

# 九的手指算法及其數學原理

黃美慈\* 林保平\*\*

臺北市立師範學院 數學資訊教育系

## 摘要

許多書本曾介紹九乘一位數或九乘二位數的手指乘法，但是對於手指乘法的背後原理卻沒有詳加討論。本文介紹 9 的手指乘法，並探討其規則的成因及其背後的數學原理，並將原來的的方法推廣，可以兩人合作，並介紹適用於所有二位數的「九的手指乘法」。

## 壹、前言

目前國小數學科的教學，教材內容及活動都儘量要求生動、活潑、容易，以遊戲或操作的形式出現，更能引起學童的學習興趣，達成學習目標。觀察九九乘法表，我們可以發現 9 乘以一位數的結果，其各位數字之和恰為 9，若將 9 乘以二位數，則其結果各位數字之和為 9 或 18，利用這個關係，我們可以一人，或兩人合作，用手指來表示九的乘法的結果。指導學生用手指來展示 9 的乘法，不只可以增進學童上數學課的興趣，又可以藉由分組培養互助合作的精神，進而讓學生不再對上數學課感到無聊。這種手指算法，雖然在有些數學遊戲的書中，有提到過，但這些書本均只作方法的陳述，對這些手指表示法背後的數學原理，未作詳細說明或討論，有些書本也只列出九對一位數的乘法規則，這些規則其實仍可以作一些推廣，

本文的目的，一方面要來介紹這個手指表示法，另一方面也來探討這個表示法背後的數學原理，並將表示法作進一步的推廣。本文所呈現的手指圖片，是自己看到的手指表示法，若要展示給站在對面的人看時，應注意自己看到的百位、十位、個位（由左到右）的位置恰與別人所看的的方向相反。

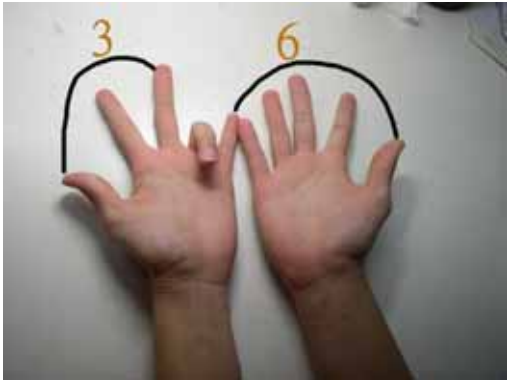
## 貳、九與一位數的手指乘法

若  $n$  為  $1\sim 9$  的任意數，利用手指來表示  $9 \times n$  的結果，方法如下：

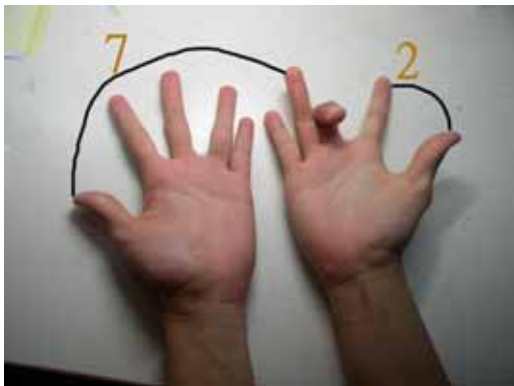
首先將雙手手掌攤開，手心面向自己，左手大拇指算起第  $n$  個手指頭彎曲起來，此時，雙手被彎曲的手指分隔為左右兩部分，由圖一左邊這部分的手指頭個數，就是  $9 \times n$  結果的十位數字，右邊的手指頭個數，就是個位數字。

例如  $9 \times 4$  時，將第 4 個手指（即左手無名指）按下，此時就得到 36（圖一），同樣

地，按下第 8 指，就得到 72（圖二）。



圖一  $9 \times 4$  的手指表示法



圖二 按下第 8 指可展示  $9 \times 8$  的結果

依照上述規則，大家可以試試看是否所有 1~9 的數與九的乘法，都可以用雙手來展示，這樣做的話，其實就是用「窮學法」來證明『用十隻手指可以表示出九的乘法結果』，其實我們也可以用式子來說明這個手指乘法的原理。

設  $a$  為 1~9 的任意數，考慮

$9 \times a = (a-1) \times 10 + (10-a)$ ，此時  $a-1, 10-a$  兩數均為 0~9 之數。

這個式子表示  $9 \times a$  可展示為二位數，其中十位數字為  $a-1$ ，個位數字為  $10-a$ ，由於

$(a-1) + (10-a) = 9$ ，故只要 9 個手指頭就可以表示出  $9 \times a$  了。又因為雙手有十個手指頭，所以只要用其中九個手指，就可以表現出  $9 \times a$  了。

根據關係式  $9 \times a = (a-1) \times 10 + (10-a)$ ，我們可發展出展示 9 的乘法結果的步驟

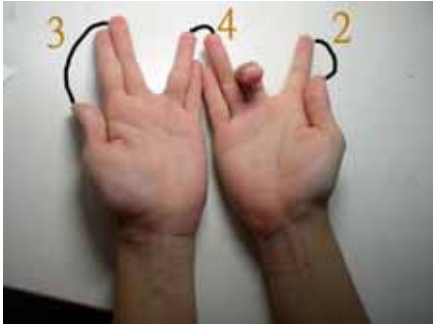
1. 將 10 個手指頭分為兩部分，一部分有  $a$  個手指頭，另一部份有  $10-a$  個手指頭， $10-a$  就是結果的個位數。
2. 將 10 個手指頭按下第  $a$  個得  $a-1$  個手指，這是結果的十位數。

第一個發現 9 與一位數相乘手指算法的人，可能是將此規則簡化為「**按下左手算來第  $a$  指**」，因為按下該指，可同時完成上述的兩個步驟。

### 叁、九乘以二位數的手指乘法

前面所討論 9 與一位數的手指乘法，其實可以推廣到 9 與二位數的乘法，以  $9 \times 38$  為例，手指乘法有下列步驟：

1. 將雙手攤開，手心向自己，以左手大姆指為起點，將左邊數來的 3 個手指與其他諸指分岔打開，將十個手指分成兩部分。
2. 將由左數來第 8 指彎曲，此時，雙手手指被分成三部分。
3. 從圖三，此三部分中，左邊部分的手指數目就是  $9 \times 38$  結果的百位數，中間部分就是十位數，右邊部分就是個位數字，得結果為 342。



圖三 9x38的手指表示法



圖四 9x27手指乘法

同樣的，若要表示出  $9 \times 27$  只要將前 2 指與其他手指岔開，再按下第 7 指（由左手大拇指數起），就可表示出結果為 243 了（圖四）。與前面 9 乘以一位數的討論方法一樣，假設 9 所乘的二位數十位數字是  $a$ ，個位數字是  $b$ ，其中  $a, b$  均為  $1 \sim 9$  的數，考慮代數式  $9 \times (10a+b) = (a) \times 100 + 10 \times (b-a-1) + (10-b)$

若  $a < b$ ，則  $a, b-a-1, 10-b$  均為  $0 \sim 9$  之數，就是  $9 \times (10a+b)$  結果的百位、十位、及個位。又因  $a + (b-a-1) + (10-b) = 9$ ，故知我們可以用九個手指來呈現結果的三位數字。

因此，九乘以二位數  $10a+b$  有下列步驟：

1. 將雙手攤開，手心面向自己，以左手大拇指為起點，將左邊數來前  $a$  個手指與右邊諸指岔開成兩部分，左邊有  $a$  個手指頭。

2. 將由左數來第  $b$  指彎曲，此時，雙手手指被分成三部分，左邊是  $a$  個手指頭，將 10 個手指頭減掉最左邊 ( $a$  個) 及最右邊 ( $10-b$ ) 個手指的個數，再扣掉按下的一個手指，因此中間就剩下  $10 - a - (10-b) - 1 = b-a-1$  個手指頭了。

3.  $a, b-a-1, 10-b$  就是  $9 \times (10a+b)$  結果的百位、十位、及個位數。

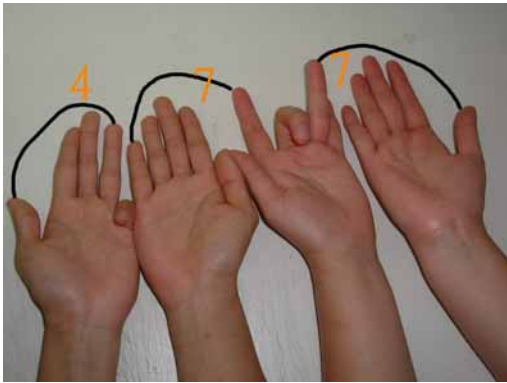
#### 肆、手指乘法的推廣

前面討論  $9 \times (10a+b)$  的手指乘法法則有一個限制，那就是  $b > a$ ，亦即必需是個位數大於十位數的二位數才可使用，因為此時  $b-a-1$  才會大於或等於零，才可表示十位數，事實上，在  $b \leq a$  的情況時，我們也可以透過兩人合作的方式來表示 9 的乘法。

假設  $a, b$  為  $1 \sim 9$  之數，設  $b \leq a$ ，因為  $9 \times (10a+b) = 100x(a-1) + 10x(9+b-a) + (10-b)$ ，且  $b \leq a$ ，故  $a-1, 9+b-a, 10-a$  必為  $0 \sim 9$  數，而且  $(a-1) + (9+b-a) + (10-b) = 18$ ，因此我們可以利用兩人合作之 20 個手指頭來表示出 9 乘以二位數（十位數大於或等於個位數）的乘法。這種乘法有下列步驟

1. 兩人將雙手攤開，手心面向自己，展示二十個手指，以左邊的人左手大拇指為起點，將左邊數來第  $a$  指彎曲。
2. 右邊的人同樣以自己左手大拇指為起點，左邊數來第  $b$  指彎曲，此時，所有手指被分成三部分。
3. 此三部分中，最左邊部分的手指數目就是百位數字  $a-1$ ，右邊部分手指數就是個位數字  $10-b$ ，中間部分有  $20 - (a-1) - (10-b) - 2 = 9+b-a$  個手指，就是十位數字。

圖五、圖六展示兩人合作的的手指表示法。



圖五  $9 \times 53$  的手指表示法，兩人分別按下左手數來第 5 及第 3 手指



圖六  $9 \times 76$  的手指表示法，兩人分別按下左手數來第 7 及第 6 手指

上述兩人合作的手指乘法，在  $a < b$  及  $a \geq b$  之情況下，前者一人展示，後者則為兩人展示，方法似乎並不一致，事實上，不論

它是哪一種二位數，我們只要修改一下前者的規則，循環使用雙手及兩次，也可以由一個人來表示  $9$  乘二位數的乘法。

在  $a < b$  的規則中，我們用「開岔」及「按指」將雙手分成三部分，分別是百位、十位、及個位數。事實上，我們也可以說，百位數是由左算到「開岔」的手指數，十位數是由「開岔」算到「按指」的手指數，個位數是由「按指」數至終結的手指數。如果我們使用雙手循環兩次，上述規則仍適用於  $a \geq b$  之情況。

例如， $9 \times 76 = 684$  時(圖七)，我們可依下列規則來處理

1. 將雙手攤開，手心面向自己，以左手大拇指為起點，將左邊數來前 7 指與其他諸指「岔開」(即圖片中標有 1 的指頭)，以左手大拇指為起點，將由左數來第 6 指按下(「按指」)。此時，雙手被分成 3 部分。
2. 由左數至「開岔」的手指數為 6 (圖中標有 1 的記號，按下的手指不算)，6 就是百位數。
3. 由「開岔」向右算，並循環使用雙手至「按指」處，手指數為 8 (圖中標有 2 的記號者)，8 就是十位數。
4. 再由「按指」處算至右端，手指數為 4 (圖中標有 3 的記號者)，4 就是個位數。

圖七  $9 \times 76$  的手指表示法

事實上，我們是將單人表示法原理中的  $b-a-1$  想成  $10-[a+(10-b)]-1$ ，而將兩人合作原理中的  $9-a+b$  想成  $20-[(a-1)+(10-b)]-2$ ，此時兩個規則合而為一，亦即將使用的總手指數減掉百位數及個位數，再扣除「按指」數，就是十位數，只不過前者使用十個手指而後者使用 20 個手指而已。

## 伍、結語

本文討論 9 的手指算法，並對它作了一些推廣，也討論了這個算法背後的原理，這個手指乘法教給學生，對初學乘法表或乘法的學生而言，並非想要取代「筆算」，或減少學生熟悉乘法表及乘法練習的時間，只是要讓學生了解九的神奇，提升學生學習的興趣，注意到數學內容有趣的面向，他們的學習，不必牽涉到代數原理的探索；對國中生以上的學生而言，除提升數學學習興趣之外，也可以鼓勵其探究「手指算法」背後的

原理，對於任意二位數的代數表示法，代數關係式與操作規則間的關係，在代數學習時注意數值的限制等，都是數學學習的重要教學目標。此外，9 乘三位以上的數，也可以依照本文類似的方法透過多人合作來展示其結果，雖然較為複雜，有興趣的讀者也可以想想看。

## 參考資料：

- 1.張良杰，游耿能譯(民 86) 趣味數學問題集。台北市：凡異出版社 83 頁。
- 2.親代週刊雜誌編輯委員會編(民 73) 有趣的數學旅行。台北市：惠智出版社 12 頁。
- 3.蘇貝爾著，張靜馨，念家興譯(民 81) 數學教學方法。台北市：九章出版社。