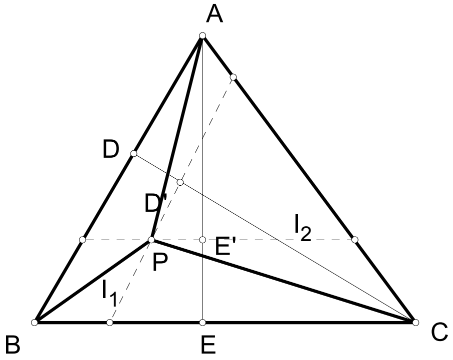
中學生通訊解題第三十期題目參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號 921101

若△ABC 為一給定之三角形，對任意正數 a,b,c 是否可在△ABC 內找一點 P，使得△APB，△BPC，△CPA 之面積比為 $a:b:c$？



參考解答：

△APB：△BPC：△CPA＝$a:b:c$

若 $ak+bk+ck=1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{a+b+c}$

則 $\text{V}APB=\dfrac{a}{a+b+c}\text{V}ABC,$

$\text{V}BPC=\dfrac{b}{a+b+c}\text{V}ABC,$

$\text{V}CPA=\dfrac{c}{a+b+c}\text{V}ABC$

作△ABC 在 $\overline{AB},\overline{BC}$ 上之高，$\overline{CD},\overline{AE}$，分別在 $\overline{CD},\overline{AE}$ 上取 D',E' 使得

$\overline{DD'}=\dfrac{a}{a+b+c}\overline{CD},\overline{EE'}=\dfrac{b}{a+b+c}\overline{AE}$

過 D' 作直線 $l_1 // \overline{AB}$，過 E' 作直線 $l_2 // \overline{BC}$，則 l_1 與 l_2 之交點 P 即為所求！

其理由明顯△PAB 與△ABC 同以 $\overline{AB}$ 為底時，

$\text{V}PAB$ 之高為 $\text{V}ABC$ 之高的 $\dfrac{a}{a+b+c}$

故 $\text{V}PAB=\dfrac{a}{a+b+c}\text{V}ABC$，

同理 $\text{V}PBC=\dfrac{b}{a+b+c}\text{V}ABC$，

則 $\text{V}PAC=(1-\dfrac{a}{a+b+c}-\dfrac{b}{a+b+c})\text{V}ABC$

$=\dfrac{c}{a+b+c}\text{V}ABC$

所以 $\text{V}APB:\text{V}BPC:\text{V}CPA$

$=\dfrac{a}{a+b+c}:\dfrac{b}{a+b+c}:\dfrac{c}{a+b+c}=a:b:c$

評析：

1. 本題只要掌握 $\Delta APB=\dfrac{a}{a+b+c}\Delta ABC,$ $\Delta BPC=\dfrac{b}{a+b+c}\Delta ABC,\Delta CPA=\dfrac{c}{a+b+c}\Delta ABC$ 之要點，再針對 ΔABC 之邊或高進行特殊比例的分割即可，所以，觀念不難，作法也不唯一。
2. 國中生似乎在作圖題之敘述及證明能力，皆有下降的趨勢。本題雖然有多人答對，但敘述之部分有待加強。

3.答題品質較佳者有：北市興雅國中林昭平，基市銘傳國中楊昀達，北市福和國中李志軒，北市民生國中楊傑超，北市福和國中郭乃華，桃市青溪國中簡伯宇，北市延平國中黃善佑，北縣江翠國中黃子誠，北市福和國中廖櫻美，北市民生國中盧佑樺，北市民生國中顏經豪，北市民生國中蔡日升，北市民生國中陳奕修，竹市光華國中范祐維，北市民生國中陳威霖。

問題編號
921102

某城市的人口在某時爲一完全平方數，稍後，增加 100 人，人口比一完全平方數要多 1，現在，再增加 100 人，人口再度爲一完全平方數。問：原來人口是下列何數的倍數？

(A)3　(B)7　(C)9　(D)11　(E)17

參考解答：

設 N 爲最初人口總數

$N = x^2$，$N+100 = y^2 + 1$，$N+200 = z^2$，

其中 x，y，z 爲正整數

$\because\ y^2 - x^2 + 1 = 100$，$\therefore\ (y-x)(y+x) = 99$

$\because$ x，y 爲正整數

故

y + x	99	33	11
y − x	1	3	9

x	49	15	1
y	50	18	10
$N=x^2$	$2401=49^2$	$225=15^2$	1
$N+100=y^2+1$	$2501=50^2+1$	$325=18^2+1$	$101=10^2+1$
$N+200=z^2$	$2601=51^2$	425(不合)	201(不合)

故 $N = 49^2 = 7^4$ 爲 7 的倍數。選(B)

評析：

1.有部分同學答案以數列來觀察，可惜未加以反推及證明。

2.此次同學答案中，答對的佔全體 65.5%。答錯的或有缺失的佔全體 34.5%。

3.此次答案中，以北縣重慶國中余相賓、基市銘傳國中江愷、北縣江翠國中陳建宏、北縣江翠國中黃逸鵬、北縣江翠國中簡志達、北縣江翠國中黃俊凱、基市銘傳國中賴威志，等人，較佳。

問題編號
921103

波特有一個收藏盒，內部是容積爲 20π 的球狀空間，請問：波特能否把一個體積爲 π 的水晶球和一個體積爲 5π 的銀球放入收藏盒中？

參考解答：

令 $a=1, b=\sqrt[3]{5}, c=-\sqrt[3]{20}$

$\because\ a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc$ 與 $a+b+c$ 同正同負

$\Rightarrow 1+5-20+3\cdot1\cdot\sqrt[3]{5\cdot20}$

$=-14+3\sqrt[3]{100}=-\sqrt[3]{2744}+\sqrt[3]{2700}<0$

$\therefore 1+\sqrt[3]{5}+(-\sqrt[3]{20})=a+b+c<0$

即 $\sqrt[3]{20}>1+\sqrt[3]{5}$

所以兩球可以放入收藏盒內。

解題重點：

1.找出銀球、水晶球與球形容器之半徑比為 $1:\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{20}$

2.Q $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

，當 a,b,c 不完全相等時

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 恆正。

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc$ 與 $a+b+c$ 同號，依此即可解出 $1+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{20}<0$ 即 $\sqrt[3]{20}>1+\sqrt[3]{5}$

所以，銀球與水晶球可放入收藏盒中。

3.2 中提示之解法屬國中程度較優學生可使用。若細究其解法，至少還有五種不同程度之解法。

評析：

1.本題參與答題人數共 81 人，答對者有 58 人，答對率約 71.6%。其中有 51 位同學是利用求立方根近似值來比較 與 的大小關係。只有五位同學會使用解題重點 2 所提示的方法。

2.題答題最好的同學有三名：福和國中 3 年 14 班林怡伶同學，另二人為周志遠同學與黃彥銘同學。其次，福和國中 3 年 17 班廖櫻美同學，3 年 40 班林瑋詩同學也答的不錯。東湖國中 3 年 3 班李光宇同學的解法也不錯，只是稍微複雜了些。

問題編號
921104

一商人以 d 元買入 n 部收音機，d 為正整數，其中兩部他以成本之半售予義賣市場，剩下的收音機每部盈利 8 元，如果總利潤是 72 元，則 n 的最小可能值是多少？

(A)18 (B)16 (C)15 (D)12 (E)11

參考解答：

每部成本 $\dfrac{d}{n}$ 元，此 n 部機中，n-2 部以 $\dfrac{d}{n}+8$ 元賣出，二部以 $\dfrac{d}{2n}$ 賣出，所以收入為

$$(n-2)(\frac{d}{n}+8)+2\cdot\frac{d}{2n}=d+72$$

$$\therefore n^2-11n=n(n-11)=\frac{d}{8},d,n\in N$$

所以 n>11 若 n=12 則 $12\cdot 1=\dfrac{d}{8},d=96$

所以最少為 12，選(D)

評析：

1.此次同學解答中，有很多同學未看清楚題意，而導致過程錯誤。

2.此次同學答案，答對的同學約佔了全體的 49.2%。未答對的或有缺失的同學佔了 50.8%。

3.本次答案中以桃園市青溪國中簡伯宇回答的較佳。

問題編號
921105

設 x 與 y 是整數（不一定是正數），且

滿足 $x+x^2+x^8=y+y^2+y^8$，求證 $x=y$。

參考解答：

因爲 $x+x^2+x^8=y+y^2+y^8$

所以

$$x+x^2+x^8-(y+y^2+y^8)=0$$
$$\Rightarrow (x-y)+(x^2-y^2)+(x^8-y^8)=0$$
$$\Rightarrow (x-y)+(x-y)(x+y)+(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)=0$$
$$\Rightarrow (x-y)[1+(x+y)[1+(x^4+y^4)(x^2+y^2)]]=0$$

(1)如果 $x^2+y^2=0$ 則 $x=y=0$ 則證明完畢

(2)如果 $x^2+y^2\neq 0$，則

$$1+(x^4+y^4)(x^2+y^2)>1$$
$$\Rightarrow (x+y)[1+(x^4+y^4)(x^2+y^2)]\neq -1$$
$$\Rightarrow 1+(x+y)[1+(x^4+y^4)(x^2+y^2)]\neq 0$$
$$\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$$

證明完畢。

評析：

1.學生作答時常犯的錯誤：

(1)若 x,y 爲整數，則 $x^2+y^2\geq 0$，而非「$x^2+y^2\geq 1$」或「$x^2+y^2\in N$」或「x^2+y^2 是正數」

(2)由(1)可知 ，而非

2.「$(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x+y)+(x+y)+1=0$」是否成立，必須說明清楚較佳！

3.94 人作答，37 人答題完整，答題較優良者，有：五峰國中黃飛揚、福和國中周育正、敦化國中劉杰翰、陽明國中楊鎮宇、光華國中范祐維、永和國中施思銘。

（上承第 38 頁）

問題編號 930205

設四邊形 ABCD 的四邊等長且 $\angle ABC=60^\circ$，直線 l 通過點 D 且與四邊形 ABCD 不相交（除了 D 點之外）；並設直線 l 與直線 AB、BC 分別交於 E、F，且線段 CE 與 AF 交於 M。

試證：$\overline{CA}^2=\overline{CM}\times\overline{CE}$