2004 年第 16 屆亞太數學奧林匹亞競賽試題及參考解答

傅承德* 洪文良**

*中央研究院　統計科學研究所

**國立新竹師範學院　數學教育學系

2004 年第 16 屆亞太數學奧林匹亞競賽於三月 16 日同時在台北及高雄兩地舉行，我國共有 101 位選手參賽。本文針對五道 APMO 試題(第一題爲代數題、第二題爲幾何題、第三題爲組合題、第四題爲數論題、弟五題爲不等式)提供參考解答，以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用之參考。

一、第十六屆亞太數學競賽試題

比賽時間：2004 年 3 月 16 日

比賽地點：中央研究院、高雄大學

時間限制：計 4 小時(9:00 am - 1:00 pm)

計算紙必須連同試卷交回

不得使用計算器

本試卷共五題，每題滿分七分

第一題：

令 S 表示由正整數構成的有限集合，若 S 滿足下式：

對所有　$i,j\in S,\dfrac{i+j}{(i,j)}\in S$　，

其中$(i\,,j)$表示 $i\,,j$ 的最大公因數。試問 S 中的元素有哪些?

第二題：

令 O 與 H 分別爲銳角三角形 ABC 的外心與垂心。試證：在三角形 AOH , BOH 與 COH 中其中一個三角形的面積等於其餘兩個三角形的面積和。

第三題：

令 S 是由平面上 2004 個點所構成的集合且其中任意三點不共線。令 L 是由 S 中任意兩點所決定的直線(此直線可向兩端無限延伸)所構成的集合。試證：有可能將 S 中的點至多以兩種顏色著色，以使得對於 S 中的任意兩點 p 及 q，在 L 中能找到分開此兩點的直線各數是奇數的充要條件爲 p 與 q 具有相同的顏色。

註：若兩點 p 與 q 在直線 l 的兩側，並且不在 l 上，則稱此直線 l 分開兩點 p 與 q。

第四題：

對任意實數 x，令〔x〕表示小於或等於 x 的最大整數，試證：

對每一個正整數 n，$\left[\dfrac{(n-1)!}{n(n+1)}\right]\left[\dfrac{(n-1)!}{n(n+1)}\right]$爲一偶數。

第五題：

設 a, b, c 爲任意正整數，試證：

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$.

二、第十六屆亞太數學競賽試題參考解答

第一題：

欲證 S={2}是滿足(1)式的唯一集合。

令 S 是滿足(1)式的唯一集合，且 s∈S，則

$$2=\frac{s+s}{(s,s)}\in S，$$

又因爲

$$\frac{2+2}{(2,2)}=2，$$

所以 S={2}是滿足(1)式的一個集合。

今假設 S 至少包含一個不是 2 的正整數，底下分兩種情形討論：

(i)：S 包含了某一個正奇數 a，則

$$a+2=\frac{a+2}{(a,2)}\in S，$$

其中 a+2 是奇數，而且由數學歸納法可證得：S 包含了無窮多個奇數，此與 S 是一個有限集合矛盾。

(ii)：S 沒有包含奇數但 S 之中至少有一個大於 2 的偶數，則令 2b，b>1 是 S 中的最小偶數。則

$$b+1=\frac{2b+2}{(2b,2)}\in S，$$

但是 2<b+1<2b，此違背了我們的假設。(如果 b+1 是奇數則 S 包含了奇數。(矛盾)；如果 b+1 是偶數則 2b 不是 S 中的最小偶數。(矛盾))

綜合(i)與(ii)可得知：S={2}是滿足(1)式的唯一集合

第二題：

<u>第一種解法：</u>

若 O=H(即 ABC 是正三角形)，則三角形 AOH, BOH 與 COH 的面積皆爲 0，故得證。

我們假設 O≠H 且分兩種情形討論。

(i)：假設 OH 通過ΔABC的一個頂點，令此頂點爲 C，因 H 是垂心，所以 CH⊥AB，又因 O 是外心，所以 O 落在 AB 的垂直平分線上。但是 O 落在 CH 上且 CH⊥AB，因此 CH 是 AB 的垂直平分線。故 AC=BC。綜合上述可得：△AOH≅△BOH，所以△AOH 與△BOH 的面積相等。另外，在此情況下，△COH 的面積爲 0，故可得

△AOH 的面積

=△BOH 的面積+△COH 的面積

(ii)：假設 OH 與△ABC 的兩邊相交，令此兩邊爲 AB 與 AC。則△ABC 的重心 G 落在尤拉線 OH 上。延長 AG 交 BC 於 D，則 D 是 BC 的中點。連接 DO 與 DH，根據重心的性質可得：AG=2DG，因此

△AOH 的面積=2△DOH 的面積

由於 D 是 BC 的中點，觀察可得：

B 到 OH 的距離+C 到 OH 的距離

=2(D 到 OH 的距離)

因此

△BOH 的面積+△COH 的面積

=2△DOH 的面積

結合△AOH 的面積=2△DOH 的面積，我們可得本題欲證的結果。

<u>第二種解法：</u>

我們直接計算有向面積，從∠BAH=

$\angle OAC=90^{\circ}-B$ 可得

$\angle HAO=A-(180^{\circ}-2B)=B-C.$

延長 CH 交 AB 與 F，則

$$AH=\frac{AF}{\sin B}=\frac{AC\cos A}{\sin B}=2R\cos A$$

其中 R 是外接圓半徑，由此可得∠HAO 的有向面積([HAO]表之)為

$$[HAO]=\frac{1}{2}AH\bullet AO\sin HAO$$
$$=R^2\cos A\sin(B-C)$$
$$=R^2\cos A\sin B\cos C-R^2\cos A\cos B\sin C$$

同理可得

$[HBO]=R^2\cos B\sin C\cos A-R^2\cos B\cos C\sin A$

與

$[HCO]=R^2\cos C\sin A\cos B-R^2\cos C\cos A\sin B$

因此[HAO]+[HBO]+[HCO]=0，由此可得：最大的無向面積是其餘兩個之和。故本題得證。

第三題：

第一種解法：

對於 S 中的點 r , s，令 $N(r,s)$表示 L 中能夠分開 r , s 的連線段。所以 $N(r,s)$表示 L 中與線段 rs 有唯一交點的直線個數。

令 a, b, c 為 S 中任意三點。令 n_a 表示 L 中同時與線段 ab，線段 ac 有交點的直線個數，同理可定義 n_b 與 n_c。令 p_a 表示 q 點的個數，其中 q∈ S－{a, b, c}且通過 a, q 的直線與線段 bc 有交點。同理可定義 p_b 與 p_c。

在 L 中能夠分開 a, b 的直線可分成兩種情形來討論：(i)通過 c 點；(ii)不通過 c 點。明顯地，滿足(i)的直線個數為 p_c，滿足(ii)的直線個數必須與線段 ac 或線段 bc 有唯一的交點。所以

$N(a, b)=n_a+n_b+p_c$，

$N(b, c)=n_b+n_c+p_a$，

$N(c, a)=n_c+n_a+p_b$.

因此

$$N(a, b)+N(b, c)+N(c, a)$$
$$\equiv p_a+p_b+p_c \bmod 2 .$$

令 d 為 S－{a, b, c}中的任一點。若 d 落在三角形 abc 的外部，則由 d 至 a, b 或 c 的三線中必有一線與 d 的對面線段相交。若 d 落在三解形 abc 的內部則上述三線皆與 d 的對面線段相交。因此

$$p_a+p_b+p_c=3m+(2001-m)$$
$$\equiv 1 \bmod 2,$$

且 N(a, b)＋N(b, c)＋N(c, a)是奇數。

今固定 S 中的任一點 r 且以紅色著之。對於 S 中的其他點，若 $N(r, s)$為偶數則 s 點以藍色著之。因此，對於 S 中的點 s≠r，s 與 r 有相同顏色(紅色)的充要條件為 $N(s, r)$為奇數。

假設 p 與 q 是 S 中和 r 相異的點。若 p 與 q 有相同的顏色，則 $N(r, p)$與 $N(r, q)$有相同的奇偶性，因此 $N(p, q)$是奇數(因 $N(r, p)+N(p, q)+N(q, r)$是奇數)。反之，若 $N(p, q)$是奇數則 $N(r, p)+N(r, q)$是偶數，且 $N(r, p)$與 $N(r, q)$有相同的奇偶性，其意為 p 與 q 有相同的顏色，故本題得證。

第二種解法：

首先假設此 2004 點形成一個凸 2004 邊形 P。將其頂點以黑白兩色交替著色，如果我們去掉多邊形的兩個頂點 v 和 w，則此多邊形的其餘部分落在兩部分頂點 i 和 j，此處 i+j 等於 2002，所以 i 和 j 有相同的奇偶性(I 和 j 其中

有一個可能為 0)。在 L 中能夠分開 v 與 w 的直線個數是 ij，若 v 與 w 的顏色不同則 ij 是偶數；若 v 與 w 的顏色相同則 ij 是奇數。因此，我們有一個好的著色，即滿足題意的條件。

今給定 S 的任一形狀，我們由 P 開始且依序的移動 P 中的每一個點到 S，注意此移動的點需穿過 L 中的一條直線。當 2004 個點移動完成之後，即 S 將有一個好的著色，只要在移動的過程中我們維持著上述的移動方式。

為了完成上述，當被移動的點 A 穿過由 B 和 C 所決定的直線則替換 A, B, C 的顏色。我們將證明此方式維持好的著色。注意 A 落在直線 BC 的對面，當 A 被移動之後 BC 可分開 A 與 P($\neq$A, B 或 C)的充要條件為 BC 無法分開 A 與 P 在 A 被移動之前。因為我們已經改變 A 的顏色而不是 P 的顏色，A 與 P 仍然有正確的著色只要直線 BC 是被關注的。同理可得：點 B 和直線 AC 的關係與點 C 和直線 AB 的關係。A 點的移動不會影響其他點或直線的相對位置。因此，心的著色仍然是好的。故本題得證。

第四題：

<u>第一種解法：</u>

令 $N=\dfrac{(n-1)!}{n(n+1)}$

如果 n=1, 2, 3, 4,則直接計算可得[N]=0.令 n>4. 將 N 改寫如下

$$N=\frac{(n-1)!}{n}+\frac{n!}{n+1}-(n-1)! \qquad (1)$$

其中(n-1)!永遠是偶數。

(1)式右邊的前兩項之形式皆為 $\dfrac{(m-1)!}{m}$ ，m>5.

如果 m 不是質數或者質數的平方，則 m=ab, 1<a<b<m, 且(m-1)!包含了兩個因子 a, b 和至少一個額外的偶數因子。因此(m-1)!/m 是一個偶數。如果 m=p^2，其中 p 是一個奇質數，則 1<p<2p<m 且(m-1)!/m 亦是一個偶數。

令 m 是一個質數。由 Wilson 定理可得：(m-1)! $\equiv$-1modm，因此 $\dfrac{(m-1)!+1}{m}$ 是一個整數，且此數與其分子(m-1)!+1 必是奇數。所以

$$\frac{(m-1)!}{m}=\frac{(m-1)!+1}{m}-\frac{1}{m}$$

的整數部分是偶數。因為 n 與 n+1 不可能為質數，所以我們以證得：(1)式的右邊至少有兩項是偶數且其餘的整數部分是偶數，故本題得證。

<u>第二種解法：</u>

如果 n=1, 2, 3, 4,則直接計算可得[N]=0. 底下我們分三種情形討論 n>4.

(i)：n 與 n+1 是合成數。可推得 n$\geqq$8，欲證在此情形下，$\dfrac{(n-1)!}{n(n+1)}$ 是偶數。首先，因(n, n+1)=1，所以我們只能證明 n 與 n+1 分別能除盡(n-1)!即可。若 n 或者 n+1 可寫成 ab 的形式，其中 1<a$\leqq$b，則 ab 可除盡(n-1)!當 a<b；當 a=b 時，則 a$\geqq$3，而且我們可用(n-1)!的兩個因子 a 與 2a 去消掉 a 與 b(=a)(因 a<2a<n.)

注意在做上述的消去因子過程中，我們會從(n-1)!的至多兩個因子中消去一個偶數(只有 n 與 n+1 其中一個是偶數)，又因 n$\geqq$8 所以至少

有一個偶數因子留下。因此 $\frac{(n-1)!}{n(n+1)}$ 是偶數，故得證。

(ii)：n 是質數且 n≧5，所以 n+1 是偶數。則 2<(n+1)/2≦n-1，所以 $\frac{(n-1)!}{n+1}\frac{(n-1)!}{n+1} \equiv a \bmod n$ 其中 0≦a≦n-1，則(n-1)!≡a(n+1)≡a mod n. 但是由 wilson 定理，a=n-1 所以 $\frac{(n-1)!}{(n+1)}$ 是偶數。因此 $\frac{(n-1)!}{(n+1)}$=2kn+n-1 對於某個整數 k. 故

$$\frac{(n-1)!}{n(n+1)} = 2k+1-\frac{1}{n},$$

即 $\frac{(n-1)!}{n(n+1)}$ 的整數部分是偶數。

(iii)：n+1 是質數且 n≧6，n 是偶數。則 2<n/2≦n-1，此時 $\frac{(n-1)!}{n}$ 是一個偶數 $\frac{(n-1)!}{n} \equiv a \bmod (n+1)$，其中 0≦a≦n. 則 $n! \equiv an^2 \equiv a \bmod (n+1)$，且由 wilson 定理，a=n. 因此 $\frac{(n-1)!}{(n+1)} = 2k(n-1)+n$ 對於某個整數 k，故

$$\frac{(n-1)!}{n(n+1)} = 2k+1-\frac{1}{n+1},$$

即 $\frac{(n-1)!}{n(n+1)}$ 的整數部分是偶數。

第五題：

<u>第一種解法：</u>

考慮向量

$$|A| = (a,\sqrt{2},0),$$
$$|B| = (b,-1/\sqrt{2},\sqrt{3/2}),$$
$$|C| = (C,-1/\sqrt{2},-\sqrt{3/2})$$

上述三個向量的長度分別爲

$$|A| = \sqrt{a^2+2},$$
$$|B| = \sqrt{b^2+2},$$
$$|C| = \sqrt{c^2+2},$$

因此由此三個向量所決定的平行六面體的體積至多爲

$$\sqrt{(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)}.$$

另一方面，此平行六面體的體積爲

$$\begin{aligned}
&A\cdot(B\times C)\\
&=(a,\sqrt{2},0)\cdot\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2}\\ -1/\sqrt{2} & -\sqrt{3/2}\end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix}b & \sqrt{3/2}\\ c & -\sqrt{3/2}\end{vmatrix}, & \begin{vmatrix}b & -1/\sqrt{2}\\ c & -1/\sqrt{2}\end{vmatrix}\end{pmatrix}\\
&=\left(a,\sqrt{2},0\right)\cdot\left(\sqrt{3},\left(b+c\right)\sqrt{3/2},\left(c-b\right)/\sqrt{2}\right)\\
&=a\sqrt{3}+\left(b+c\right)\sqrt{3}=\left(a+b+c\right)\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}
A\cdot\left(B\times C\right)&=\begin{vmatrix}a & \sqrt{2} & 0\\ b & -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2}\\ c & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{3/2}\end{vmatrix}\\
&=a\sqrt{3}-\sqrt{2}\left(-b-c\right)\sqrt{3/2}\\
&=\left(a+b+c\right)\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 3\left(a+b+c\right)^2\\
&=3\left(a^2+b^2+c^2\right)+6\left(ab+bc+ca\right).
\end{aligned}$$

從 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$，我們可知

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\\
&\geq 3\left(ab+bc+ca\right)+6\left(ab+bc+ca\right)\\
&=9\left(ab+bc+ca\right).
\end{aligned}$$

第二種解法：

選取 A, B, C∈ (0, π /2)使得

$$a=\sqrt{2}\tan A,$$
$$b=\sqrt{2}\tan B,$$
$$c=\sqrt{2}\tan C.$$

利用恆等式

$$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

我們可將題意之不等式改寫爲

$$4(\tan^2 A+1)(\tan^2 B+1)(\tan^2 C+1)$$
$$\geq 9(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)$$

或者

$$\frac{4}{\cos A^2\cos B^2\cos C^2}$$
$$\geq 9\left(\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}+\frac{\sin A\sin C}{\cos A\cos C}\right)$$

或者

$$\frac{4}{9}\geq(\cos\cos\cos)(\sin A\sin B\cos C+.$$
$$\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C)$$

其次，我們可得

$$0\leq(\sin A\sin B\cos C+$$
$$\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C).$$

$$=\left[\sin B\sin(A+C)-\cos B\cos(A+C)\right]$$
$$+(\cos B)\cdot\left[\sin A\sin C+\cos(A+C)\right]$$
$$=-\cos(A+B+C)+\cos A\cos B\cos C$$

所以題意之不等式可改寫爲

$$\frac{4}{9}\geq(\cos A\cos B\cos C)\cdot$$
$$\left[\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)\right].$$

令 θ =(A+B+C)/3< π /2。利用 AM-GM 不等式與 Jensen 不等式，我們可得

$$\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}$$
$$\leq\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\leq\cos\theta$$

或者

$$\cos A\cos B\cos C\leq\cos^3\theta.$$

因此，只需證明

$$\frac{4}{9}\geq\cos^3\theta(\cos^3\theta-\cos 3\theta).$$

注意

$$\cos 3\theta=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$$
$$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$$
$$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

或者

$$\cos^3\theta-\cos 3\theta=3\cos\theta-3\cos^3\theta.$$

所以此不等式等價於

$$\frac{4}{27}\geq\cos^4\theta(1-\cos^2\theta).$$

利用 AM-GM 不等式，我們可得

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\leq\frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)\right)=\frac{1}{3}$$

或者

$$\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)\leq\frac{1}{27},$$

或者

$$\cos^4\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\leq\frac{4}{27},$$

故得證。顯而易見，等號成立的充要條件爲

$$\tan A=\tan B=\tan C=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

即，充要條件爲 a=b=c=1。

第三種解法：

令

$$x = a + b + c$$
$$y = ab + bc + ca$$
$$z = abc$$

則

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 - 2y$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = y^2 - 2xz$$
$$a^2b^2c^2 = z^2$$

所以題意之不等式可改寫為

$$z^2 + 2(y^2 - 2xz) + 4(x^2 - 2y) + 8 \ge 9y$$

或者

$$z^2 + 2y^2 - 4xz + 4x^2 - 17y + 8 \ge 0.$$

根據

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc = y$$

我們可得

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2y \ge 3y$$

而且

$$\begin{aligned} & a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ & = (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 \quad \text{與} \\ & \ge ab \cdot ac + ac \cdot bc + bc \cdot ab \\ & = (a + b + c)abc = xz \end{aligned}$$

$$y^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2xz \ge 3xz$$

因此

$$\begin{aligned} & z^2 + 2y^2 - 4xz + 4x^2 - 17y + 8 \\ & = (z - \frac{x}{3})^2 + \frac{8}{9}(y - 3)^2 + \frac{10}{9}(y^2 - 3xz) + \frac{35}{9}(x^2 - 3y) \ge 0. \end{aligned}$$

故得證。