中學生通訊解題第三十三期
題目參考解答與評析

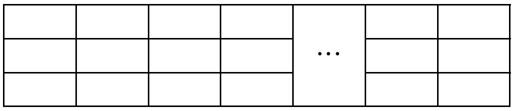
臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
933301

(1)如下圖 G1，一個 3×4 的棋盤，最後一列（橫爲列）都染上黑色，其他的方格染上黑色或白色。試證：其他的方格無論如何染色，若把每一方格當作一個點，棋盤中一定含有一個矩形，它的四個頂點的顏色相同。（註：此處矩形是指長寬均不小於 2 的矩形）

(2)如下圖 G2，在一個 3×n 的棋盤中的每個方格均染以黑色或白色，試求出最小的自然數 n，使得對於任何一種染色法，棋盤一定含有一個矩形，它的四個頂點的顏色相同。

G1



G2

參考解答：

解法一：

(1)假設無法形成同色矩形，

則一、二列中每列最多只能有一格黑色，

則一、二列中至少有兩格白色

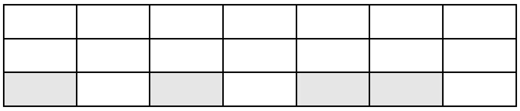
則一、二列中，在 1~4 行中，至少有相同兩行均爲白色

則產生白色同色矩形，矛盾。

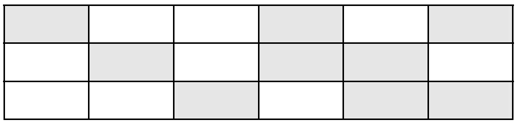
故必可產生同色矩形。

(2)

①在 3×7 的格子中，最後一列必有一個色繪圖 4 格以上，令爲黑色，只管最後一列塗黑的四行，由第一小題可知這四行中必有同色矩形，故 3×7 之格中，必可找到同色矩形。



②給一 3×6 之塗法如下，完全無同色矩形

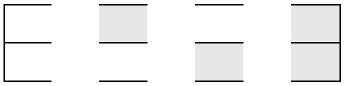


綜合①、②可知，欲使 3×n 必有同色矩形，n 之最小值爲 7。

解法二：

(1)

2×1 之塗法有 4 種



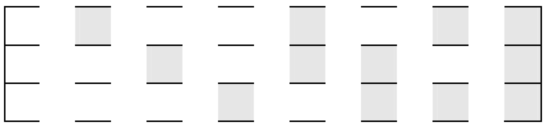
a　　b　　c　　d

欲把 a, b, c, d 任意放入 1, 2, 3, 4 之中，若欲使其無同色矩形

①若用 d 則 b, c 不可用，否則與第三列成同色矩形，所以只能用 a，但 a, d 均不能用兩次，否則形成同色矩形，故不可用 d。

②則 a, b, c 至少有一用兩次，若是 b 或 c 用兩次，均與第三列成同色矩形，若是 a 用兩次，自己形成同色矩形。故不可能不形成同色矩形。

(2) 3×1 共有 $2^3=8$ 種



1　　2　　3　　4　　5　　6　　7　　8

①欲製造最大之不含同色矩形之長方形，若使用同一號碼 2 次，必產生同色矩形。若使用 1 或 8，最多只能用 4 個，否則產生同色矩形，不使用 1,8，2~7 各用一次，完全不產生同色矩形。

②若是 3×7 以上，必同一號用兩次，使用 1 或 8 至少有一發生，故必產生同色矩形。

由（1）（2）知，3xn 必有同色矩形，n 之最小值為 7。

解題重點：

可用鴿籠原理判斷，亦可直接由簡單邏輯推導判斷。

評析

本題徵答人數共有 26 人，其中全對者有 3 人，平均得分為 4.79 分，其中答題優良或解題方法富參考價值者有北市民生國中張文勻同學、北市敦化國中時丕勳同學、北市蘭雅國中呂高安同學。

問題編號 933302

如圖，足球之表面撲滿了正五邊形及正六邊形，每一個正五邊形周圍接了五個正六邊形，每一個正六邊形周圍接了三個正五邊形及三個正六邊形，且每個頂點處，都是由兩個正六邊形及一個正五邊形組成，假設足球之表面共有 m 個正六邊形，及 n 個正五邊形。

(1)試以 m，n 表示足球表面之多面體之邊數(稜數)

(2)試以 m，n 表示足球表面之頂點數

(3)試計算 m，n

(4)若尤拉告訴我們，任一多面體之面數加上頂點數減去稜數必為 2，試問足球表面為幾面體？

參考解答：

1.六邊形與五邊形共有（6m＋5n）個邊，但每個邊都使用兩次，故多邊形有（6m＋5n）/2 個邊。

2.六邊形與五邊形共有（6m＋5n）個頂點，但多面體之每一頂點都是三個頂點結合而成的，故有（6m＋5n）/3 個邊頂點。

3.每一個頂點都是兩個六邊形之頂點及一個五邊形之頂點而成，故

$$\frac{6m}{2}=\frac{5n}{1}\Rightarrow m:n=5:3$$

4. $$\begin{cases}(m+n)+(\frac{6m+5n}{3})-(\frac{6m+5n}{2})=2\\3m=5n\end{cases}$$

$$\Rightarrow (m,n)=(20,12)$$

故多面體為 32 面體。

解題重點：

觀察每個頂點及每個邊之組合情形是關鍵。只要抓住這個重點，即可解出。解題的方式不只一種思維，大家可盡量多觀察多想像。

評析

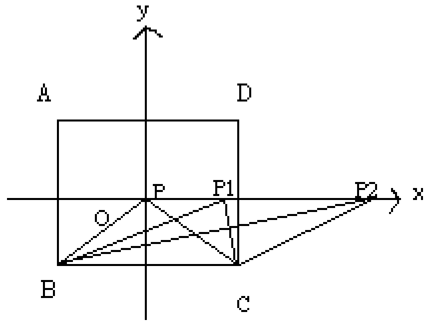
本題徵答人數共有 15 人，答對者有 10 人，平均得分為 6.26 分，其中答題優良或解題方法富參考價值者有台東縣新生國中蘇峻緯同學、北市敦化國中時丕勳同學、新竹市光華國中楊涵傑同學，彰化市陽明國中楊鎮宇同學。

問題編號

933303

若 p 點為正方形 ABCD 所在平面上的任意一點，請問存在多少個 P 點，使得 ΔPAB、ΔPBC、ΔPCD、ΔPDA 都是等腰三角形？並請說明之。

參考解答：



如圖，設正方形兩對角線交於 O 點，將 O 點當成原點，在正方形上建立直角座標系，使 x 軸平行 $\overline{AD}$，y 軸平行 $\overline{AB}$。若 P 在 x 軸上，則 $\overline{PA}=\overline{PB},\overline{PC}=\overline{PD}$，若 P 在 y 軸上，則 $\overline{PA}=\overline{PD},\overline{PC}=\overline{PB}$，若 P 既不在 x 軸上也不在 y 軸上，則顯然 $\Delta PAB,\Delta PBC,\Delta PCD$ 與 ΔPDA 中必有一個不是等腰三角形。因欲找出等腰三角形 $\Delta PAB,\Delta PBC,\Delta PCD,\Delta PDA$，所以 P 點必在 x 軸或 y 軸上。因為正方形為對稱圖形，所以僅討論 x 軸正向之可能點。欲使 ΔPBC 為等腰三角形，觀察圖形可知 $\overline{PB}=\overline{PC},\overline{P_1B}=\overline{BC},\overline{P_2C}=\overline{BC}$，所以 P、P1、P2 合乎所求。同理，x 軸負向，y 軸正向，y 軸負向上各有 3 點，合乎所求，所以存在 9 個 p 點，使得 $\Delta PAB,\Delta PBC,\Delta PCD,\Delta PDA$ 都是等腰三角形。

評析

本次回函的同學共有 54 位，其中正確解題的同學有 39 位，占全體的 72%，回答錯誤(含不完整)的同學有 15 位，占全體同學的 28%。答題正確、較好的有師大附中王思翰同學，台東新生國中蘇峻緯同學，新竹光華國中范祐維同學、北市南門國中羅兆揚同學，北市北投國中陳映君同學，北縣江翠國中史宜平同學等。

問題編號 933304

在一個正立方體的八個頂點上分別標上＋1 或－1，在六個面上也分別標上一個數，它等於這個面的四個頂點處的數的乘積。試問用這樣方法所標示的 14 個數字的和能否為 0？並請說明之。

參考解答：

考慮這 14 個數的積 s，將每個面所標的數寫成 4 個頂點處的數的乘積，那麼這個數不是 1 就是-1。這樣，在 s 中，每個頂點所標的數將作為乘數出現 4 次，從而他對 s 的貢獻為 1

，因此 s=18=1。14 個數的積 s 為 1，所以這 14 個數中，-1 的各數為偶數。由於-1 的個數不為 7，這 14 個數的和不為 0。

解題重點

能討論任一的變數改變時所影響到其他變數的奇偶與總合的關係，才算是完整。

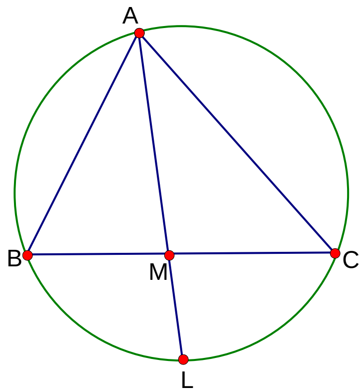
評析

此題答對率頗高，13 人作答，其中 13 人都能得出正確答案。

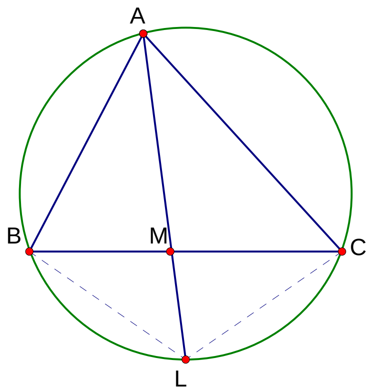
問題編號 933305

如圖，ΔABC 內接於一個圓，$\overline{AM}$ 是 $\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 M，延長 $\overline{AM}$ 於 $\overline{BC}$ 於 L，

試以 a、b、c 來表示 $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AL}}$ 之值。



參考解答：



1.如圖連接 $\overline{BL}$、$\overline{CL}$，∵ $\overline{AM}$ 為 $\angle A$ 的平分線，

$\therefore \overline{BM}:\overline{CM}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$c\cdot\overline{CM}=b\cdot\overline{BM}\Rightarrow c\cdot(a-\overline{BM})=b\cdot\overline{BM}$

$\Rightarrow \overline{BM}=\dfrac{ac}{b+c}$,同理$\overline{CM}=\dfrac{ab}{b+c}$

2. △BML～△AMC $\therefore \overline{AM}\cdot\overline{ML}=\overline{BM}\cdot\overline{CM}$

3. △ABM～△ALC

$\therefore \overline{AB}:\overline{AL}=\overline{AM}:\overline{AC}\Rightarrow \overline{AM}\cdot\overline{AL}=b\cdot c$

$\Rightarrow \overline{AM}\cdot(\overline{AM}+\overline{ML})=b\cdot c$

$\Rightarrow \overline{AM}^2+\overline{AM}\cdot\overline{ML}=b\cdot c$

$\Rightarrow \overline{AM}^2+\overline{BM}\cdot\overline{CM}=b\cdot c$

$\Rightarrow \overline{AM}^2=bc-\dfrac{a^2bc}{b^2+2bc+c^2}=\dfrac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}$

$\Rightarrow \overline{AL}^2=\dfrac{b^2c^2}{\overline{AM}^2}=\dfrac{b^2c^2(b+c)^2}{bc(b+c+a)(b+c-a)}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AL}}=\dfrac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$

（基隆銘傳國中　紀瑋銘同學提供）

評析

我們再最近通訊解題的每一期都會初一題幾何證明題，因為國中在幾何證明的訓練太少了。同學要有耐心與細心，想辦法去證明，並藉著題目來複習自己的幾何知識是否足夠，若不夠請趕快加強，相信假以時日，你也可以是一位幾何高手。這次的幾何題需用到國中選修部分角平分線的觀念與相似形來證明，並不會很困難，回函者幾乎都是全對。

（上承第 60 頁）

水間的反應，以碳酸鈣的沈澱形成（化學日出）及溶解（化學日落）來判斷反應之完成及其反應速率。此一反應速率之測定與國中理化舊教材中以「鹽酸與硫代硫酸鈉」溶液置於投影機上來觀察其反應速率的過程有點類似，唯一不同是當鹽酸與硫代硫酸鈉溶液反應完全時所產生的「硫」沈積下來時會把光線遮住，由此過程在螢幕上光線的變化是由明亮漸漸變黑暗，猶如由傍晚進入黃昏的夕陽西下（日落）的景象。其反應式為：

$2\,HCl_{(aq)}+Na_2S_2O_{3(aq)}$　　　$2\,NaCl_{(aq)}+S_{(s)}+H_2O+SO_{2(g)}$

鹽酸　硫代硫酸鈉　氯化鈉　硫　水　二氧化硫

然而若以「鹽酸與硫代硫酸鈉溶液」在本文所設計的「化學日出日落實驗裝置」來進行實驗時，則當鹽酸與硫代硫酸鈉溶液在反應槽中反應完全時所產生的「硫」沈積下來時會把光線遮住市售自動小夜燈的光感受器，由此過程所見到的現象是由反應槽中的光線由明亮變黑暗，此刻市售自動小夜燈的光感受器就像處於黑暗處而使自動小夜燈的燈泡漸漸明亮起來，猶如黎明的日旭東昇（日出）的景象。

參考資料

1.方金祥 (民 92)。 教師創意微型化學實驗教學設計。國民中小學九年一貫課程理論基礎（二)，431-452 頁，教育部出版。

2.國中理化第三冊化學反應速率實驗，國立編譯館出版（八十年版)。