $\because f'(-1)\neq 0$)

當 $x=\frac{5}{3}$ 時， $f(x)$ 有最小值

$$f(\frac{5}{3})=\sqrt{\frac{40}{9}}+\sqrt{\frac{160}{9}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}+\frac{4\sqrt{10}}{3}=2\sqrt{10}$$

【解二】

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-6x+25}$$

$$=\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}$$

若令 $A(1,2)$ ， $B(3,4)$ ，本題即是在坐標平面的 x 軸上，找出一點 $P(x,0)$ ，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的值最小。

如圖 2-32，由相關幾何性質知 $\overline{A'B}$ 與 x 軸的交點，即是要找的 P 點，而 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值就是 $\overline{A'B}$ 的值。

$$\overline{A'B}=\sqrt{(3-1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$$

$\therefore$ $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-6x+25}$ 之最小值爲 $2\sqrt{10}$

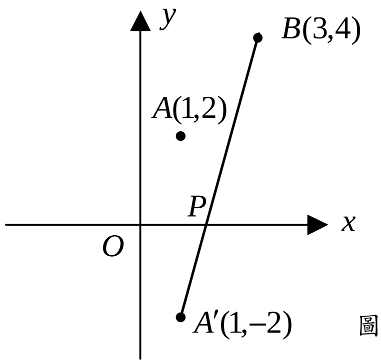


圖 2-32

問題十五看似不易處理的代數運算問題，若以微分的觀念計算求解，大多數的中學生恐怕會覺得困難，但轉借爲坐標平面上的圖形問題進行思考，不用幾個驟步，問題就解決了。以下幾個問題的不同解題方式與對照，也是想藉它們說明：善用數形替換的各式解題思維，不祇是改進解題技巧的一種可行途徑，還可藉此引導學生欣賞科學知識環環相扣的真理之美，以及追求各領域間融會貫通的學習之道。

【問題十六】

一堆蘋果，若分給甲班每人可分得 10 個，分

給乙班每人可分得 15 個，則分給甲、乙兩班時，每人可分到多少個？

【解一】

設甲班有 x 人，乙班有 y 人

由 $10x=15y \Rightarrow x=\frac{3}{2}y$　所以甲、乙兩班每人

可分得 $\frac{15y}{x+y}=\frac{15y}{\frac{3}{2}y+y}=\frac{30y}{5y}=6$(個)

【解二】

$$\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=\frac{30}{3+2}=6\text{ (個)}$$

設蘋果有 x 個，甲班有 $\frac{x}{10}$ 人，乙班有 $\frac{x}{15}$ 人的解法原理與此解是一致的。

【問題十七】

如圖 2-33 中，已知 $\overline{AB}=10$，$\overline{CD}=15$，$\overline{AB}//\overline{CD}$，若 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 E，且 $\overline{EF}//\overline{AB}$，求 $\overline{EF}$。

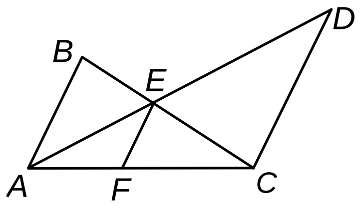


圖 2-33

【解法】

由 $\overline{AB}//\overline{CD}//\overline{EF}$ 和相似三角形性質可

推得 $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{EF}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{FC}+\overline{AF}}{\overline{AC}}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{\overline{EF}}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{CD}}$　　$\Rightarrow \overline{EF}=\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}$

故 $\overline{EF}=6$　　(※請比較問題十六之解二)

我們如果將圖 2-33 中 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的長度，分別當成甲、乙兩班每位學生分到的蘋果數；而 $\overline{AF}$ 與 $\overline{CF}$ 的長度分別當成乙班的人數與甲班的人數，讀者就可以清楚：只要決定了平行線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的大小，不管圖形上 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 之間的距離如何改變，$\overline{EF}$ 永遠是一個定値，而它正是將蘋果同時分給甲、乙兩班時，每人分到的蘋果數。

【問題十八】

某人由甲地出發至乙地，已知由甲至乙每小時走 6 公里，而由乙回到甲每小時走 4 公里，若來回兩地的路程相同，求此人來回一趟的平均速率。

【解答】

設甲、乙兩地相距 x 公里，出去費時 $\frac{x}{6}$ 小時；

回來費時 $\frac{x}{4}$ 小時，所以平均速率爲

$$\frac{2x}{\frac{x}{6}+\frac{x}{4}}=\frac{2x}{\frac{5x}{12}}=\frac{24}{5}\text{ (小時)}$$

當然也可以將兩地距離的 x 公里替換成 1 來計算：

$$\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=\frac{24}{2+3}=\frac{24}{5}\text{ (小時)}$$

【問題十九】

如圖 2-34，已知 $\overline{AB}=4$ ，$\overline{CD}=6$ ，$\overline{AB}//\overline{CD}$，若 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 P，且 $\overline{EF}//\overline{AB}$，求 $\overline{EF}$ 。

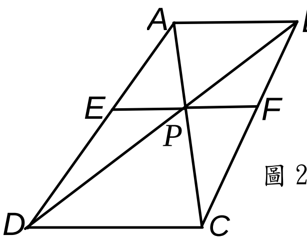


圖 2-34

【解法】

對照問題十七的解法說明，可推得

$$\frac{1}{\overline{EP}}=\frac{1}{\overline{FP}}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{CD}}\Rightarrow\frac{2}{\overline{EF}}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{CD}}$$

$$\therefore\frac{2}{\overline{EF}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\Rightarrow\overline{EF}=\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}\quad，故\ \overline{EF}=\frac{24}{5}$$

(※請比較問題十八之解法)

若將圖 2-34 中 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的長度，分別當成甲到乙與乙到甲的行進速率，則可以確定：只要決定了平行線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的大小，不管圖形上 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 兩平行線間的距離如何改變，與 $\overline{AB}$ (過 P 點)平行的 $\overline{EF}$ 永遠是一個定值，以下將進一步說明此定值的大小，正是來回一趟的平均速率。

作 $\overleftrightarrow{AF}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$，並令交點爲 G(如圖 2-35)。

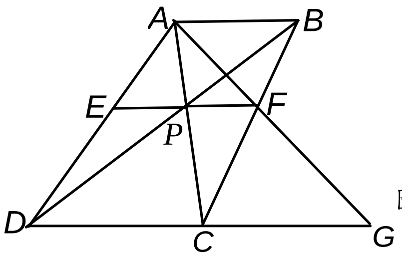


圖 2-35

我們將很容易推知 $\overline{CD}=\overline{CG}$ 。

若 $\overline{AE}$ 與 $\overline{DE}$ 的長度分別表示乙至甲與甲至乙的行進時間，則 $\overline{AD}$ 就是來回一趟的總時間。

$$\because\frac{\dfrac{\overline{甲乙}\times 2}{來回一趟的總時間}}{\dfrac{\overline{甲乙}}{乙至甲的時間}}=\frac{平均速率}{乙至甲的速率}$$

$$\Rightarrow\frac{乙至甲的時間}{來回一趟的總時間}=\frac{平均速率}{乙至甲的速率\times 2}$$

又由圖 2-35 $\Rightarrow\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DG}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{CD}\times 2}$

對照上面幾個等式並利用相似三角形的對應性質，就足以說明爲何定值 $\overline{EF}$ 就是平均速率的理由了。

【數學遊戲】

五階的魔方陣（Magic Square）與拉丁方陣（Latin Square）

若 a_1 ，a_2 ，……，a_{24} ，a_{25} 是一個等差數列（令公差爲 d ），如何將它們全部安排在一個 5×5 的方陣中，使每列、每行以及兩主對角線的五個數的和都相等呢？

首先，先將 25 個數依序巧妙排列如圖 2-36，再以逐步「置換」的方式完成五階魔方陣。

(1)若令 $\sum_{i=1}^{25}a_i=S$ ，由圖 2-37 中我們發現四條對稱軸上的五個數的和皆等於 $5\times a_{13}=\frac{1}{5}S$ ，所以考慮任何置換時，這四條虛線上的數，將以更動至原線上的方格爲原則。

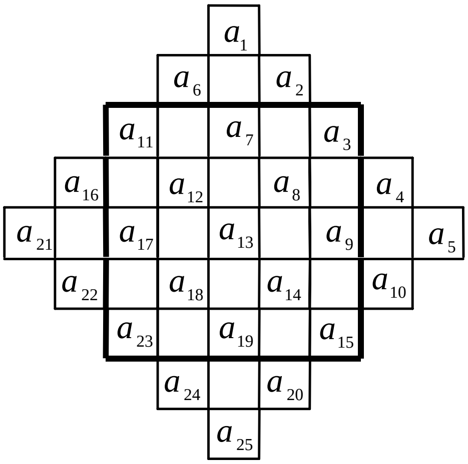


圖 2-36

(2)由於 $a_7 = a_6 + d$ ， $a_{13} = a_{12} + d$ ， $a_{19} = a_{18} + d$ ， $a_{25} = a_{24} + d$ ，但 $a_5 = a_1 + 4d$ (以上請對照圖 2-37)

$\Rightarrow\ a_6 + a_{12} + a_{18} + a_{24} + a_5 = \frac{1}{5}S$ ，所以可將 a_5 置換至 a_{12} 與 a_{18} 之間的方格內，同理再置換 a_{21} ， a_1 和 a_{25} 至適當方格(如圖 2-38)，則八條虛線上的五個數的和皆等於 $\frac{1}{5}S$ 。

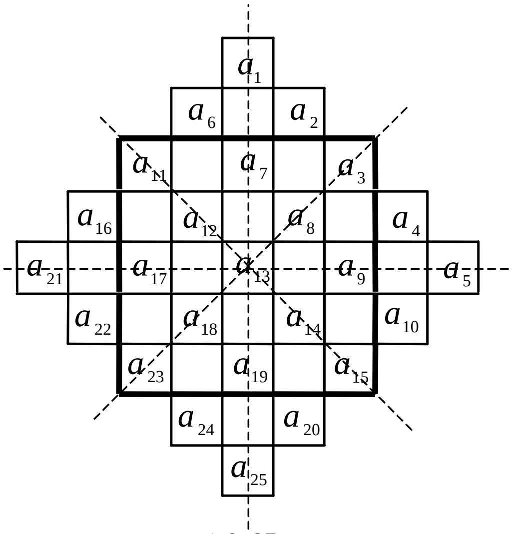


圖 2-37

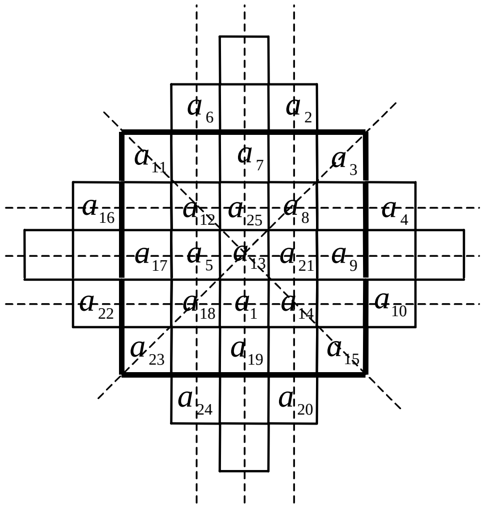


圖 2-38

(3)若將 a_4 置換至 a_{11} 與 a_{17} 之間的方格內(如圖 2-39)，由於 $a_{12} = a_{11} + d$ ， $a_5 = a_4 + d$ ， $a_{18} = a_{17} + d$ ， $a_{24} = a_{23} + d$ ，但 $a_{10} = a_6 + 4d$ (以上請對照圖 2-39) ，所以可將 a_{10} 置換至 a_{17} 與 a_{23} 之間的方格內，

$\Rightarrow\ a_{11} + a_4 + a_{17} + a_{23} + a_{10} = \frac{1}{5}S$ ，同理再置換 a_{16} 、 a_{22} ； a_6 、 a_2 ； a_{24} 、 a_{20} 至適當方格(如圖 2-40)，就可完成 a_1 ， a_2 ，……， a_{24} ， a_{25} 的五階魔方陣。

(4)若將圖 2-40 中 a_i 各數替換爲下標 i 的大小，就可完成 1 至 25 的五階魔方陣(如圖 2-41)，其每列、每行以及兩條主對角線上五個數的和皆爲 65，而 65 也稱做這個方陣的魔數（Magic Number）。

(5)圖 2-41 中的各數，若爲 5 的倍數，將它替換成 5；若不爲 5 的倍數，則將它替換爲該數除以 5 的餘數，替換完成後，就可產生一個拉丁方陣（如圖 2-42，其每列、每行都恰有 1、2、3、4、5 中的每一個數）。

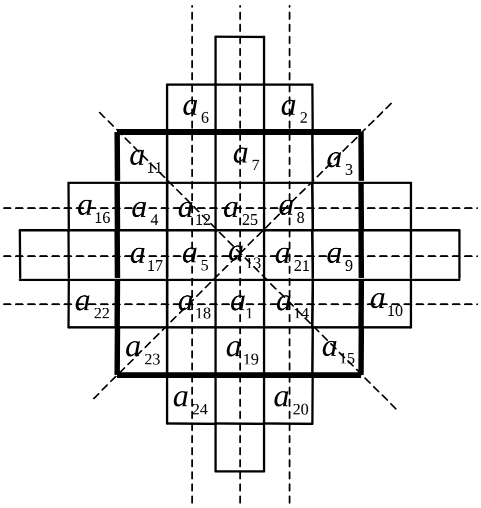


圖 2-39

a_{11}	a_{24}	a_7	a_{20}	a_3
a_4	a_{12}	a_{25}	a_8	a_{16}
a_{17}	a_5	a_{13}	a_{21}	a_9
a_{10}	a_{18}	a_1	a_{14}	a_{22}
a_{23}	a_6	a_{19}	a_2	a_{15}

圖 2-40

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

圖 2-41

(6)其它奇數階的魔方陣與拉丁方陣，皆可仿以上的置換觀念建造完成，至於不同階數的魔方陣、拉丁方陣之各式構建法，請讀者自行參考相關書籍。

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

圖 2-42

三、結語：

有一個英國人發現，將電流通過很細的白金絲，會發出微弱的光，但白金絲的熔點只有1772°C ，所以發光不久就燒斷了。愛迪生(1847-1931)明白這個道理之後，便決心解決發光材料的問題。他前前後後替換將近 1600 種材料實驗，最後才選用熔點超過 3500°C 的炭絲當作材料。

愛迪生以炭化紙條和炭化棉條，分別成功做出燈絲，同時爲了避免炭絲氧化，便抽掉玻璃泡中的空氣，後來因爲這些材質脆弱容易燒斷而失敗。最後他再以竹條燒成的炭絲做出燈絲，終於製成壽命長達 1200 小時以上的燈泡。

以上「愛迪生發明電燈」的故事，相信爲許多人耳熟能詳。這個故事不只富有生命的啓示：「成功靠一分天賦與九十九分努力」；從科學的觀點來看，它更揭示：「替換」一直是、也應該是促進人類文明發達，一種知性與理性的科學態度和行爲。

爲什麼我會這樣說呢？例如對鞋子有專

門研究的人發現：再合腳的鞋子，穿久不換，鞋子在地上擠壓、摩擦，容易導至足部某些部位變形，甚至角質層增生而形成雞眼。就是這個理由，讓有些人同時擁有好幾雙鞋，以便適時替換穿著。而製鞋的專家也依此作為製鞋的改進方向，研製出各種舒適、符合人體工學的鞋子，這又使得鞋子的功能大為提升。

「傳統」就像鞋子(有人說包袱)，如果新鞋不輸舊鞋好穿，而且功能更齊備，即使某些款式「看不習慣」（違反民心需求，自然會被淘汰），仍值得花些時間嘗試或適應。「新式教育」如果可以保留「傳統教育」的優點，同樣值得隨時敞開「替換」心境的人，一起拿出智慧和行動，共同創造更優質的教育環境。

（上承第 52 頁）

2.5 虛構例子：消耗 39.90 mL的 0.1000 mol L^{-1} EDTA溶液與 35.00 mL的 0.01000 mol L^{-1} $Na_2S_2O_3$溶液。計算分子式$La_xM_{(2-x)}CuO_4$之係數X〈M為Ca和/或Sr和/或Ba〉，並寫出此超導體之正確分子式。

鑭所消耗的部份

$$= [39.90 - (35.00/10 \cdot 4)]\ \text{mL} \quad = 25.90\ \text{mL} \qquad (2)$$

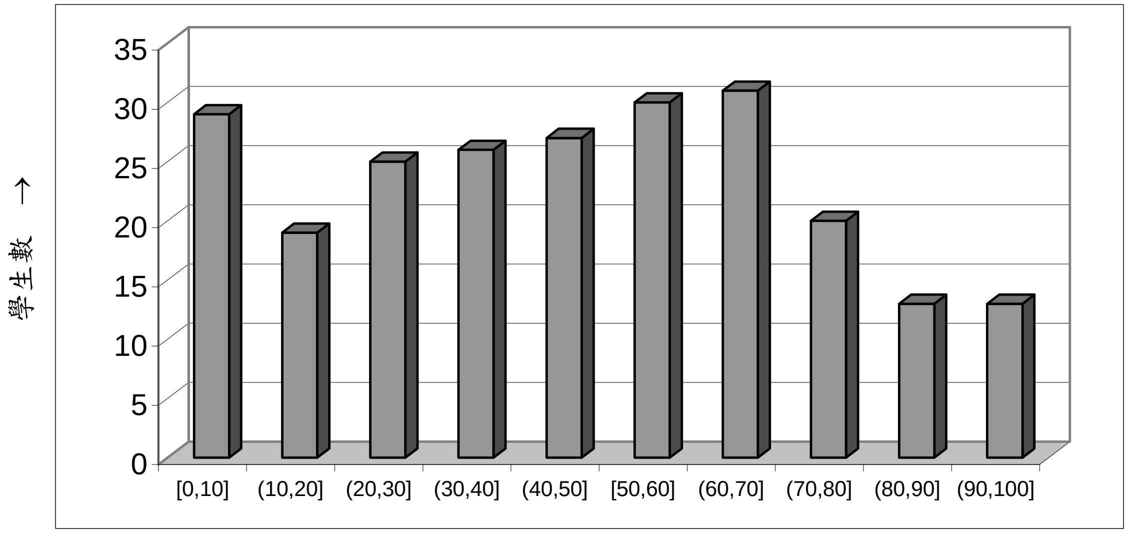
銅所消耗的部份

$$= (39.90 - 25.90)\ \text{mL} \quad = 14.00\ \text{mL} \qquad (2)$$

n(La) : n(Cu) = 25.90 : 14.00 = 1.85 : 1

係數X：1.85　　分子式：$La_{1.85}M_{0.15}CuO_4$

本大題總藍分：113 (100%)，平均得分：51.8 (45.9%)，成績分佈圖:



得分百分比 →