中學生通訊解題第三十四期
題目參考解答與評析

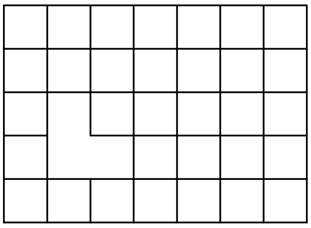
臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
933401

如圖，每一個小正方形方格大小皆相等，試問：

（1）共有幾個大小不同的正方形？

（2）共有幾個大小不同的長方形？



參考解答：

（1）

類 型	個 數	類 型	個 數
1×1	32	4×4	6
2×2	17	5×5	2
3×3	11	合 計	68

（2）

類 型	個 數	類 型	個 數
1×1	32	3×3	11
1×2	48	3×4	16
1×3	36	3×5	9
1×4	25	3×6	4
1×5	15	3×7	2
1×6	6	4×4	6
1×7	3	4×5	7
2×2	17	4×6	4
2×3	26	4×7	2
2×4	18	5×5	2
2×5	10	5×6	2
2×6	4	5×7	1
2×6	2		
合計		308	

（解答題供：彰縣陽明國中王建詒同學）

評析

在基本圖形上算正方形、長方形等的數量，最好要分類來算，才不會漏掉某些圖形的數量，絕對不要用心算。我們也發現國中生很會做關於計數問題的題目。但希望同學要訓練自己的想法，莫模擬同學的想法。

問題編號
933402

試證：

（1）（1+2+---+10）可以整除

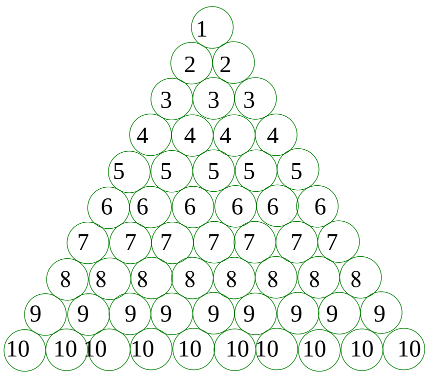
$(1^2+2^2+---+10^2)$。

（2）（1+2+----+20）可以整除

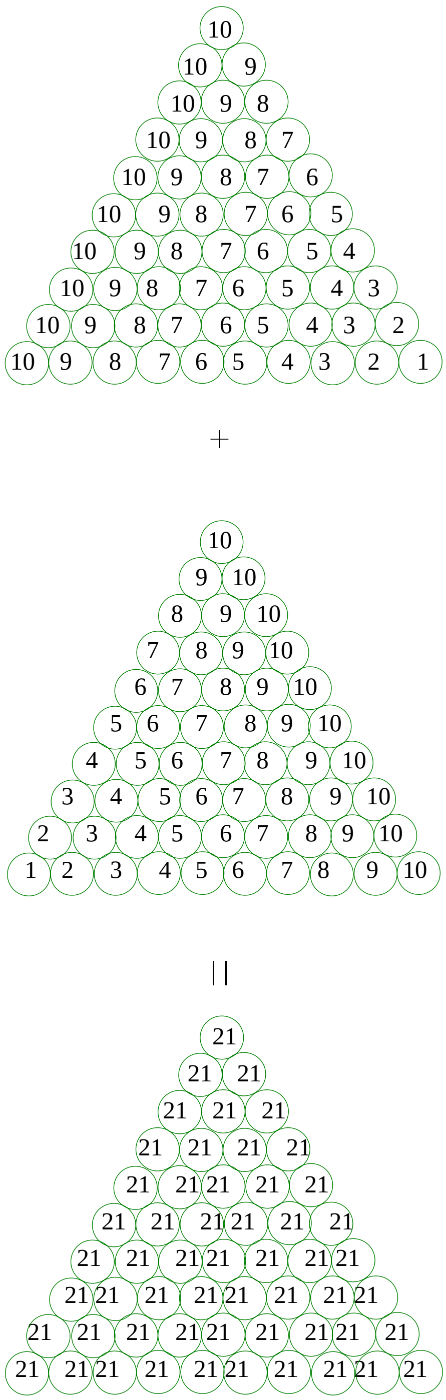
$(1^3+2^3+---+20^3)$。

參考解答：

（1）



＋



21x11x8÷3＝385　1+2+3+⋯+10=55　385÷55=7　故 可以。

（解答提供：北市福德國小張育橋同學）

（2）

1+2+---+20= $\dfrac{20(20+1)}{2}=210$

$1^3+2^3+---+20^3$
$=(1^3+20^3)+(2^3+19^3)+------+(10^3+11^3)$
$=(1+20)(1^2-1\times 20+20^2)+(2+19)(2^2-2\times 19+19^2)$
$+---+(10+11)(10^2-10\times 11+11^2)$

$\therefore 1^3+2^3+---+20^3$ 爲 21 的倍數

$1^3+2^3+---+20^3$ 中每一個立方的各位數字爲

1+8+7+4+5+6+3+2+9+0+1+8+7+4+5+6+3+2+9+0=90

$\therefore 1^3+2^3+---+20^3$ 爲 10 的倍數

（$1^3+2^3+---+20^3$）爲（1+2+---+20）的倍數

（解答題供：基縣銘傳國中王祥鈺同學）

評析

這個題目大部分的同學都是用公式分別求出（1+2+---+10）的和、（$1^2+2^2+---+10^2$）的和與（$1^3+2^3+---+20^3$）的和：

1+2+---+10= $\dfrac{10(10+1)}{2}=55$；

1+2+---+20= $\dfrac{20(20+1)}{2}=210$；

$1^2+2^2+--+10^2=\dfrac{10(10+1)(20+1)}{6}=385$；

$1^3+2^3+-+20^3=\dfrac{10^2\times 11^2}{4}=44100$

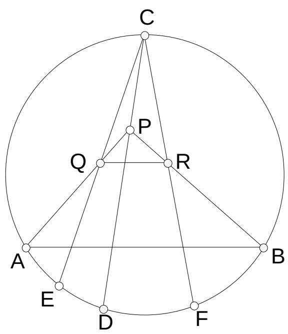
然後證明結果。但應該可以用其他方法來處理，而不是解題只亂背公式而已。在參考解答裡，我們提供兩位同學的解答與大家一起

研究，其中有一位同學還是小學生。

問題編號
933403

如圖，C 為優弧 AB 的中點，D 為劣弧 AB 上任意一點，E、F 分別為劣弧 AD、BD 的中點。設 P 為弦 CD 上的一點，$\overline{PA}$與$\overline{CE}$相交於 Q，$\overline{PB}$與$\overline{CF}$相交於 R，

試證：$\overline{QR} // \overline{AB}$



參考解答：

1.連接 CA、BC

2.∵E、F 分別是 AD 弧、BD 弧的中點

∴ AE 弧=DE 弧，∠ACE=∠ECD

$\therefore \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QA}} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CA}}$，同理 $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{BR}} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CB}}$

3.∵C 是優弧 AB 的中點，AC 弧=BC 弧

AC=BC

4.$\therefore \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QA}} = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{RB}} \Rightarrow \overline{QR} // \overline{AB}$

（解答題供：北市萬華國中簡廷安同學）

評析

幾何題目參與的同學明顯少的很多，可能因是國中幾何證明的教導在國三才學，但同學仍可透過自我學習來完成幾何的證明。本題大部分的同學都是利用三角形角平分線的比例性質來證明，過程漂亮且簡潔有力。

問題編號
933404

設 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{20}$ 是 20 個皆小於 70 的自然數，且 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{20}$，今任意取兩個數為一組並計算出差的絕對值，試證：這些差中至少有 4 組是相同的。

參考解答：

假設這些差沒有 4 組是相同的，則至多有 3 組是相同的。

照 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{20}$ 排列，

$a_{20} - a_{19}, a_{19} - a_{18}, \cdots, a_3 - a_2, a_2 - a_1$ 這 19 組數的差中沒有 4 組是相同的，所以這 19 組差中至少有 7 組不同的差（∵19>6×3）

因此得

$$
\begin{aligned}
70 &> a_{20} - a_1 \\
&= (a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \cdots + (a_2 - a_1) \\
&\ge 7 + (6+6+6) + (5+5+5) + \cdots + (1+1+1) \\
&= 70
\end{aligned}
$$

矛盾，所以假設是錯的。得證。

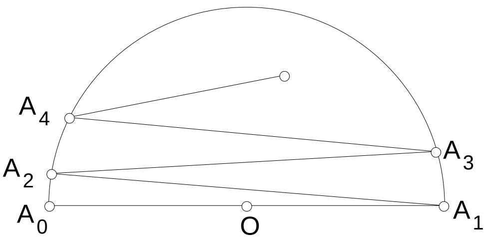
（解答題供：新竹光華國中范祐維同學）

評析

這種類型的證明題，需用到一點鴿籠原理的觀念來證明，故答題的人數比較少，但參與此題答題者的數學解題能力與數學知識之淵博令人佩服。

問題編號
933405

如圖，圓 O 的直徑是 $\overline{A_0A_1}$ =2，A2、A3、A4、---、AK、AK+1、-----是半圓上的點，若 $\angle A_0A_1A_2 = 1^0$ ， $\angle A_1A_2A_3 = 2^0$ ， $\angle A_2A_3A_4 = 3^0$ ， $\angle A_{K-1}A_KA_{K+1} = K^0$ （k 為正整數），若 $\overline{A_kA_{k+1}}$ 的長小於 1，求 k 的最小值是多少？



參考解答：

如右圖： $\dfrac{A_KA_1\text{弧}+A_{K+1}A_1\text{弧}}{2} = \dfrac{1+2+---+k}{2}$

先設 $\overline{A_KA_{K+1}}$ =1，則Δ $A_KA_{K+1}O$ 為正三角形

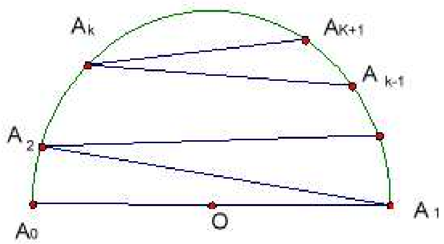
$\angle A_KOA_{K+1} = A_KA_{K+1}\text{弧} = 60^0$

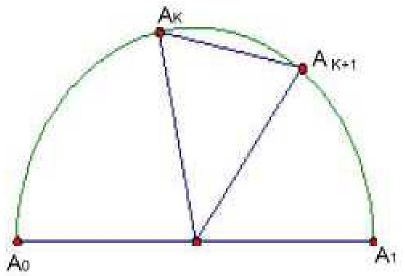
$\dfrac{A_KA_1\text{弧}+A_{K+1}A_1\text{弧}}{2} = \dfrac{120^0}{2} = \dfrac{(1+k)\text{k}}{2}$

$k^2 + k - 120 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-1\pm\sqrt{481}}{2}$ （負不合）

因為 $\overline{A_kA_{k+1}}$ 的長小於 1，所以

$k > \dfrac{-1\pm\sqrt{481}}{2} = 10.----$ ，所以 k=11





（解答題供：北縣永和國中施恩銘同學）

評析

這是一個很有趣生動的幾何計算題，只要懂得圓周角與等差級數的觀念就可以做得很好，不希望用三角函數等觀念來處理。許多答題同學也很有耐心慢慢地分析做完此題。