# 只要餘數小於除數，就可以了嗎？

劉曼麗*　侯淑芬**

*國立屏東師範學院　數理教育研究所

**高雄市十全國民小學

在進行除法計算求商時，我們通常會以「餘數小於除數」來決定商數。另外，在給出除數、商數和餘數以求被除數時，也是以「餘數小於除數」來決定題目，如□÷4＝1.1 …0.6，求□＝？尤其是最近看到坊間的一些測驗卷也是如此出題。然而，只要餘數小於除數就可以了嗎？請大家再思考看看。如果你的答案是肯定的，請看下面兩個例子。如果是否定的，也請你想想看，應該如何說明？

**例題一：□÷4＝1.1 …0.6，求□＝？**

乍看之下，例題中的算式符合餘數 0.6 小於除數 4 的要求，而大部分的人也會以□＝1.1×4＋0.6，求出被除數□＝5。然而，若將求得的被除數 5 代入□內驗算便會發現商數竟然是 1.2，餘數是 0.2：

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ 4\,\overline{)\;5\phantom{.0}} \\ \underline{4\phantom{.0}} \\ 1\,0 \\ \underline{8} \\ 0.2 \end{array}$$

直式 1-1

此與原題目中，商數爲 1.1，餘數爲 0.6 並不符合。令人非常驚訝！到底是哪裡出了問題呢？

我們再試著將 5÷4 以直式計算，並取商數爲 1.1，所進行的步驟分解如下：

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4\,\overline{)\;5} \\ \underline{4} \\ 1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 1.1 \\ 4\,\overline{)\;5\phantom{.0}} \\ \underline{4\phantom{.0}} \\ 1\,0 \\ \underline{4} \\ 0.6 \end{array}$$

步驟一　　步驟二

直式 1-2

將直式 1-2 與 1-1 對照後，我們可以很快發現，直式 1-2 在計算到第二步驟時，若要使商數爲 1.1 則只能減掉 0.4，這樣的情形其實是沒有做完的，因爲從 0.6 中還可以再分出一個 0.4。由此不難發現，如果題目要求商數到小數第一位時，必須考慮 5 減 4 後剩下的數還可以再分成幾個 0.4，也就是說餘數必須要小於 0.4（4 的 0.1 倍），否則商數還可繼續增加。總而言之，此時合理餘數的判斷標準已不只是比除數小，而是比除數的 0.1 倍還要小。

**例題二：□÷4＝1.12…0.21，求□＝？**

在算式中，餘數既小於除數也小於除數的 0.1 倍，但這樣就合理了嗎？我們同樣以□＝1.12×4＋0.21，求出被除數□＝4.69 後，再以直式驗算看看。結果發現求得的商數爲 1.17，而餘數爲 0.01：

$$
\begin{array}{r}
1.17 \\
4\,\overline{)\;4.69} \\
\underline{4\phantom{.69}} \\
6\phantom{9} \\
\underline{4\phantom{9}} \\
29 \\
\underline{28} \\
0.01
\end{array}
$$

直式 2-1

由此可見，原題目的設計也出了問題。同樣地，我們再試著將 4.69÷4 以直式計算，並取商數為 1.12，所進行的步驟分解如下：

$$
\begin{array}{r}
1\phantom{.69} \\
4\,\overline{)\;4.69} \\
\underline{4\phantom{.69}}
\end{array}
\;\longrightarrow\;
\begin{array}{r}
1.1\phantom{9} \\
4\,\overline{)\;4.69} \\
\underline{4\phantom{.69}} \\
6\phantom{9} \\
\underline{4\phantom{9}} \\
2\phantom{9}
\end{array}
\;\longrightarrow\;
\begin{array}{r}
1.12 \\
4\,\overline{)\;4.69} \\
\underline{4\phantom{.69}} \\
6\phantom{9} \\
\underline{4\phantom{9}} \\
29 \\
\underline{8} \\
0.21
\end{array}
$$

步驟一　　步驟二　　步驟三

直式 2-2

將直式 2-2 與 2-1 對照後，原來問題的關鍵出在步驟三中。因取商數為 1.12，所以只能減掉 0.08（4×0.02）。如此一來，求商的過程並未做完，因為從餘數 0.21 中，其實還可以再分出五個 0.04。由於題目是求商到小數第二位，所以餘數應比 0.04（4 的 0.01 倍）小才對，否則商數還可再繼續增加。從這兩例題的討論，我們可以推知，在小數除法中，若要取商數到小數第 n 位，則餘數不只是比除數小，還要比除數的 $10^{-n}$ 倍小。

再從代數的角度來證明商數是一位小數時，餘數不只是比除數小，還要比除數的 0.1 倍小：

> 如果 $a$ 除以 $b$ 的商數為 $q$，餘數為 $r$，且 $q$ 為一位小數，則 $0 \le r < b \times 0.1$

證明：

若 $r \ge b \times 0.1$

可設 $r = n \times (b \times 0.1) + s$

其中 $n$ 為正整數，且 $0 \le s < b \times 0.1$

則 $a = bq + r$

$= bq + n \times (b \times 0.1) + s$

$= b(q + n \times 0.1) + s$

此時 $a$ 除以 $b$ 的商數為 $q + n \times 0.1$

並不等於 $q$，與題意矛盾。

所以，$0 \le r < b \times 0.1$

從上述證明，我們知道：如果 $a$ 除以 $b$ 的商數為 $q$，餘數為 $r$，且 $q$ 為一位小數，則 $0 \le r < b \times 0.1$。同理可證，如果 $q$ 為二位小數，則 $0 \le r < b \times 0.01$，…。最後，我們可以得到以下結果：

> 設 $a$ 除以 $b$ 的商數為 $q$，餘數為 $r$
> 如果 $q$ 為整數，則 $0 \le r < b$
> 如果 $q$ 為一位小數，則 $0 \le r < b \times 0.1$
> 如果 $q$ 為二位小數，則 $0 \le r < b \times 0.01$
> ⋮
> 如果 $q$ 為 $n$ 位小數，則 $0 \le r < b \times 10^{-n}$

## 結語

在進行除法運算時，「餘數小於除數」在整數範疇是無庸置疑的，而我們也將之視為理所當然，並類推到小數除法的情境。事實上，倘若商數是 n 位小數時，餘數不只是要小於除數，還要小於除數的 $10^{-n}$ 倍才行。因此，餘數的合理範圍不應只是比除數小就可以了，還得視商數需要被求到小數第幾位而定。我國的數學教科書中並未針對此點加以澄清，而數學教師在教學或出題時也常忽略了這一點。從筆

（下轉第 23 頁）

者們過去的研究與教學經驗中發現，國小學生在學習小數除法時，最感困難的是餘數小數點的處理。教師在進行小數除法教學時，與其一再重複強調餘數小數點的取法，不如引導學生思考餘數的合理性，並鼓勵其在計算後進行反思，這樣的方式或許更能幫助學生了解餘數小數點的處理原則，以減少錯誤的發生。