

# 中學生通訊解題第三十二期

## 題目參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號  
930201

- (1)如圖一，有五個方格，其中四格按順序排上 1,2,3,4 四個數字，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 4,3,2,1，試問最少要移動幾個步驟？

	1	2	3	4
--	---	---	---	---

圖一

- (2)如圖二，有七個方格，其中六格按順序排上 1,2,3,4,5,6 六個數字，請依照下列移動規則，在原來的六個格子，將順序變成 6,5,4,3,2,1，試問最少要移動幾個步驟？

	1	2	3	4	5	6
--	---	---	---	---	---	---

圖二

### 【移動規則】

- 1.每次可以向左或向右移動一格到空的格子處。
- 2.每次也可以向左或向右跳一格到空的格子處，注意只能跳一格。

### 參考解答：

- (1) 5  
(2) 21

0123456

- |            |             |             |
|------------|-------------|-------------|
| 1. 2103456 | 8. 4201635  | 15. 6402513 |
| 2. 2143056 | 9. 4261035  | 16. 6452013 |
| 3. 2143650 | 10. 4261530 | 17. 6452310 |
| 4. 2143605 | 11. 4261503 | 18. 6452301 |
| 5. 2140635 | 12. 4260513 | 19. 6450321 |
| 6. 2041635 | 13. 4062513 | 20. 6054321 |
| 7. 0241635 | 14. 0462513 | 21. 0654321 |

### 評析

這個題目是個實際操作的題目，希望能從數量少的操作過程找出其規律性，找出正確的步驟，將來到了高中更可利用數學歸納法證明。但有些同學在做此題時，只是把它完成而已，而沒有想到是否還有更少的步驟可以完成。不過也有很優秀的同學找出  $n$  時所需最少的步驟。

也提供此題的做法：

(1)

步驟		1	2	3
1	1		2	3
2	1	3	2	
3	1	3	2	4
4	1	3		4
5		3	1	4
6	3		1	4
7	3	4	1	
8	3	4	1	2
9	3	4		2

(2)

步驟		1	2	3	4	5	6
1	2	1		3	4	5	6
2	2	1	4	3		5	6
3	2	1	4	3	6	5	
4	2	1	4	3	6		5
5	2	1	4		6	3	5
6	2		4	1	6	3	5
7		2	4	1	6	3	5
8	4	2		1	6	3	5
9	4	2	6	1		3	5
10	4	2	6	1	5	3	
11	4	2	6	1	5		3
12	4	2	6		5	1	3
13	4		6	2	5	1	3
14		4	6	2	5	1	3
15	6	4		2	5	1	3
16	6	4	5	2		1	3
17	6	4	5	2	3	1	
18	6	4	5	2	3		1
19	6	4	5		3	2	1
20	6		5	4	3	2	1
21		6	5	4	3	2	1

問題編號  
930202

有一串數字，它的規則是這樣的：「由左至右，每一個位置的數字等於它前面兩個位置的數字和的末位數字」。例如：134718976392...

試證明：無論第 1 位置和第 2 位置的數為任何數，第 1 位置和第 2 位置的數將同時與第 121 位置和第 122 位置的數相同。

**參考解答：**

case1. 第 1 位置和第 2 位置分別為 0,1，則

0112358314594370774156178538190  
9987527965167303369549325729101

以上 60 個一循環。

case2. 第 1 位置和第 2 位置分別為 0,2，則

0224606628088640448202

以上 20 個一循環。

case3. 第 1 位置和第 2 位置分別為 0,5，則

05505

以上 3 個一循環。

case4. 第 1 位置和第 2 位置分別為 1,3，則

13471897639213

以上 12 個一循環。

case5. 第 1 位置和第 2 位置分別為 2,6，則

268426

以上 4 個一循環。

case6. 第 1 位置和第 2 位置分別為 0,0，則 00

以上 1 個一循環。

$60+20+3+12+4+1=100$  全部的二位數都討論完畢。且 120 為 60,20,3,12,4,1 之公倍數。故 121 和 122 位置的數將同時與 1 和 2 相同。

**評析**

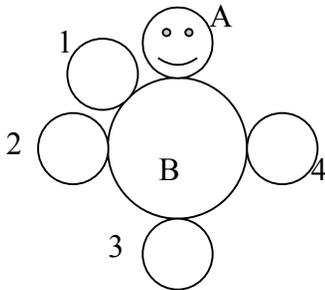
此題之目的在於希望答題者能充分討論每個二位數當開頭時都有 60 個一循環之規則。答此題者共 22 人，其中有 11 人答對，另外 11 個人答題不完全。大部分答題不完全的人僅討論以 1,1 開頭或以 1,3 開頭，而忽略了仍有部分兩位數沒討論到。有少數答對的同學以 a,b 開頭，進而發現每 15 個數循環後的兩數為原兩數的 7 倍，故 60 個數循環後的兩數與原兩數相同。這是很好的解法。

問題編號  
930203

圓板 A 的半徑為 10cm。圓板 B 的半徑為 20cm。若圓板 A 沿著圓板 B 之邊界逆時

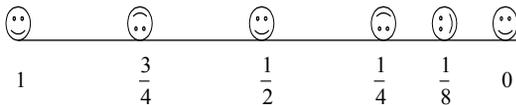
針滾動一圈，試分別劃上圓板 A 滾到右圖中 1,2,3,4 之位置時，臉譜的方向。(其中

1.在  $\frac{1}{8}$  圓之位置)



**參考解答一：**

1.先把圓周折成一直線，滾動的情形如圖一



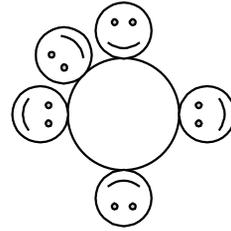
圖一

**參考解答二：**

觀察圓心，可知整個 A 滾動的路徑為半徑 20cm 之圓。即滾動了三圈（或利用相對運動也可知 2+1 圈）所以在各點所對應之角度如下：

1.  $360^\circ \times 3 \times \frac{1}{8} = 135^\circ$
2.  $360^\circ \times 3 \times \frac{1}{4} = 270^\circ$
3.  $360^\circ \times 3 \times \frac{1}{2} = 540^\circ \rightarrow 180^\circ$
4.  $360^\circ \times 3 \times \frac{3}{4} = 810^\circ \rightarrow 90^\circ$

即可畫圖如下。



**解題重點：**

- 1.化曲線為直線，較易掌握。
- 2.兩圓之關係，可由兩圓圓心出發，利用兩圓圓心的距離固定，較易尋找其相對關係。
- 3.利用相對運動來分析兩圓之相對關係。

**評析：**

本題徵答人數共 49 人，其中全對者有 12 人，平均得分 .98。其中答題優良且解法富參考價值的有台北市福和國中林學庸同學、彰化縣陽明國中楊鎮宇同學、台北景興國中顏友理同學、台北縣江翠國中李鎬同學、吳商融同學、台南縣建興國中林映辰同學、林煜翔同學。值得一提的是，林學庸同學，雖然只有一年級，卻是唯一懂得利用解法一的同学，跳脫曲線的思維，實為難能可貴。

問題編號  
930204

- (1)將一長為 22 公分之繩子圍成一矩形，試求此矩形面積之最大值？
- (2)若此矩形的邊長皆為正整數，則最大面積為何？
- (3)承上題。將「22」分成 n 個正整數的和，試求此 n 個正整數乘積的最大值是多少？

**參考解答：**

- (1)設矩形長為 x，寬為 11-x

$$\text{面積} = x(11-x) = -\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{121}{4}$$

故長為  $\frac{11}{2}$  公分，寬為  $\frac{11}{2}$  公分時，最大面

積為  $\frac{121}{4}$  平方公分。

(2)

長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
寬	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
面積	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10

由上表可知，長與寬最接近時(5,6)、(6,5)，可得最大面積 30 平方公分。

(3)由上可知，約將兩數平分時，其乘積可得最大

但若以 8 而言  $8=4+4=(2+2)+(2+2)$ ，

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

可是  $8=3+3+2$ ， $3 \times 3 \times 2 = 18$

$18 > 16$  可見分成多個之和時，並非恰好平分時可得乘積最大

因  $(2+2)+(2+2)=[(2+2+2)+2]$ ，前三個 2 可改成 3+3

而  $3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$

故雖越接近平分，但三個可改以二個 3 取代之，故應以 3 的個數越多，且 2 的個數不要超過二個時可得最大乘積

$$22=11+11, 11 \times 11=121$$

$11=5+6$ ，即  $22=(5+6)+(5+6)$ ，則  $5 \times 6 \times 5 \times 6=900 > 121$ ，因  $5 \times 6 > 11$

$5=2+3$  且  $6=3+3$ ，即

$$22=(2+3)+(3+3)+(2+3)+(3+3)，$$

$$\text{則 } 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3=2916$$

$2=1+1$ ， $3=1+2$ ，但  $1 \times 1 < 2$  且  $1 \times 2 < 3$ ，

故不再細分

所以此 n 個數即為  $2+3+3+3+2+3+3+3$ ，其乘積 2916 為最大（2 的個數恰二個，沒超過）

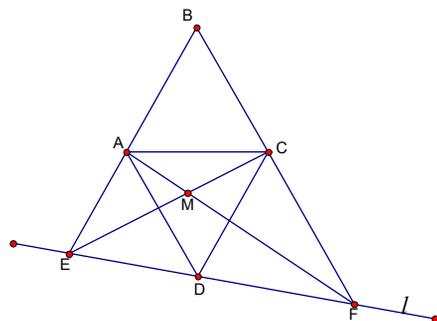
評析：

- 1.此題目不難，其目的在於希望答題者能在答題當中尋找出答題要點，而非僅只找出答案而已。
- 2.答此題者共 65 人，其中有 14 人回答較優異（佔 21.5%），18 人答題佳（佔 27.7%）。
- 3.大部分的人在第三個問題上，僅回答出答案，而忽略了歸納出其要點「將 4 或以上的數分成 2 或 3 的和，將使其乘積為最大」，與如何決定 2 的個數，「2 不會有 3 個或以上」。

問題編號  
930205

設四邊形 ABCD 的四邊等長且  $\angle ABC = 60^\circ$ ，直線  $l$  通過點 D 且與四邊形 ABCD 不相交（除了 D 點之外）；並設直線  $l$  與直線 AB、BC 分別交於 E、F，且線段 CE 與 AF 交於 M。

$$\text{試證：} \overline{CA}^2 = \overline{CM} \times \overline{CE}$$



（下轉第 46 頁）