

# 魚洗水跳現象的探討

\*張純志 \*\*鍾志輝

\*\*\*鍾昀勳 \*\*\*\*黃旭宏

\*國立高雄師範大學物理系 \*\*高雄縣立路竹高中

\*\*\*高雄縣立文山高中 \*\*\*\*國立岡山高中

## 摘要

魚洗，也稱龍洗，傳說是中國唐宋時代皇帝洗臉的臉盆，內底四條魚紋，鱗尾畢具。洗內盛水後，用手摩擦其兩個雙耳，立即發出響亮的嗡嗡聲，並出現美麗了漣漪，水珠四濺，摩擦越快，聲音越響，波浪翻騰，水珠越烈（如相片一）。

本研究旨在建立洗盆真實的情況理論模型，即在殼體產生共振的圓形駐波及上下駐波，為水跳產生點，此時殼體發出的聲音就是共振的頻率。更進而瞭解了魚洗水跳有四個、六個、八個、十個波腹的原因，並以改變殼體不同位置、水量、液體密度及洗盆大小等變因應證模型，結果與理論相符合。繼而以高腳杯、大磁碗等類似魚洗盆構造的容器，加以實驗應證，也能符合此理論。

## 一、前言

本研究的研究目的旨在理論層次上建立魚洗的振動模型，並解出魚洗的振盪型態。且從實驗中的各項結果加以驗證：計有在不同水深之下系統的振動性質。在不同密度的液體之下系統的振動性質。在不同大小的魚洗盆之下系統的振動性質。在空的魚洗盆，不同測量點之下系統的振動性質。在不同的輸入狀態下探討其系統的振動性質。最後探討高腳杯及圓柱型容器所發出的聲音發出的聲音，是否也遵守此一模型。

## 二、理論推導

波在各向同性的均勻固體介質中傳播時，單向傳播的波函數為

$$\Phi(x, t) = A \sin(kx - \omega \cdot t) \dots\dots\dots (1)$$

經對 x 及 t 的二次微分得到

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -k^2 \Phi \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi = -k^2 v^2 \Phi \dots\dots\dots (3)$$

此處  $\omega = kv \dots\dots\dots (4)$

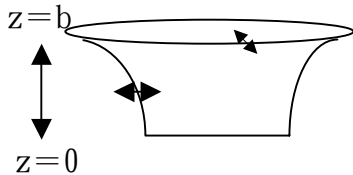
$\Phi$ ：波函數。 $\omega$ ：角頻率。 $\kappa$ ：波數。 $\nu$ ：波速。

將(2)式和(3)式聯立可解得平面波波動方程為

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

(1)式是平面波波動方程的解。

波在均勻介質中傳播，並在邊界處反射，反射波與入射波相互疊加，最後形成吻合特定邊界條件的穩定駐波，此時介質中各質量單元以同一頻率、不同的恆定振幅振動。對於魚洗薄殼，若魚洗薄殼的厚度  $d$  遠小於薄殼中截面的半徑  $a$ ，徑向振動的小振幅，在這樣的魚洗盆內傳播，實際上是在二維 ( $\varphi, z$ ) 空間的傳播如圖一所示。



圖一 魚洗徑向振動圖

說明一：上圖  $-z=0$  為洗盆底端， $z=b$  為洗盆頂端，兩個小雙向箭頭表示洗盆殼體震動方向

說明二： $z$  是以魚洗盆底部為座標 0 點，頂部座標為  $b$ 。

微小振動時，質量單元隨位置變化的振幅函數可表現為變數  $\Phi(\varphi)$  和  $Z(z)$  的和， $\Phi$  是隨角度變化的振動， $Z$  是隨高度變化的振動，它是微分方程的一種解，在穩定駐波的情況下，彈性介質中各質量單元作簡諧振動。函數  $\Phi(\varphi)$  和  $Z(z)$  分別

滿足方程式

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial z^2} \quad \text{此處 } z \text{ 為 } \varepsilon_n \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_m}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_m}{a^2 \partial \Phi^2} \quad \text{此處 } \Phi \text{ 為 } \varepsilon_m \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_m \quad \dots\dots\dots (8)$$

$\Phi(\varphi)$  和  $Z(z)$  均是簡諧函數。

其波動方程為

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} = 0$$

將  $\Phi \rightarrow \varepsilon_n \quad x \rightarrow a\varphi$

$\Phi(\varphi)$  和  $Z(z)$  設為

$$Z(z) = A_n \sin(k_z z + a_n) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\Phi(\varphi) = A_m \sin(ak_\varphi \varphi + a_m) \quad \dots\dots\dots (10)$$

函數  $\Phi(\varphi)$  和  $Z(z)$  也分別滿足方程式(5)(6)(7)式。

其中  $\varepsilon$  是  $t$  時刻 ( $\varphi, z$ ) 處質量單元的徑向振動位移。波速  $\nu = \sqrt{D/\sigma}$ ， $\sigma$  是盆面的質量面密度， $D$  是與材料剛性有關的面張力係數。

若魚洗盆高為  $b$ ，上端開口，下端有底，周長為  $L$  的魚洗盆，對上下振動的波在這樣盆內傳播的邊界條件  $z=0$ ，為固定邊； $z=b$ ，為自由邊。對函數  $Z$ ，任何時刻在  $z=0$  處振幅為零，在  $z=b$  處振幅最大。由此可確定  $a_n = 0$ ，

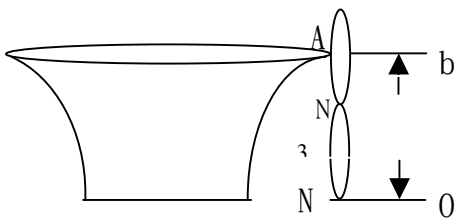
$$k_z = \frac{\pi}{2b} (2n+1) \quad \dots\dots\dots (11)$$

所以  $Z(z) = A_n \sin\left[\frac{\pi}{2b}(2n+1)z\right] \dots (12)$

由上式可知在振動最大處，是在  $\sin$  角度  $\frac{\pi}{2b}(2n+1)z$  為  $\pi/2$  時或是  $\pi/2$  的整數倍時， $z = \frac{1}{4}\lambda$  時為  $n=0$  的模式， $z = \frac{3}{4}\lambda$  時為  $n=1$  的模式， $z = \frac{5}{4}\lambda$  時為  $n=2$  的模式。

如圖二  $b = \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \frac{7}{4}\lambda \dots$   
 $= \frac{2n+1}{4}\lambda \quad n \geq 1$

如  $\lambda$  短時， $\frac{1}{4}\lambda = \frac{b}{2n+1}$ ，由  $m\lambda = 2\pi a \therefore 2m=6, 10, m=3, 5$  的模式。



圖二  $n=1$  魚洗振動模

說明：A 為波腹處，N 為波節處，此圖

$$z = \frac{ob}{4} = \frac{3}{4}\lambda$$

若魚洗盆上端開口為波節，對徑向振動的波在這樣盆內傳播的邊界條件  $z=0$ ，為固定邊； $z=b$ ，也為固定邊如圖三。對函數  $Z$ ，任何時刻在  $z=0$  處

$z=b$  處也為 0。由此可確定  $A_n=0$ ，

$$k_z = \frac{\pi}{2b'} 2n \dots (13)$$

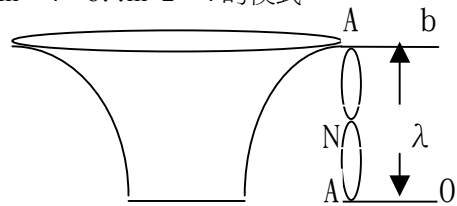
所以  $Z(z) = A_n \sin\left[\frac{\pi}{b'}nz\right] \dots (14)$

此處即上下皆為波節時。

如  $\lambda$  長時，

$$\frac{1}{4}\lambda = \frac{b'}{2n}$$

$2m=4, 8, \therefore m=2, 4$  的模式。



圖三 魚洗振動模

說明：A 為波腹處，N 為波節處，此圖  $z = \frac{ob}{4} = \lambda$

由於隨高度變化的  $z$  一定時， $\varphi$  與  $\varphi + 2m\pi$  是盆面上同一點，質量單元的振動狀相同， $\Phi$  函數應滿足周期性邊界條件，所以

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2m\pi) \dots (15)$$

$$k_\varphi = \frac{2m\pi}{L} = \frac{m}{a} \quad \text{週長 } L = 2\pi a \dots (16)$$

$$\Phi(\varphi) = A_m \sin(m\varphi + a_m) \dots (17)$$

所以  $(\varphi, z)$  處質量單元的位移

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_m \dots (18)$$

$$\varepsilon_m = A_m \sin(m\varphi + a_m - \omega_m t) \dots (19)$$

$$\varepsilon_n = A_n \sin\left[\frac{\pi}{2b}(2n+1)z - \omega_n t\right] \dots (20)$$

各質量單元振動頻率

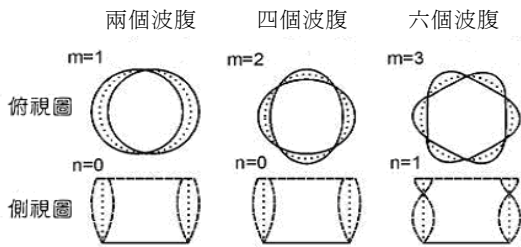
$$\omega_m = \sqrt{\frac{D}{\sigma}}(m/a) \dots\dots\dots(21)$$

由(12)得到  $\omega_n = \sqrt{\frac{D}{\sigma}}(2n+1)\pi/2b \cdot \dots\dots(22-1)$

由(13)得到  $\omega_n = \sqrt{\frac{D}{\sigma}}n\pi/b' \dots\dots\dots(22-2)$

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_m = A_m \sin(m\varphi + a_m - \omega_m t) + A_n \sin\left[\frac{\pi}{2b}(2n+1)z - \omega_n t\right] \dots\dots\dots(24)$$

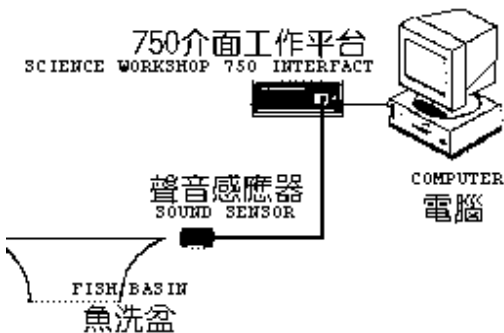
上式的物理意義，就是在這個模組下，當圓周波與上下波在各點時，才會產生共振，也才有大的振動能量。魚洗盆的振動方式取決於  $m, n$  值，其基本振型如圖四所示。



圖四 基本振動形式

### 三、器材及裝置

#### (一) 裝置

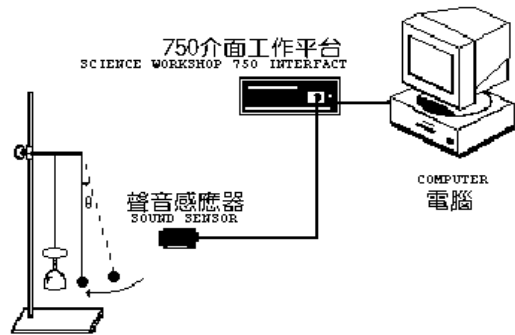


當  $\omega_m = \omega_n$  時即為魚洗水跳最高處時的共振頻率，此時  $n=6, 10$

即  $2\pi a = (\lambda/2) \times 6$  或  $(\lambda/2) \times 10$

頂端為波腹  $\frac{m}{a} = \frac{(2n+1)\pi}{2b} \dots\dots\dots(23)$

圖五 裝置圖



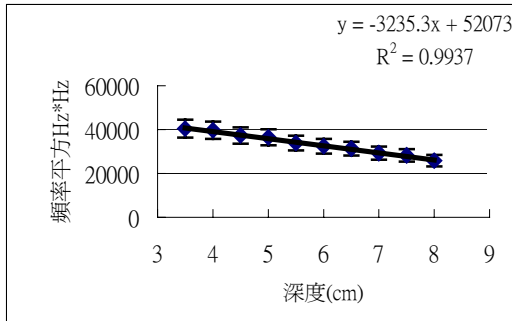
圖六 裝置圖

#### (二)、器材

1. 截取數據及分析數據用裝置
  - (1) 魚洗盆(含大、中、小不同尺寸)
  - (2) 筆記型電腦設備一套
  - (3) SCIENCE WORKSHOP 750 interface
  - (4) sound sensor (PASCO CI-6506B)
  - (5) 應用軟體 Datastudio
2. 自製改良喇叭型振盪器〈喇叭外面貼厚膠帶，以消去脈衝撞擊，使撞擊頻率為喇叭頻率，因硬的物體相撞會產生脈衝〉
3. 次要器材：鋼尺一支、橡皮軟管一條、塑膠軟尺一條、保利龍墊一個、鐵架一個、金屬球一個、釣魚繩一盒、高腳玻璃杯一個、瓷碗一個、比重計一根、酒精五罐

#### 四、結果討論

(一) 在不同水位高時系統的振動性質，如圖七所示。



圖七 頻率平方與水位高度的關係

- 1.由圖七知水愈加愈多時，也就是水位愈來愈高時，其發出聲音的頻率值愈來愈小，相關係數為 0.9937，可說是成比例的下降，此與公式 (21) 及 (22) 相吻合。
- 2.水位升高，對魚洗的意義為  $\sigma$  增加，由公式知  $\omega$  變小也就是頻率變小。此由實驗應證確實如此，且對空的魚洗盆來說，盆底  $\sigma$  大可看成節點。

(二) 在不同密度的液體之下系統的振動性質。

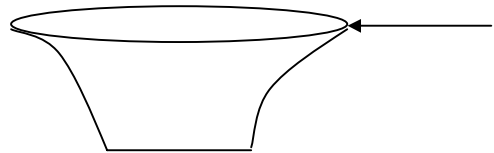
表一 不同密度的液體之下系統振動的頻率

密度	F1 (Hz)	F2 (Hz)	F3 (Hz)	平均值 (Hz)
1	180	180	180	180±0
0.98	180	180	182	181±1
0.96	180	182	180	181±1
0.94	182	182	180	181±1
0.92	184	182	182	183±1
0.9	182	184	184	183±1
0.88	184	184	186	185±1
0.86	186	188	187	187±1
0.84	188	186	186	187±1

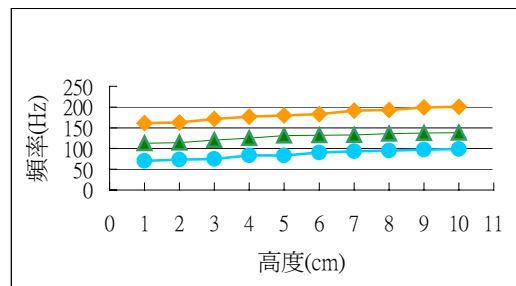
0.82	188	187	190	188±1
0.8	190	188	188	189±1

結果：由表一分析知液體密度愈大，其頻率愈小。改變液體密度，即為改變公式中的  $\sigma$ ，總共的  $\sigma$  值為金屬的  $\sigma$  值加上液體造成的等效  $\sigma$  值。總共  $\sigma$  值加大， $f$  變小。此與公式此與公式 (21) 及 (22) 相吻合。

(三) 不同大小的魚洗盆之下系統的振動性質。



圖八 箭頭指處為洗盆撞擊處



圖九 大中小魚洗盆不同撞擊點頻率與高度關係圖

說明：圖中最上方曲線為小魚洗盆，中間曲線為中魚洗盆，下方曲線為大魚洗盆。數目字 0-10 為魚洗盆水位高。

- 1.使用不同大小的魚洗盆（如相片二），固定水位高度且使水面產生四個駐波圖形，由公式

$$V = \sqrt{\frac{D}{\sigma}}$$

知若  $\sigma$  大約相同，小盆剛性  $D$  大， $V$  大，由  $V = \lambda f$  知  $f \lambda$  大，因  $\lambda$  與半徑  $a$  成正比， $\therefore$  以  $f \times a$  的值由數據知大盆小，中小盆的值約略相等，代表小盆剛性大。（而厚度也代表剛性， $\therefore$  剛性與厚度成正比，由

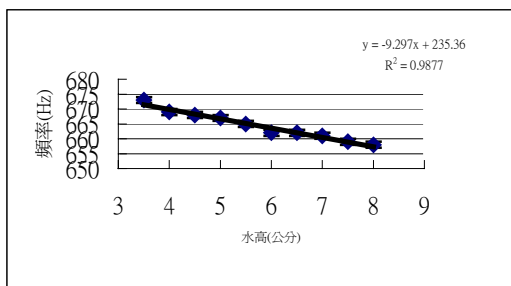
$$V = \sqrt{\frac{D}{\sigma}}$$

中知  $\sigma$  及  $D$  皆與厚度成正比，厚度因素因此抵消， $\therefore$  半徑小， $D$  大）

2. 在四個波腹時，理論上  $f \times a = \text{常數}$ ，但因盆子越到底部，剛性越大，所以  $f \times a = \text{常數}$  的值，愈到底部愈大，知小盆的值最大，代表小盆波速最大，這與理論相符合。
3. 大中小三魚洗盆，在改變水量固定撞擊點如圖八，其頻率值也隨著水位愈高愈小，如圖九。

（四）在不同的輸入狀態下（X 軸），探討其系統的振動性質。

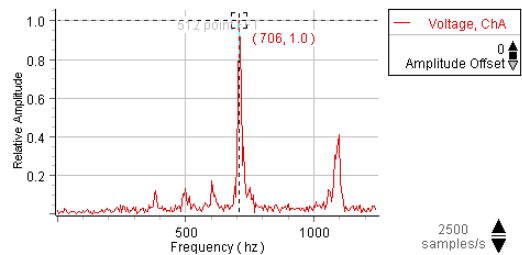
定義：X 軸的方向即為與魚洗盆雙耳摩擦處垂直方向



圖十 在 X 軸方向摩擦狀態下頻率與水位高度關係

1. 不同方向摩擦產生的結果是水位愈高，頻率愈小如圖十，結果有呈線性趨勢。

2. 魚洗盆在切線方向（Y 軸方向）摩擦時，計有四個波腹時，振動點位移為反方向，因為所產的波是橫波，橫波在盆中波速小、所以頻率小。8 個波腹時驅動的波以橫波通過大部分的區域，振動點位移為反方向橫波在盆中波速小、所以頻率小。
3. 魚洗盆在徑向方向（X 軸方向）摩擦時所產生的波，當 X 軸方向震動點位移為同方向，則產生兩個波腹的振動。摩擦時以縱波方式通過大部分區域，驅動的波以高頻率佔較多且其  $\omega$  比為 706:1176 (如圖十一) 約分後為 6:10， $\lambda$  比就為 10:6。所以可以看出 6 或 10 個波腹的振動。



圖十一 傅立葉轉換的頻率分析圖

說明：兩個波峰的值分別為 706Hz 與 1176Hz

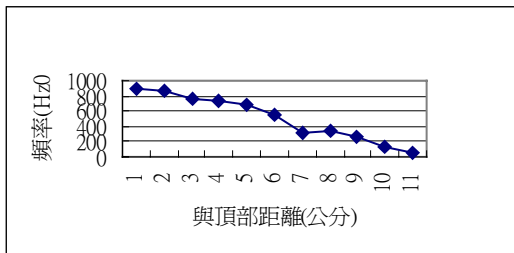
4. 對魚洗盆而言，順者 X 軸方向摩擦將產生縱波，當此縱波在盆內傳遞時，因魚洗盆為圓型，左右對稱，若以橫過魚洗盆一半為 X 軸，則縱波在盆內傳遞是對 X 軸對稱  $V = \lambda f$ ，縱波傳過魚洗盆主體相對於橫波而言，速度（ $V$ ）較大則頻率  $f$  也大。由對稱性應出現 2、6、10... 個波腹，既頻率大的較易出現，所以出現 6 和 10 個波腹。垂直 X 軸方向摩擦（既順者雙耳方向）將產生橫波，對 X 軸反對稱，橫波傳過魚洗盆

主體相對於縱波而言，速度 (V) 較小，則頻率 f 也較小。由對稱性應出現 4、8、12... 個波腹，既頻率小的較易出現，實驗上看到四個波腹。如圖 (因圓周波在盆底剛性大的地方傳遞，上下波傳到盆的上部時剛性變弱，

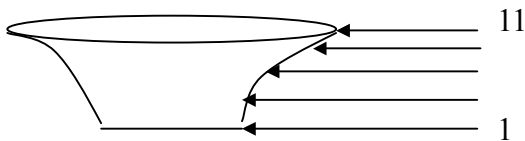
$$\text{由公式 } V = \sqrt{\frac{D}{\sigma}}$$

知剛性 D 小，V 就小，因頻率 f 相同，由  $V = \lambda f$  知上下波波長變小)

(五) 在空的魚洗盆，不同測量點之下系統的振動性質



圖十二 測量點與頻率係圖

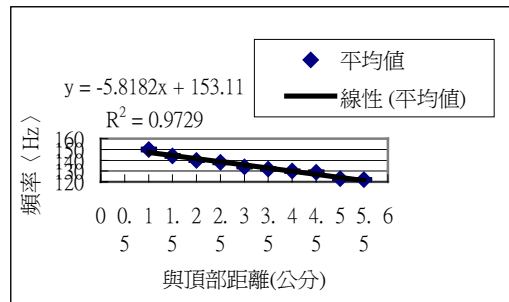


圖十三 洗盆撞擊處，位置 1 為從底部往上至最高點位置 11

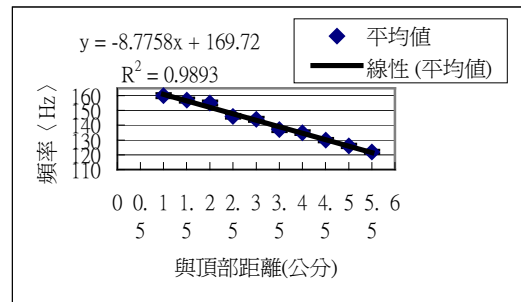
圖十二顯示撞擊越高處，發出的頻率越低，此為越低處剛性值越大因彎曲度大，頻率就大。

圖十三為撞擊處，由底部往上分別為編號 1 到 11。

(六) 改以玻璃高腳杯及有底圓柱型玻璃杯，測量不同位置其聲音振動頻率。



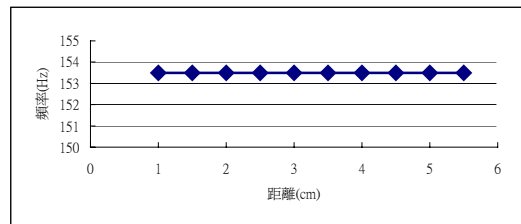
圖十四 玻璃高腳杯測量點與頻率關係  
說明：X 軸數目字為由高處低處量起的距離



圖十五 瓷碗測量點與頻率關係  
說明：X 軸數目字為由高處低處量起的距離

由圖十四及圖十五 可知瓷碗及玻璃高腳杯，當其位置由上而下撞擊時，聲音振動頻率愈來愈小，而且在撞擊點區域出現共振現象，所測得的聲音就是共振時的頻率，此與我們所建構的理論相符合。

(七) 探討有底圓柱型容器所發出的聲音，是否也遵守此一模型



圖十六 有底圓柱型玻璃杯不同測量點的頻率值

1.有底圓柱型玻璃杯，不論撞擊點在何處其頻率值都一樣，此符合我們公式（21）及（22）中的半徑值固定時，其頻率值都相等，是故我們可說圓柱型是我們理論中的特例，此點更讓我們了解到當圓柱形容器受到撞及發出的聲音原來是在其內部進行駐波的共振。

## 八、結論

（一）在理論層次上建立魚洗的振動模型，是針對魚洗盆的形狀所建立，至於圓柱型的容器，為此理論的一個特例，在公式（21）及（22）可知，當  $a$  值或  $b$  值固定時，其  $\omega$  值處處頻率值相同。

（二）以實驗中的各項結果加以驗證：我們得到

（1）在不同水深之下系統的振動性質，水位升高， $\sigma$  增加，頻率變小。

（2）在不同密度的液體之下系統的振動性質，改變液體密度，即為改變整體  $\sigma$ ， $\sigma$  值加大， $f$  變小。

（3）在不同大小的魚洗盆之下系統的振動性質，使用不同大小的魚洗盆，固定水位深度且使水面產生四個駐波圖形，由  $f \propto a$  值知小盆的值最大，代表小盆波速最大。從上述探討可知，我們所建立的魚洗水跳模型，與魚洗盆實際情形一樣。

（三）在不同的輸入狀態下探討其系統的振動性質，順者  $X$  軸方向摩擦將產生縱波，當此縱波在盆內傳遞時，因魚洗盆為圓型，左右對稱，縱波傳過魚洗盆主體相對於橫波而言，速度（ $V$ ）較大則頻率  $f$  也大。由對稱性應出現 2、6、10...個波腹，既頻率大的較易出現，所以出現 6 和 10 個波腹。垂直  $X$  軸方向摩擦（既順者雙耳方向）將產生橫波，對  $X$  軸反對稱，橫波傳過魚洗盆主體相對於縱波而言，速度（ $V$ ）較小，則頻率  $f$  也較小。由對稱性應出現 4、8、12...個波腹，既頻率小的較易出現。

（四）高腳杯、碗杯發出的聲音。當其位置由上而下撞擊時，聲音振動頻率愈來愈小，而且在撞擊點區域出現共振現象，此與我們所建構的理論相符合。

（五）有底圓柱型玻璃杯，不論撞擊點在何處其頻率值都一樣，此點更讓我們了解到當圓柱形容器受到撞及發出的聲音原來是在其內部進行駐波的共振。

## 九、參考資料

- 1.YanYL.Three Demonstratons from Ancient Chinese Bronzeware. The Phys Teach,1992,30:341.
- 2.Rossing TD. Acoustics of Eastern and Western Bells, old and new.Jacoust Soc Jpn,1989,10(E):5.