數學解題「知和行」的智慧

許建銘

高雄市立龍華國中

一、前言：

【問題】每天中午有隻輪船從哈佛開往紐約；而每天的同一時刻，也有一隻輪船從紐約開往哈佛，此段航程都需要七天七夜。請問今天中午從哈佛開往紐約的輪船，到達紐約前的航行途中，將會遇到幾隻從紐約開往哈佛的輪船？

上面這道問題是十九世紀時，同是法國數學家的 Lucas(1842-1891) 問 Sturm(1803-1855) 的問題。據傳當時 Sturm 想了一下，隨後將香煙紙盒撕開，在空白的紙背畫了一張圖(如圖 1-1)，然後向 Lucas 解說：圖中有一條粗黑線與 13 個交點，這些交點數就表示從紐約開往哈佛的這隻輪船，在航行途中，將會與對面開來的 13 隻船相遇。

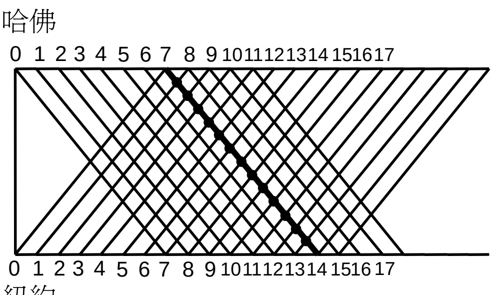


圖 1–1

Lucas 所提的問題與 Sturm 的巧妙圖解，兩者至今仍在許多數學書籍中被提及，或被修改成一些類似考題在試卷上出現。筆者曾在一本數學書籍中，看過一個稍爲簡化的圖解(如圖 1-2)，圖示直接運用負數，清楚描繪從哈佛開往紐約的這隻輪船與對面「先後」出發的輪船，它們在航行途中相遇的情形。

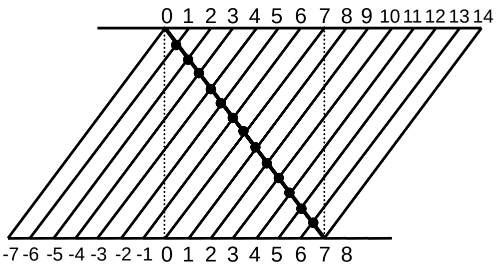


圖 1–2

這個問題也可利用簡單的代數方法求解：我們假設兩隻相遇的船，在途中已經各自航行了 a 日和 b 日。依題意推得 a 和 b 的關係式：

$$a+b=7\ ，\ |a-b|\in N\cup\{0\}\ ，\ ab\neq 0$$

(因爲兩個港口皆每隔一日才同時開出一隻輪船，所以任兩隻船在途中相會時，航行的日數必相差整數日。)

如此即可求出下面的 13 組解：

a	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5
b	6.5	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5

不過像這樣值得介紹給中小學生學

習的題材，就算只講代數解，或者配合 Sturm 所繪的圖形解說，即使教師講得口沫橫飛，不少學生可能還是一頭霧水！尤其對資質中等以下的學生而言，這個頗爲生疏的問題情境，可能早讓他們的心悄悄打起退堂鼓，遑論要他們好好思考或欣賞那麼「精緻」的圖形。(圖形爲什麼要那樣畫的理由？如果可以理解，收穫也會不一樣。)

以下的圖(如圖 1-3)是筆者與學生討論這個問題時，師生腦力激盪後產生的即興作品。我們想像它就如同一般的卡式錄音帶，兩個短邊內側的相對位置上，各有一個可旋轉的圓柱頭，兩個圓柱頭間套著一條可被旋轉頭牽動的帶子，帶子上的「◎」與「●」表示航行中的輪船點，當旋轉頭逆時針方向轉動時，輪船點也會跟著移動。圖 1-3 中的「◎」表示從哈佛開往紐約的一隻輪船，而圖 1-4 正圖示該船航行 0.5 日後，第一次與對面開出的輪船相遇的情形，由圖上數據顯示，對向的輪船已經航行了 6.5 日。圖 1-5 與圖 1-6 分別表示「◎」航行 3 日與 5.5 日後，與對向輪船相遇的情形。

圖 1-3

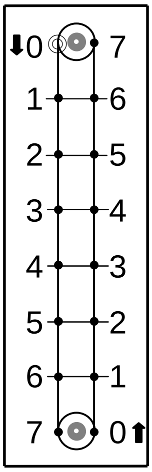


圖 1-4

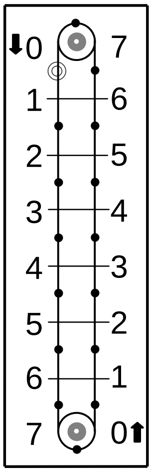


圖 1-5

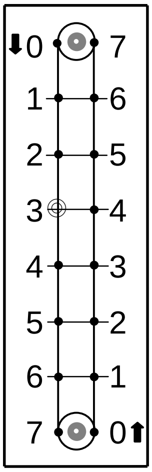
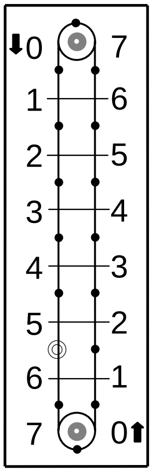


圖 1-6



【問題】滿分 100 分的測驗，包括有選擇題 20 題，答對一題得 3 分，答錯一題倒扣 1 分，不答不給分也不扣分；填充題 20 題，答對一題得 2 分，答錯或沒答不給分也不扣分。某生選擇答對 15 題，答錯 3 題，2 題未作答；填充答對 16 題，答錯 2 題，2 題未作答，請問該生的測驗分數是多少？

【解一】 $100+(-4)\times 3+(-3)\times 2+(-2)\times 4$

$$=100-12-6-8=74\text{(分)}$$

【解二】 $3\times 15+(-1)\times 3+2\times 16$

$$=45-3+32=74\text{(分)}$$

以上第一種解法是以 100 分爲出發點，逐項扣分後計算出得分；第二種解法是以 0 分爲出發點，逐項加減分後計算出得分。

以筆者在教學現場的經驗和觀察，如果以學生學業成就爲背景進行簡單調查和分析，兩種解法顯示的意義，的確是有差別的。會用第一種方法求解者，通常是數學成績較佳的學生；而數學成績較差的

學生，通常會選用第二種方法求解。爲什麼呢？除了大家普遍認爲：第一種解法的思考複雜度較高(答錯選擇題除了會失去該題的分數外，還要再多扣一分，也就是「始對終錯」將少得四分。)，所以使用此法求解的學生，腦筋必然不差的理由之外，筆者從「習慣說」的觀點，認爲以下的「生活模式」，也是隱約影響解題表現的可能因素。

一個數學成績很好的學生，通常考完試，腦中思考的是可能做錯的題目或題數，即使在數理科能力分組的課堂活動中，同學交換互改試卷，也是把數理成績不錯的同學，扣除他試卷上少數做錯題數的分數，就可改好同學的試卷。反之，一個數學成績較差的學生，每次考完試，頂多回顧一些可能做對的題目或題數，即使像能力分組的課堂活動中，交換互改試卷，也是把數學成績不佳的同學，加好試卷上少數做對題數的分數即可。

有一個數學成績一向不錯的學生，在解上面這道題目時，解法是這樣：

$$3\times15+(-4)\times3+2\times16=45-12+32=65\,(分)$$

原來他學過第一種解法的觀念，而且曾以它解對類似的問題，也因爲這種經驗，再加上自己一時不小心，「倒扣」的觀念才會產生失當的連結，導致把答案算錯。

【問題】媽媽拿 180 元給小明，這些錢剛好可買 4 瓶醬油和 3 公斤雞蛋，但小明卻買回來 3 瓶醬油和 4 公斤雞蛋，且剩下 10 元。試問醬油一瓶多少元？雞蛋一公斤多少元？

【解一】設醬油一瓶 x 元，雞蛋一公斤 y 元

$$\begin{cases}4x+3y=180\cdots\cdots ① \\ 3x+4y=170\cdots\cdots ②\end{cases}$$

$$②\times4-①\times3\Rightarrow y=20 \text{ 代入} ①\Rightarrow x=30$$

所以醬油一瓶 30 元，雞蛋一公斤 20 元。

【解二】

$180-170=10$ ， $(180+170)\div7=50$

$(50-10)\div2=20$ ， $20+10=30$

所以醬油一瓶 30 元，雞蛋一公斤 20 元。

第二種解法中，並未使用任何代表數，而計算過程也相當簡潔。原來這位解題者，雖然只有普通程度的數學能力，但因從小幫忙父母看管雜貨店，耳濡目染之下，簡單的買賣道理包括算算小錢：「醬油一瓶比雞蛋一公斤多 10 元，7 瓶醬油和 7 公斤雞蛋共 350 元，醬油一瓶與雞蛋一公斤各多少錢？」根本是家常便飯的事！

以上共舉了三個問題，除了解法之外，對於解題背景的說明，筆者也加上自己很主觀的「建構」和「習慣」概念，是想藉此凸顯：世上的人，自認聰明者居多，「聰明」的人用自認聰明的方法適應環境與解決問題，「愚笨」的人也是用自認聰明的方法適應環境與解決問題。然而真實上，誰才是真正聰明的呢？「愚笨」的人以及「三腳貓」功夫，果真一無是處嗎？每個人成長背景不同，生活體驗不同，建構出來的生命體也必然各具特色。

每個人從書本與生活中，學習並累積豐富的知識與生活經驗，讓他們在面對或同或異的問題時，連結與反應出形形色色的解題態度和方法。

教學者(當然也是解題者)明白以上的道理，也就能夠時時懷抱謙卑心與同理心，設想自己是一個永無止境的學習者(特別指教學態度與解題方法)，誠心接納並鼓勵學生提出不同意見和看法。即使是又慢又拙的想法，或者僅只運用低層、基礎的數學知識進行解題，他們透露出疏淡與稀薄的光影，都是教師「知己知彼」的良師益友，也是「多元智慧」的教學素材。從教育與教學的角度來看，培養這種胸襟與氣度，才是一個真正聰明的人，可以「自認聰明」與「智者不惑」的不二心法。

二、本文：

【問題一】有一個計算兩個正整數和的問題，某生發現若將加數的後面加上 5，兩數的和是 3578；若將加數後面少寫一個 5，兩數的和是 157，求原計算題的正確答案。

【解一】設被加數為 x，加數為 y

$$\begin{cases} x+10y+5=3578 \cdots\cdots ① \\ x+\dfrac{y-5}{10}=157 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$$② \Rightarrow x=157-\frac{y-5}{10} \text{ 代入①}$$

$$\Rightarrow 157-\frac{y-5}{10}+10y+5=3578$$

$$1570-y+5+100y+50=35780$$

$$\Rightarrow y=345 \text{ ，} x=123$$

所以原問題的正確答案為$123+345=468$

【解二】依題意可列出兩個直式加法如下

(1)

$$\begin{array}{rcccc} & & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & 5 & 5 \\ \hline & 3 & 5 & 7 & 8 \end{array}$$

可推得被加數十位與個位數字分別為 2 和 3。

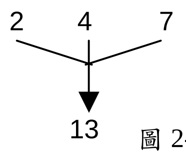
(2)

$$\begin{array}{rccc} & \square & 2 & 3 \\ + & & \square & \square \\ \hline & 1 & 5 & 7 \end{array}$$

可再推得加數的百位與十位數字分別為 3 和 4，而被加數的百位數字為 1。

由(1)和(2)推得被加數為 123，加數為 345，所以正確答案為$123+345=468$

【問題二】如圖 2-1 的意思，就是說相鄰的三個數的和等於箭頭下方所指的數。例如：



表示 2+4+7=13

圖 2-1

請算出圖 2-2 中，六個空格內所填之數的和。

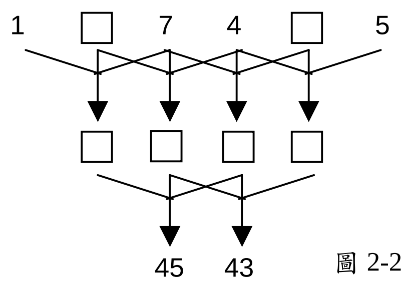


圖 2-2

【解一】假設最上一列的兩個空格內的數分別為 x 和 y 。依照題意可列出各方格內的算

式(如圖 2-3)以及以下的聯立方程式：

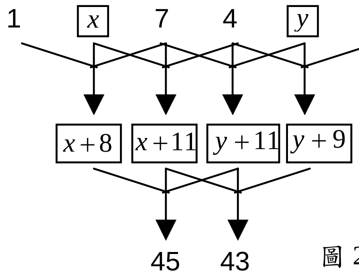


圖 2-3

$$\begin{cases} x+8+x+11+y+11=45 \\ x+11+y+11+y+9=43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=15 \\ x+2y=12 \end{cases}$$

$\therefore x=6$， $y=3$ $\Rightarrow$ 六個空格內所填數的和為 $6+3+14+17+14+12=66$

【解二】明白下圖 2-4 的意思，就可以輕鬆算出六個空格內所填數的和為

$45+43-(7+4)\times 2=88-22=66$

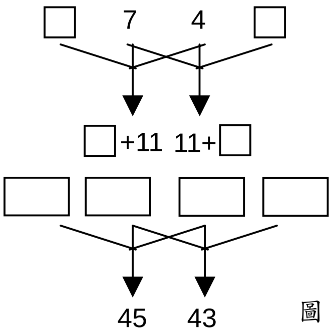


圖 2-4

【問題三】解 $(x-11)(x-12)=12$

【解一】

$x^2-23x+132=12 \Rightarrow x^2-23x+120=0$

$(x-15)(x-8)=0 \Rightarrow x=15$ 或 $x=8$

【解二】令 $y=x-11$

$y(y-1)-12=0 \Rightarrow (y-4)(y+3)=0$

$y=4$ 或 $y=-3 \Rightarrow x=15$ 或 $x=8$

【解三】

$(x-11)(x-12)=4\times 3=(-3)\times(-4)$

當 $x-11=4$ 時， $x=15$ ；當 $x-11=-3$ 時，

$x=8 \Rightarrow x=15$ 或 $x=8$

【問題四】有一個多邊形的周長為 158 公分，它的邊長形成公差為 3 公分的等差數列，已知最長的邊長為 44 公分，求此多邊形的邊數。

【解一】設多邊形的邊數為 n

$\dfrac{n[2\times 44+(n-1)(-3)]}{2}=158$

$\Rightarrow n(88-3n+3)=316 \Rightarrow 3n^2-91n+316=0$

$(3n-79)(n-4)=0 \therefore n=\dfrac{79}{3}$(不合)或 $n=4$

$\therefore$ 多邊形的邊數為 4

【解二】$\because 158=44+41+38+35$

$\therefore$ 多邊形的邊數為 4

【問題五】甲、乙兩人分別自兩地同時相向而行，甲每小時走 3 公里，乙每小時走 2 公里，當甲走至兩人原先距離的中點時，甲、乙相距為 4 公里，試問甲、乙兩人原相距多少公里？

【解一】設甲、乙兩人原相距 $2x$ 公里

$\therefore \dfrac{x}{3}=\dfrac{x-4}{2} \Rightarrow 2x=3x-12$

$\Rightarrow x=12 \Rightarrow 2x=24$ $\therefore$ 兩人原相距 24 公里

【解二】設甲走到中點需 x 小時

$3x=2x+4 \Rightarrow x=4$

$3\times 4\times 2=24$ $\therefore$ 兩人原相距 24 公里

【解三】

因為甲、乙兩人走 1 小時的路程相差 $3-2=1$ 公里，由甲走至中點時，甲、乙相距 4 公里，

可推知甲走到中點費時 $4\div 1=4$ 小時

$3\times 4\times 2=24$ $\therefore$ 兩人原相距 24 公里

【問題六】如圖 2-5 中，$\overline{AD}$ 爲 $\angle BAC$ 的平分線，試證：$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$ 。

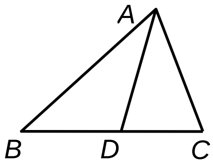


圖 2-5

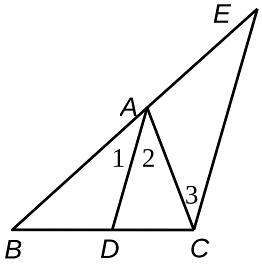


圖 2-6

【證一】如圖 2-6

(1)作 $\overleftrightarrow{CE}$ // $\overline{AD}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 E

(2) $\because \overline{AD}$ // $\overline{CE}$ $\therefore \angle 2=\angle 3$ ，$\angle 1=\angle E$

又 $\angle 1=\angle 2$ $\therefore \angle 3=\angle E \Rightarrow \overline{AE}=\overline{AC}$

(3) $\because \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AE}$

$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

【證二】如圖 2-7

(1)作 $\overleftrightarrow{DE}$ // $\overline{AC}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 E

則 $\angle BAD=\angle CAD=\angle ADE \Rightarrow \overline{AE}=\overline{DE}$

(2) $\because \overline{DE}$ // $\overline{AC}$ $\therefore \dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ ，

$\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ $\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

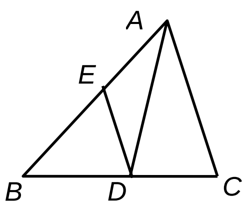


圖 2-7

【證三】如圖 2-5

(1) ΔABD面積$:\Delta ACD$面積$=\overline{BD}:\overline{CD}$

(2) $\because \angle BAD=\angle CAD \Rightarrow D$ 至 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{AC}$ 的距離相等 $\Rightarrow \Delta ABD:\Delta ACD=\overline{AB}:\overline{AC}$

由(1)(2) $\Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

【證四】

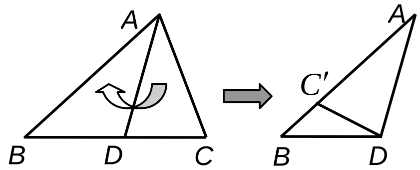


圖 2-8

由圖 2-8 的摺紙變化

$\overline{BD}:\overline{CD}=\Delta ABD$面積$:\Delta ACD$面積

$=\Delta ABD$面積$:\Delta AC'D$面積

$=\overline{AB}:\overline{AC'}=\overline{AB}:\overline{AC}$

【問題七】從 A 地開往 B 地以及從 B 地開往 A 地的巴士，都是每隔一小時開出一輛。A 至 B 的車是整點開出，B 至 A 的車是整點半(即 30 分)的時刻開出，A 至 B 與 B 至 A 的車都行駛同一條路線，且車程都是 4 個小時。請問由 A 至 B，早上 10 時開出的巴士，途中會遇到多少輛由 B 至 A 的巴士？

【解一】如圖 2-9 共有 8 個交點數，所以途中會遇到 8 輛由 B 至 A 的巴士。

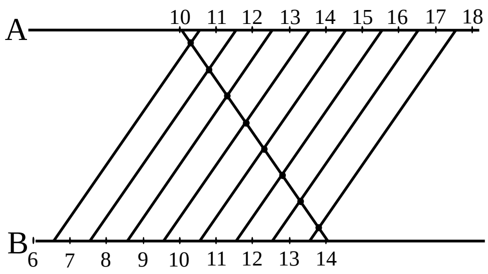


圖 2-9

【解二】早上 6 點 30 分由 B 至 A 的巴士，

因爲早上 10 之前不會到達 A，所以必會與

早上 10 時由 A 至 B 開出的巴士在途中相遇；同樣的理由，早上 10 時由 A 至 B 的巴士，因爲下午 2 時才會到達 B 地，所以必會與下午 1 時 30 分由 B 開至 A 的巴士在途中相遇。

早上 6 點 30 分至下午 1 時 30 分，這段時間共有 8 輛由 B 至 A 的巴士，將與早上 10 時由 A 至 B 的巴士在途中相遇。

【問題八】A、B 兩地之間，每天早上 8 點起，每隔 12 分鐘各有一班客車同時對開，而且行車時間都是 50 分鐘。請問早上 8 點 24 分由 A 開往 B 的客車，途中會遇到多少班由 B 開向 A 的客車？

【解法】由先前類似問題的解答與說明，此題解法可簡要如下，請讀者自行思考其中道理：

$$24+50=74 \qquad 74\div 12=6\frac{1}{37} \qquad 6+1=7$$

所以途中會遇到 7 班由 B 開向 A 的客車。

【問題九】甲、乙兩人從圓形跑道上的 A 點，同時各自以每秒 7 公尺和每秒 5 公尺的速率(1)反方向；(2)同方向跑步，當兩人第一次再相遇於 A 點時，跑步途中兩人相會多少次？

【解一】

(1)當兩人第一次相遇時，甲跑了 $\frac{7}{12}$ 圈，乙跑了 $\frac{5}{12}$ 圈。如果相遇 n 次時，甲、乙各自跑了 $\frac{7}{12}n$ 圈與 $\frac{5}{12}n$ 圈。因爲兩人都要跑整數圈時，才有機會在 A 點相遇，所以 $n=12$ 時，兩人第一次在 A 點相遇，兩人途中相遇了 $12-1=11$ 次。

(2)當乙第一次回到 A 點時，甲比乙多跑了 $\frac{7-5}{5}=\frac{2}{5}$ 圈。如果乙回到 A 點 k 次時，甲比乙多跑了 $\frac{2}{5}k$ 圈，因爲兩人都要跑整數圈時，才有機會在 A 點相會，所以 $k=5$ 時，兩人第一次在 A 點相會，甲比乙多跑了 2 圈，所以兩人途中相會了 $2-1=1$ 次。

【解二】甲、乙兩人的跑步速率爲 $7:5$，也就是說當甲跑 7 圈時，乙跑了 5 圈。

(1)同時同地反方向跑步時，相會一次就表示「合作」跑了一圈，當兩人第一次相會於 A 點時，兩人共跑了 $7+5=12$ 圈，所以途中相會 $12-1=11$ 次。

(2)同時同地同方向跑步時，每相會一次就表示跑較快者又比跑較慢者多跑了一圈，當兩人第一次相會於 A 點時，途中相會 $7-5-1=1$ 次。

如圖 2-10 中，$\overline{PQ}$ 表示甲、乙兩人同時出發到第一次回到原出發點所需的時間，而 $\overline{PS}$ 表示跑道的長度。在 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{SR}$ 上各有七等分點和五等分點，粗黑線上的點至 $\overline{PQ}$ 的距離，代表甲距出發點的位移長度，細黑線上的點至 $\overline{SR}$ 的距離，代表乙距出發點的位移長度，由粗黑線與細黑線共有 11 個交點(「○」記號)，可知甲、乙反向跑步的途中相會了 11 次。同時也讓我們看到離 $\overline{PS}$ 最近的「○」點(兩人第一次的相會點)，利用三角形的相似性質，可以了解此點到 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{SR}$ 的距離比爲 $7:5$，所以它是正確的圖示點，其它

的交會點就請讀者自行驗證其正確性。而由圖 2-11 中，粗黑線與細黑線只有 1 個交點(「○」記號)，我們也可以思考並了解甲、乙同向跑步的途中只相會 1 次。

圖 2-10 與圖 2-11 皆為點對稱圖形，而且圖形的旋轉中心正好是相會點總次數的最中間一點。這個交會點也正好是兩人跑步路程的二分之一處，而且離出發點有半個跑道長。

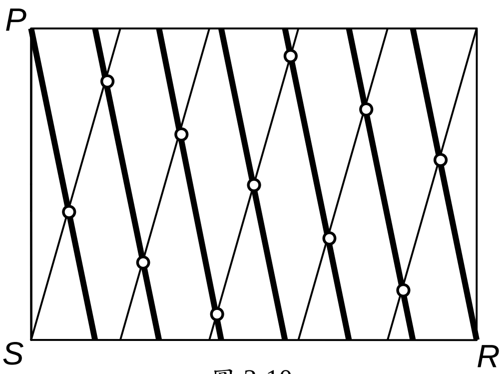


圖 2-10

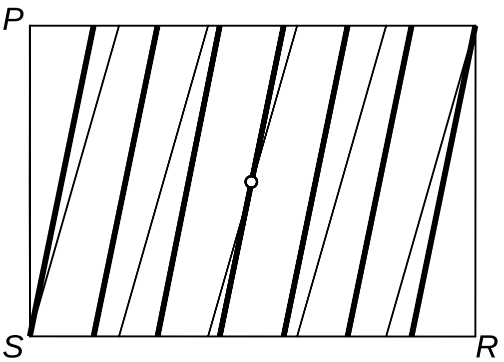


圖 2-11

我們若從圖 2-10 與圖 2-11 的矩形紙張中，取 $\overline{PS}$ 的四分之一及四分之三處，作兩條 $\overline{PS}$ 的垂直線段 $\overline{M_1M_2}$ 與 $\overline{M_3M_4}$，並將兩線段的一側摺向矩形 $M_1M_2M_4M_3$ (如圖 2-12、圖 2-13、圖 2-14、圖 2-15)。我們將圓形跑道想成一條頭尾相接的繩子，並切割成一前一後的等長(即 $\overline{M_1M_3}$ 長)兩段，甲、乙兩人由前段中點(「●」記號)出發(實線表示前段，虛線表示後段)，我們由圖 2-14 與圖 2-15 中，更容易看出兩人跑步途中各交會點與出發點、繩子的位置關係(也可以將圖 2-14 及 2-15 捲黏成圓柱外殼)。

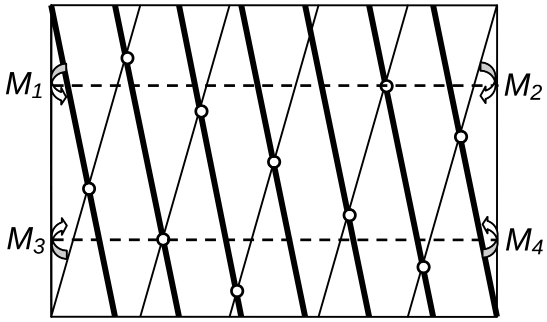


圖 2-12

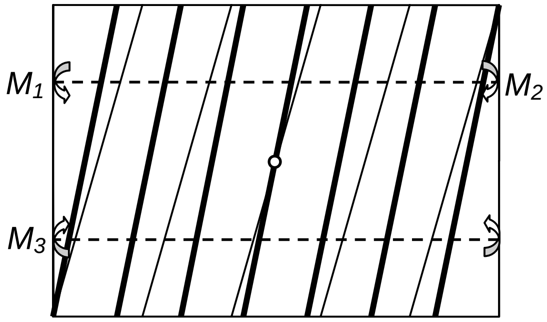


圖 2-13

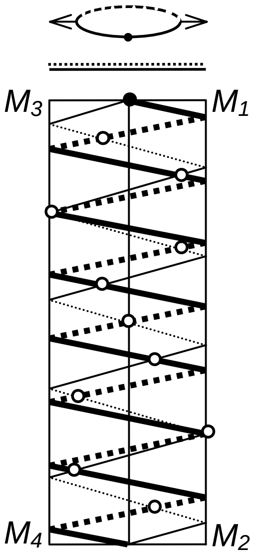


圖 2-14

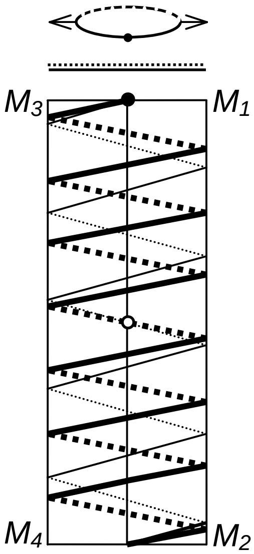


圖 2-15

許多中小學生常被問到：「從 0 時至 24 時，鐘面上的時針和分針，共重合多少次？(不包含 0 時與 24 時)」如果解題者把時針、分針想成一個跑兩圈時，另一個就跑 24 圈的兩名跑者，就很容易算出答案爲 $24-2-1=21$ 次了。(所以對於有實際跑步經驗的運動員來說，他們的解題反應，不像老舊思想講的：「四肢發達，頭腦簡單」！)不然，讀者可以再看下面的足球問題與解法：

【問題十】足球是由黑白兩種顏色的皮子縫製而成(如圖 2-16)，已知足球上的黑色皮子有 12 塊，那麼白色皮子有多少塊？

【解一】

由一塊緊鄰黑皮子的白皮子有 5 塊，一塊緊鄰白皮子的黑皮子有 3 塊，推知足球上白皮子的塊數是黑皮子的 $\frac{5}{3}$ 倍。

圖 2-16

$\therefore$ 白色皮子有 $12\times\frac{5}{3}=20$ (塊)。

【解二】

黑色皮子是正五邊形，共有 $5\times 12=60$ 個邊，而每個白色皮子均與黑色皮子有 3 個邊相接，所以白色皮子的塊數爲 $60\div 3=20$ (塊)。

有個很愛玩足球的學生，可以從問題所給的足球圖，確認它的後視圖(如圖 2-17)，然後很有把握的說：「前看後看都是 6 個黑皮、10 塊白皮。」

圖 2-17

【解三】

$10\times 2=20$

白色皮子有 20 塊。

【問題十一】

計算

$1276^2-1274^2+1273\times 1275-1274\times 1276$ 的值。

【解一】求值式

$=(1276+1274)(1276-1274)+1273\times 1275$

$-(1273+1)(1275+1)$

$=2550\times 2-(1273+1275+1)=5100-2549=2551$

【解二】求值式

$=(1276^2-1274\times1276)+(1273\times1275-1274^2)$

$=1276(1276-1274)+(1274^2-1-1274^2)$

$=1276\times2-1=2551$

【解三】求值式

$=(1276+1274)(1276-1274)+1623075-1625624$

$=2550\times2-2549=5100-2549=2551$

【問題十二】計算

$9+99+999+\cdots\cdots+9999999999$ 之值。

【解一】求值式

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots\cdots+(10^{10}-1)$

$=\dfrac{10(10^{10}-1)}{10-1}-10=\dfrac{10^{11}-100}{9}=11111111100$

【解二】求值式

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots\cdots+(10^{10}-1)$

$=11111111110-10=11111111100$

【解三】求值式

$=9\times(1+11+111+\cdots\cdots+1111111111)$

$=9\times(1234567900)$

$=12345679000-1234567900=1111111100$

回顧問題十一和十二的第三種解法，解題者對於「乘法公式」或「等比級數公式」的運用，雖不如前列幾種解法來得熟練，但仍不失為「窮則變，變則通」的精明處理。(就是有學生過於固執或大意：既然學了「公式的使用」，就應善加利用公式以簡化計算，一旦想不通如何使用公式解題時，竟然連基本的計算能力也跟著消失了！)反觀問題十二的第一種解法，相對略顯得僵化而「小題大作」。

讀者可以從接下來兩個幾何題(第十三和第十四題)的解答內容中，發現它們不只有「一般性」的共同解法(如兩題的第一種解法)，也可以欣賞適用於「特殊性」的第二種解法。而且筆者相信，將這些解法結合、對照，有助於啓迪解題者「兵無常勢，水無常形」的處事思想。若將問題條件稍加改變成為問題十四，經此相關問題的解題啓發，就會發現問題十三(或十四)，其實還有更精簡的共同解法。

【問題十三】矩形 $ABCD$ (如圖 2-18)，E 、F 分別為 $\overline{BC}$和$\overline{CD}$ 上兩點，若 ΔADF 、ΔCEF 、ΔABE 面積分別為 4、3、5，求 ΔAEF 面積。

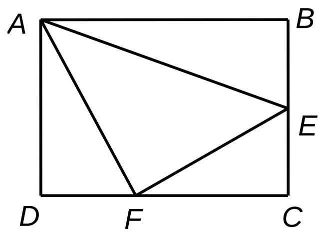


圖 2-18

【解一】設 $\overline{AB}=a$ ，$\overline{AD}=b$

$\Rightarrow \overline{BE}=\dfrac{10}{a}$ ，$\overline{DF}=\dfrac{8}{b}$

$\Rightarrow \overline{CE}=b-\dfrac{10}{a}$ ，$\overline{CF}=a-\dfrac{8}{b}$

又 $\dfrac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{CE}=3\Rightarrow\dfrac{1}{2}(a-\dfrac{8}{b})(b-\dfrac{10}{a})=3$

$(a-\dfrac{8}{b})(b-\dfrac{10}{a})=6\Rightarrow ab+\dfrac{80}{ab}-8-10=6$

$(ab)^2-24ab+80=0\Rightarrow(ab-20)(ab-4)=0$

$ab=20$ 或 $ab=4$ (不合)

ΔAEF 面積$=20-3-4-5=8$

【解二】如圖 2-19

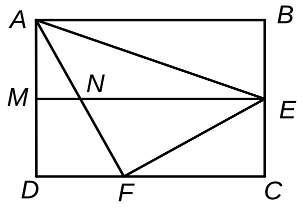


圖 2-19

分別取 $\overline{AD}$ 和 $\overline{AF}$ 的中點 M 、 N

連 $\overline{MN}$ ， $\overline{NE}$ $\Rightarrow \overline{MN} // \overline{DF}$

由 ΔAEN 面積= ΔFEN 面積(令為 x)，

ΔAMN 面積= $4\times\frac{1}{4}=1$，梯形 $MDFN$ 面積=3

$\Rightarrow (\Delta AMN+\Delta AEN+\Delta ABE)$面積 $=6+x$

$=($梯形$MDFN+\Delta FEN+\Delta ECF\ )$面積

又 $\overline{MN} // \overline{DF} \Rightarrow \overline{NE} // \overline{CD}$ (即 E 為 $\overline{BC}$ 的中點)

$\Rightarrow \overline{ME} // \overline{CD}$　 $\therefore \Delta AME$ 面積 $=\Delta AEB$ 面積=5

$\Rightarrow x+1=5 \Rightarrow x=4$

$\therefore \Delta AEF$ 面積= $4\times 2=8$

【問題十四】矩形 $ABCD$ (如圖 2-20)，E 、F 分別為 $\overline{BC}$和$\overline{CD}$ 上兩點，若 ΔADF 、ΔCEF 、ΔABE 面積分別為 4、2、6，求 ΔAEF 面積。

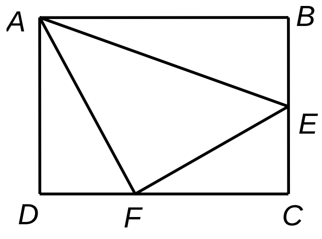


圖 2-20

【解一】設 $\overline{AB}=a$ ，$\overline{AD}=b$

$\Rightarrow \overline{BE}=\frac{12}{a}$ ，$\overline{DF}=\frac{8}{b}$

$\Rightarrow \overline{CE}=b-\frac{12}{a}$ ，$\overline{CF}=a-\frac{8}{b}$

又 $\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{CE}=2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a-\frac{8}{b})(b-\frac{12}{a})=2$

$(a-\frac{8}{b})(b-\frac{12}{a})=4 \Rightarrow ab+\frac{96}{ab}-8-12=4$

$(ab)^2-24ab+96=0$

$\Rightarrow ab=\frac{24\pm\sqrt{192}}{2}=12\pm\sqrt{48}=12\pm4\sqrt{3}$

若 $ab=12-4\sqrt{3}$ ，則 $ab<6+4+2$ 不合

【解二】如圖 2-21

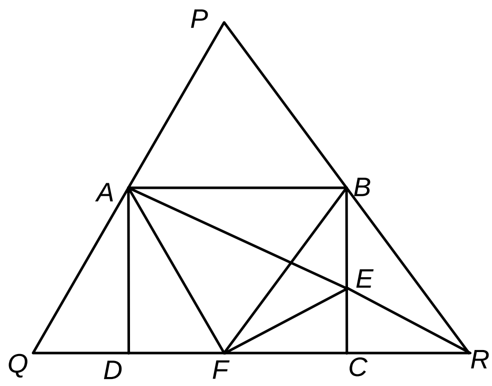


圖 2-21

(1)連 $\overline{BF}$ ，令 ΔAEF 面積為 a 。

(2)以 $\overline{AD}$ 為軸，作 ΔADF 之鏡射圖成 ΔADQ ；

以 $\overline{AB}$ 為軸，作 ΔABF 之鏡射圖成 ΔABP ；

以 $\overline{BC}$ 為軸，作 ΔBCF 之鏡射圖成 $\Delta BCR \Rightarrow A$ 為 $\overline{PQ}$ 的中點。

(3)連 $\overline{ER}$ 。

(4) $\because \Delta PQR$ 的面積 $=2a+24$

而 $(\Delta AQF+\Delta AEF+\Delta EFR)$面積 $=a+12$

$=\Delta PQR$ 面積的一半

$\Rightarrow A$ 、 E 、 R 三點共線，且 $\overline{AR}$ 爲 ΔPQR 的一條中線。

(5) $\because \Delta ABE \sim \Delta RCE$ ， $\Delta ABE:\Delta RCE=6:2$

$\therefore \overline{BE}:\overline{CE}=\sqrt{3}:1 \Rightarrow$ 矩形 $ABCD$ 面積

$=6\times 2\times(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}})=12+4\sqrt{3}$

$\therefore \Delta AEF$ 面積 $=12+4\sqrt{3}-6-4-2=4\sqrt{3}$

【問題十五】矩形 $ABCD$ (如圖 2-22)的面積爲 24， E 、 F 分別爲 $\overline{BC}$和$\overline{CD}$ 上兩點，若 ΔADF 、 ΔABE 面積分別爲 8、2，求 ΔAEF 面積。

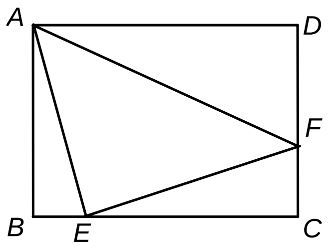


圖 2-22

【解答】

(1)分別過 E、F 作 $\overline{NE}\,//\,\overline{AB}$ 、 $\overline{MF}\,//\,\overline{AD}$ (如圖 2-23)，令 $\overline{NE}$ 和 $\overline{MF}$ 交於 P。

(2)矩形 $ABEN$ 面積=4 $\Rightarrow$ 矩形 $NECD$ 面積 =20

$\therefore \overline{BE}:\overline{CE}=4:20=1:5$

(3)矩形 $AMFD$ 面積=16 $\Rightarrow$ 矩形 $FMBC$ 面積 =8 $\quad\therefore \overline{DF}:\overline{CF}=16:8=2:1$

(4)由(2)，(3)推得矩形 $PECF$ 面積

$=24\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{20}{3} \quad \Rightarrow \Delta CEF$ 面積 $=\dfrac{10}{3}$

$\therefore \Delta AEF$ 面積

$=24-2-8-\dfrac{10}{3}=14-\dfrac{10}{3}=\dfrac{32}{3}$

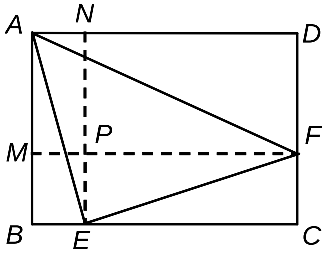


圖 2-23

以下是問題十三的第三與第四種解法：

【解三】如圖 2-24

設矩形 $ABCD$ 面積= k

$\therefore \overline{DF}:\overline{FC}=8:(k-8)$ ，

$\overline{BE}:\overline{EC}=10:(k-10)$

由 $k\times\dfrac{k-8}{k}\times\dfrac{k-10}{k}=3\times 2$

$\Rightarrow (k-8)(k-10)=6k$

$\Rightarrow k^2-24k+80=0 \Rightarrow (k-20)(k-4)=0$

$\therefore k=20$或4(不合)

故 ΔAEF 面積$=20-3-4-5=8$

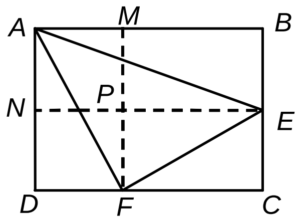


圖 2-24

【解四】如圖 2-24

(1)分別過 E、F 作 $\overline{NE}\,//\,\overline{AB}$ 、 $\overline{MF}\,//\,\overline{AD}$ ，令 $\overline{NE}$ 和 $\overline{MF}$ 交於 P。

(2)令矩形 $ANPM$ 面積 $=x \Rightarrow$ 矩形 $BEPM$ 面積 $=10-x$ ，矩形 $DFPN$ 面積 $=8-x$

由 $x:(8-x)=(10-x):6$

$\Rightarrow 80-18x+x^2=6x \Rightarrow x^2-24x+80=0$

$\Rightarrow (x-20)(x-4)=0$

$\therefore x=20$(不合)或$x=4$

故 ΔAEF 面積

$=(4+4+6+6)-(3+4+5)=8$

針對問題十三的類似問題，我們也可依以上所論及的幾種解題觀念，以代數式列出四個三角形的面積關係(如圖 2-25)：

令 $\overline{AB}=x$ ，$\overline{AD}=y$ ，ΔADF 、ΔCEF 、ΔABE 、ΔAEF 面積分別為 a 、b 、c 、S 。

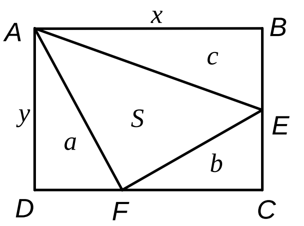


圖 2-25

$\because \overline{DF}=\dfrac{2a}{y}$ ，$\overline{BE}=\dfrac{2c}{x}$

$\Rightarrow \overline{CF}=x-\dfrac{2a}{y}$ ，$\overline{CE}=y-\dfrac{2c}{x}$ ，推得方程組

$$\begin{cases} xy=a+b+c+S \cdots\cdots\cdots(1) \\ \left(x-\dfrac{2a}{y}\right)\left(y-\dfrac{2c}{x}\right)=2b \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(2) $\Rightarrow xy-2a-2c+\dfrac{4ac}{xy}=2b$

$\Rightarrow xy+\dfrac{4ac}{xy}=2a+2b+2c \cdots\cdots(3)$

(1)代入(3) $\Rightarrow \dfrac{4ac}{a+b+c+S}=a+b+c-S$

$\Rightarrow 4ac=(a+b+c)^2-S^2$

$\therefore S=\sqrt{(a+b+c)^2-4ac}$

如果將以下五個問題全部出列在一張試卷上，再拿給學生測驗，相信有不少學生會「多題一解」，甚至五個問題的解程「如出一徹」(尤其是資賦優異的學生)，這可應驗 Lester(1985)模式的後設認知理論中，有關後設認知成分之「作業變項」(如獨特作業特色的察覺力會影響表現)：

1.有一個等差數列，第五十三項是 75，公差為-1，求首項。

2.張三數數：1，2，3 ……，李四同時以同速率倒數：a ，$a-1$ ，$a-2$ ……。如果張三數到 53 時，李四數到 75，試求 a 。

3.張三從車頭(第一號車廂)走向車尾，當他走到第 53 號車廂時，李四也以等速率由車尾走向車頭，而到了第 75 號車廂，求此列車共有多少節車廂。

4.每張都寫著一個整數 1，2，3，4，……的一疊卡片，依其上面的數字由小而大，收在一位魔術師的手上。這位魔術師每次出手都會把手上一疊卡片的最外層兩張卡片同時丟出。只見某次丟出的兩張卡片各自寫著 53 和 75，請問魔術師的手上共有多少張卡片？

5.在一個挑戰跳舞時間最久的大型舞會上，一群男女舞者交換跳舞，已知全部的女孩都與一號男孩跳過；有一個女孩沒跟二號男孩跳過；有兩個女孩沒跟三號男孩跳過……如果 53 號男孩共與 75 個女孩跳過，求全部的女孩人數。

但是若將以上五個問題分開寫在不同的試卷上，並在不同的時間拿給同一批學生測驗，剛才解程「如出一徹」的情況可能就不多見了。這個現象除了可以顯示，解題行為可能受到某些客觀環

境因素改變的影響；也可以時時提醒每位教材編寫者與教學者，當學校出現所謂「死讀書」、「死腦筋」或「無藥可救」的學生時，教材問題的精心規劃與教學活動的用心安排，不只可以讓他們「起死回生」，甚至還能使他們展露「無限生機」。

三、結語：

如圖 3-1 中，智慧「✯」被深藏在三圈門牆的內部，而三圈門牆是由許多棉花棒(一支代表一道旋轉門，可以棉花棒其中一個端點為中心任意旋轉)緊鄰圍成的三個正方形。現在圖中的人「🕴」正準備轉動第一道門(作「×」記號的一支)，若再允許轉動另外兩道門，請問轉動哪三道門會使自己(1)距「✯」的路程最短？(2)距「✯」的路程最遠？(只有一條路，而且此路可以到達「✯」。)

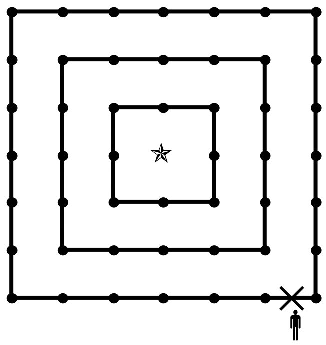


圖 3-1

【解答】
(1)如圖 3-2 即可。

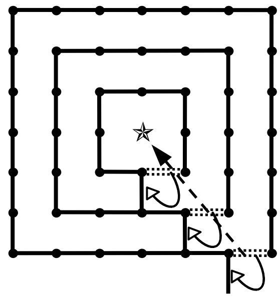


圖 3-2

(2)如圖 3-3 即可。

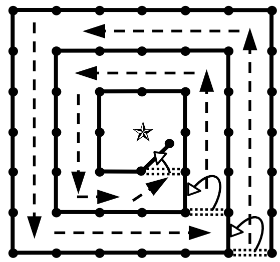


圖 3-3

受到「知行合一」文化與思想的深遠影響，中國人在課堂教育的觀念與方式上，都比較偏重肯定或期待「即知即行」與「學什麼，像什麼」的學習歷程與價值觀。不過對於數學解題的教學活動，還是有許多人堅持「路不一定是一個人走出來的」，以及「學什麼，不一定要像什麼」的理念和原則，因為這些人相信只有適度尊重孩子的思想，鼓勵並引導孩子動腦筋，孩子日後才會具備更多絕處逢生的勇氣和智慧。