歐尼爾的罰球問題

梁勇能

臺北市立百齡高級中學

前言：

NBA 洛杉磯湖人隊的天王中鋒俠客歐尼爾（Shaquille O’Neal）在籃球場上所向披靡，禁區威力無人可擋。宛如希臘神話中的無敵戰士阿基里斯(Achilles)一般，唯一的罩門卻是在無人防守的罰球線上，罰球的奧妙究竟爲何？且讓我們仔細瞧來。

內容：

一個籃球的周長約在 75～78 公分，也就是直徑約 25 公分。而籃框的直徑約 45 公分，因此籃框顯然有足夠的空間可以讓球「自由」的進出。可惜，其實不然，因爲投球的軌道並非垂直落入籃框，當籃球以拋物線軌跡行進時，球兒想要投進籃的入口，將變成一個橢圓，長軸 45 公分，短軸爲 $45\sin\theta$。此時，若不考慮擦板或彈跳碰撞後進球，則球兒要如願空心地進入籃框，顯然其空間縮小了，也就是必須滿足 $45\sin\theta>25$，$\rightarrow\theta>33.75^{\circ}$

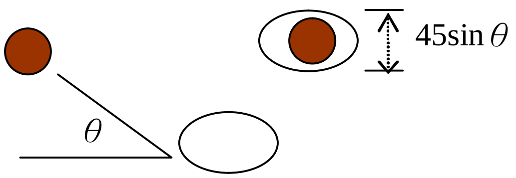
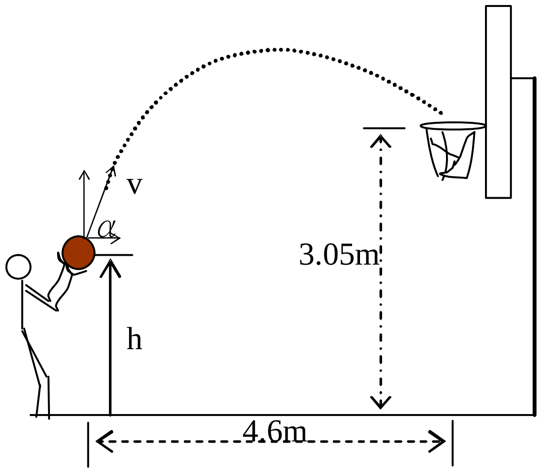


圖 一



圖二

爲了方便，不討論碰到籃框彈進者，只針對空心入網方式。現在我們用解析的方式來討論，罰球時，當球員站在距離籃框水平距離 4.6 公尺的罰球線上，手舉籃球，離地高 h 公尺，球離手時的中心點座標視爲(0,0)，以 v 的速度，讓球以拋物線方式投向座標(x_1,y_1)的籃框中心，若球的中心經過 t 秒後到達此點，則

$$x_1=v\cos\alpha\, t \quad \cdots\cdots ①$$

$$y_1=v\sin\alpha\, t-\frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots\cdots ②$$

其中 v 是投射速度，α 是投射角。

罰球時將受到投射速度與投射角影響，我們分別來討論：

（一）固定投射速度，何種投射角度較易進球？

消去 t 之後可解得 $y_1=x_1\tan\alpha-\dfrac{gx_1^2}{2v^2}\sec^2\alpha$……③，∵$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$

可得

$$\frac{gx_1^2}{2v^2}\tan^2\alpha-x_1\tan\alpha+y_1+\frac{gx_1^2}{2v^2}=0 \quad ④$$

解出

$$\tan\alpha=\frac{v^2}{gx_1}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{2g}{v^2}(y_1+\frac{gx_1^2}{2v^2})}\right]$$

利用 g=9.8 m/s^2，x_1=4.6m，$y_1=3.05-h$

$\tan\alpha$＝

$$\frac{v^2}{45.08}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{19.6}{v^2}(3.05-h+\frac{207.368}{2v^2})}\right] \quad ……⑤$$

我們可以得到兩個投射角度，是否兩個都可以呢？顯然不一定，因為我們從上面的討論中知道，球到達籃框的入射角必須>33.75˚才行，這個條件讓我們可以來作為判定的鑰匙！

再從③的方程式：球行進的軌跡為 $y=x\tan\alpha-\dfrac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$，球在任一點的斜度為 $\dfrac{dy}{dx}=\tan\alpha-\dfrac{gx}{v^2}\sec^2\alpha$，當籃球到達籃框時(見圖一)，入射角為$\theta$，所以斜度為$-\tan\theta$，因而$-\tan\theta=\tan\alpha-\dfrac{gx_1}{v^2}\sec^2\alpha$ →

$$\tan\theta=\frac{gx_1}{v^2}\tan^2\alpha-\tan\alpha+\frac{gx_1}{v^2} \quad …⑥$$

我們可以將④式

$\dfrac{gx_1}{v^2}\tan^2\alpha=2\tan\alpha-\dfrac{2y_1}{x_1}-\dfrac{gx_1}{v^2}$ 代入⑥中，經化簡之後，

$$\tan\theta=\tan\alpha-\frac{2y_1}{x_1}=$$

$$\frac{v^2}{45.08}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{19.6}{v^2}(3.05-h+\frac{207.368}{2v^2})}\right]-\frac{(3.05-h)}{2.3} \quad …⑦$$

從前面的討論中，只要計算 $\tan\theta>\tan33.75^\circ\fallingdotseq0.6682$ 即是可以入球的投射角了！

現在我們來瞧瞧歐尼爾的罰球概況，他的身高 7 呎 1 吋（2.16m），若 h≒2.15m，投射速度 v=8 公尺/秒，則 $\tan\alpha=2.0958$ 或 0.7407 （$\alpha=64.49^\circ$或 36.53°）

由此計算 $\tan\theta=\tan\alpha-2\times0.9\div4.6=1.7045$ 或 0.3494（$\theta=59.60^\circ$或 19.26°）

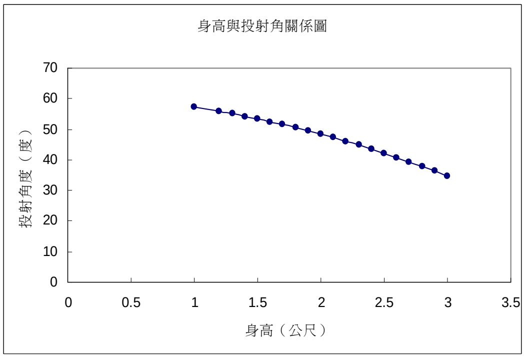
因此，如果歐尼爾要順利投進籃框，投射的角度必須為 59.60˚才行！看過電視轉播的人常可以看到，歐尼爾的罰球常是又快又平，顯然要進球就不易了！

（二）如果要進球，投射角是否有所限制？

由⑦知道，

$\tan\theta=\tan\alpha-\dfrac{2y_1}{x_1}>0.6682$ → 投射角範圍為 $\tan\alpha>0.6682+\dfrac{(3.05-h)}{2.3}$（0<h<3.05）

當 h=3.05 時，可知道投射角約 33.75° 即可，也就是等於入射角。當然如果投球的至高點高過籃框，角度可以更小。當距離 x_1 越遠時，角度要較小才行。



圖三

(三)固定投射角，何種投射速度較易進球？

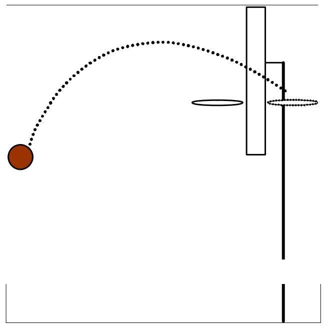
由投射角度固定為 α 時，由 $y_1=x_1\tan\alpha - \frac{g x_1^2}{2v^2}\sec^2\alpha$ → 可求得投射速度 $v=\sqrt{\frac{g x_1^2 \sec^2\alpha}{2(x_1\tan\alpha - y_1)}}$，顯然距離 x_1 越遠，速度也要越快才行！

（四）如果剛好正面打板進球，又是如何？

只要以籃板為對稱軸，瞄準虛擬的籃框投籃即可，因此

此時的投射角度公式，此要將原距離 x_1=4.6m 改為 x_2≒4.6+0.45＝5.05m 即可。

此時的投射角度公式，此要將原距離 x_1=4.6m 改為 x_2≒4.6+0.45＝5.05m 即可。



圖四

結論：

一個優秀的籃球員，除了本身的條件要優秀外，也需要苦練。從罰球這件事來看，他需要去練習罰球時的投射速度和投射角，讓雙手形成反射動作，罰球就不會變得太難了！籃球之神麥可喬丹(M.Jordan)還曾在比賽中閉上雙眼罰球了，神奇吧！

參考書目：

運動簡易規則(民 74)。台北：明倫出版公司。

南一書局(民 86)：體育教師手冊第 1 冊，台北：南一書局。