

中學生通訊解題第三十一期

題目參考解答與評析

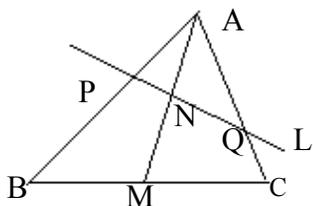
臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

921201

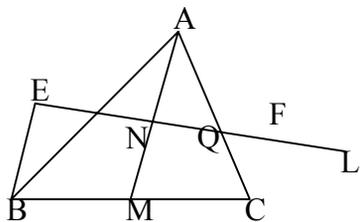
\overline{AB} 為 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的中線，任一
直線 L 交 \overline{AB} 、 \overline{AM} 、 \overline{AC} 於 P 、 N 、 Q 。

求證： $\frac{\overline{AB}}{AP}$ 、 $\frac{\overline{AM}}{AN}$ 、 $\frac{\overline{AC}}{AQ}$ 成等差數列



參考解答：

過 B 、 C 作 \overline{MN} 平行線分別交 L 於 E 、
 F ，梯形 $EBCF$ 中， \overline{MN} 為中線，
 $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{BE} + \overline{CF})$ ， $\therefore \frac{\overline{MN}}{AN} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BE}}{AN} + \frac{\overline{CF}}{AN}\right)$



$\therefore \triangle BEP \sim \triangle ANP$ ， $\therefore \frac{\overline{BE}}{AN} = \frac{\overline{BP}}{AP}$ ，
同理 $\frac{\overline{CF}}{AN} = \frac{\overline{CQ}}{AQ}$ ，

$$\therefore \frac{\overline{MN}}{AN} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BP}}{AP} + \frac{\overline{CQ}}{AQ}\right) \cdots \cdots (1)$$

$$(1) \text{式兩邊各加 } 1 \text{ 得 } \frac{\overline{AM}}{AN} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AB}}{AP} + \frac{\overline{AC}}{AQ}\right)$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{AP}, \frac{\overline{AM}}{AN}, \frac{\overline{AC}}{AQ} \text{ 成等差數列。}$$

評析

本題共有 21 個同學徵答，其中回答較完整的有新竹市光華國中范祐維同學、基隆市銘傳國中何亭豫、鄭景文、林怡廷、江佳穎、李欣瑜、林劭安同學，其中范祐維同學答的最好，台北縣江翠國中陳凱傑、張祺、林怡慈同學回答的也不錯。在這 21 份中，較完整的有 7 份，占 33%，答錯或較不完整的有 14 份，占全體的 67%。

問題編號

921202

兩人玩猜拳遊戲，規則如下：每人可從「剪刀；石頭；布」中任意選出一種拳，「剪刀贏布；石頭贏剪刀；布贏石頭」，若雙方皆出相同之拳，則判定此盤為不分勝負。

今有五人同時猜拳，每人各出「剪刀；石頭；布」一次，規則定為：若出現兩種不同的拳，如石頭及剪刀，則出「石頭」者為勝，出剪刀者為敗；若三種拳皆出現或只出現一種拳（即 5 人皆出相同的拳），

則判定為不分勝負。在此情況下，試回答下列問題：

- (1) 猜拳一次，甲獲勝的機率是多少。
- (2) 猜拳三次，甲獲勝的機率是多少。

參考解答：

- (1) 甲勝的情形

甲出石頭，其餘人只可出剪刀或石頭，所以 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ ，但有一種為 5 人皆出石頭，造成不分勝負，所以只有 15 種，同理可知甲出剪刀或布時，所以共有 45 種，全部有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ 種，所以甲勝之機率為 $\frac{45}{243} = \frac{5}{27}$

- (2) 對甲而言，除了平手以外，不是勝就是負，而且機會應該一樣

\therefore 甲勝之機率 = $(1 - \text{平手}) / 2$
但是三次猜拳為平手就比較麻煩，有平平平及一平一勝一負（有 6 種可能），而一次中平手之機率為 x ， \therefore

$$\frac{1-X}{2} = \frac{5}{27}, \therefore X = \frac{17}{27}$$

$$\therefore \left(\frac{17}{27}\right)^3 + \frac{17}{27} \times \frac{5}{27} \times \frac{5}{27} \times 6 = \frac{7463}{19683}$$

$$\therefore \frac{\left(1 - \frac{7463}{19683}\right)}{2} = \frac{6110}{19683}$$

評析

本題參加作答者人數不多，可能是比較牽涉到高中課程，但是機率部分在國小就已有接觸。此題可用樹狀圖來分析，雖然辛苦，但也可以作對。參加作答者共有 18 人，只答對第一小題者有 12 人，全對者有北縣江翠國中陳凱傑、黃逸鵬同學，共有 2 人。

問題編號

921203

現在是下午 4:15，有甲、乙、丙、丁四個人想在下午 6:00 前從 A 地走路到 B 地，AB 兩地相距 19.3 公里，而每人走路的時速均為 4 公里。甲發現根本無法完成此項任務，於是四個人商量結果，租了一輛含司機的摩托車，由於這四人皆不會騎摩托車，且摩托車最多只能載 1 人，若假設摩托車的時速是 56 公里。在租好摩托車全部人開始行動已是下午 4:20，試問這四人是否可同時在下午 6:00 前到達 B 地？並請說明原因。

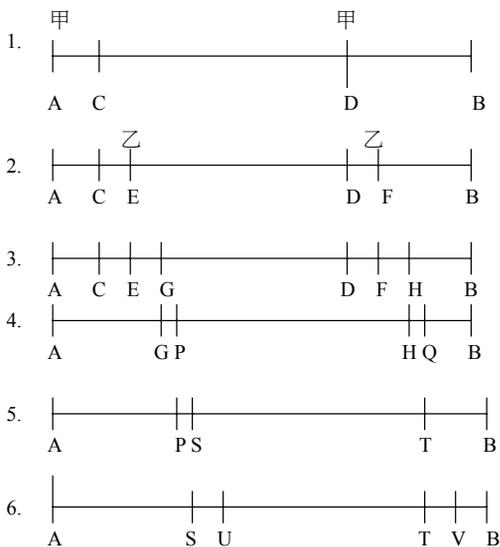
評析

這個題目同學普遍答得不夠完整，只就其中一種情形來解釋可以完成此計畫。因為在國中沒有學到不等式，故學生無法以不等式來完整表達可以完成此計畫的範圍，提供參考答案如下：

設一開始，乙、丙、丁三人走路到達 C 點時需要 t 小時

1. 一開始，摩托車載甲，其餘三人走路，當摩托車到達 D 點時，將甲放下，讓甲走路，此時 $AC=4t$ ， $AD=56t$ 。（如下圖 1）
2. 摩托車回頭，到達 E 點，載乙其餘二人繼續走路，當摩托車到達 F 點時，將乙放下，讓甲、乙走路，此時 $CE=4(52/60)t$ ， $DF=4(52/60)t$ 。（如下圖 2）
3. 當摩托車到達 H 點時，將 B 放下，讓 A、B 走路，此時另外兩人已走到 G 點 $EG=4t$ 。（如下圖 3）

4. 摩托車回頭，到達 P 點，載 C 其餘一人繼續走路，此時 $GP=4(52/60)t$ 。(如下圖 4)
5. 當摩托車到達 T 點時，將 C 放下，讓 A、B、C 走路，此時 $PS=4t$ 。(如下圖 5)
6. 摩托車回頭，到達 U 點，載 D， $SU=4(52/60)t$ 。(如下圖 6)
7. 全部人到達 B 點 $UB=4t$
 $4t+3 \times (52/60)t=33/5t \leq 5/3 \quad \therefore t \leq 25/99$



$$12t+12(52/60)t+56t=78.4t \geq 19.3$$

$$\therefore t \geq 193/784$$

$193/784 \leq t \leq 25/99$ ，所以是可以完成的，

而所花的總時間為 $(\frac{28}{5}t + \frac{1}{4})$ 小時

而所花的總時間的範圍為

$$97.71429 \leq \text{總時間} \leq 99.84848$$

問題編號

921204

有一個由 n 個連續自然數所構成的數列，假設由 A 與 B 二人輪流劃掉數列中的

一個數字，且由 A 先開始，直到剩最後兩個數 a 與 b ，假若 $a、b$ 互質則 A 贏，否則 B 贏。

- (1) 若 n 為奇數，則 A、B 何者有必勝之策略？為何？
- (2) 若 n 為偶數， $n \geq 12$ ，則 A、B 何者有必勝之策略？為何？

參考解答：

(1) 若 a, b 為連續兩數，則必然互質，故 A 有必勝之策略如下：

1、A 先劃掉此數列之第一個或最後一個數。

2、設所剩為 $2k$ 個數，將此 $2k$ 個連續自然數，每兩個連續數合唯一組，共有 k 組。

3、不論 B 接下來劃何數，A 只要跟著 B 劃掉同一組的數即可。

4、因所剩之兩數必為同一組數，則 $a、b$ 為連續之兩自然數，故 $a、b$ 互質，A 勝。

(2) 若 n 為偶數， $n \geq 12$ ，令 $n=2k$ ，因 $n \geq 12$ ，故此數列必含有 4 個連續 3 的倍數，其中必有兩個為奇數，設此兩數為 $p、q$ 。當此數列取到剩兩數 $a、b$ 時，A、B 必然各取 $(k-1)$ 個數，但此數列有 k 個奇數， k 個偶數，假若 k 個基數被取完，則 $a、b$ 必為偶數， $a、b$ 不互質，B 勝。故 B 若全部取奇數，則 A 只要不小心取到一奇數，則 B 勝，所以 B 有必勝之策略如下：

假設 A、B 各已取了前 $(k-2)$ 個數，此時僅剩 4 個數未選，若 A 在此之前取了任一

奇數，則 B 只要將剩餘之奇數取完即勝；假若 A 在前(k-2)個數皆取偶數，則 B 取前(k-2)個數時應取 p, q 以外的其他(k-2)個奇數，此時所剩之 4 個數為 p, q 及 2 個偶數，e1, e2。如果 A 取 p 或 q，則 B 只要取剩下的 p 或 q 即勝。因 e1, e2 皆為偶數不互質。如果 A 取 e1 或 e2 則 B 只要取剩下的另一個偶數即可，因 p, q 皆為 3 的倍數不互質，故 B 勝。

評析

1. 在遊戲類的競賽題中常用到奇偶性及配對之技巧。在第一小題中，若能發覺連續之兩自然數必然互質之性質，當可迅速將連續之兩數進行配對，則一切問題迎刃而解。
2. 第二小題其實也不難，若最後二數為偶數則 B 勝，因此只要考慮當最後兩數若非偶數之狀況，B 是否亦可能使其不互質，若是，則 B 穩操勝券！最自然之情況當然是考慮 3 的倍數，若能如此思考，則很容易就可推出答案。
3. 第一小題答對者較多，第二小題則僅一人答對。
4. 答對品質較佳者：基隆銘傳國中王銘鋒同學、北縣江翠國中吳尚融，其中王銘鋒同學為唯一全對者。

問題編號

921205

有一數列第 1 項 $a_1=2$ ，第 2 項 $a_2=7$ ；今將兩數相乘得到 14，且將十位數 1 視為

第 3 項 a_3 ，將個位數 4 視為第 4 項 a_4 ；再將末二項（1 與 4）相乘得 4，並令其為第 5 項；再將末二項（4 與 4）相乘，…如此繼續下去，可得數列的任意項。試求：

- (1) 此數列的第 20 項為何數？
- (2) 此數列的第 1000 項為何數？
- (3) 若將 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=7 \end{cases}$ 改成 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=3 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=4 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=5 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=9 \end{cases}$ 等，則其結果又會如何？有何較具體的結論。

評析

這一題難度不高，屬一數列的基本題，如何找出規律（循環部分），如何比較不同起始值產生相同數列關係。一則訓練分析；二則引發思考，重新定義一運算法則，可能產生之差異與不變之關係。

答題者不甚多(共 21 人，答題完整者 6 人)，有心深入答題者應皆可完成，唯第三小題尋求規律，尚有部分同學無法回答完整，誠屬可惜。循環節應是「2,4,8,3,2,6,1,2」，若回答「4,8,3,2,6,1,2,2」、「2,6,1,2,2,4,8,3」、…或其他重排方式，應屬比較工作做得不夠深入所致。

「數」可說很有規律，但也有很難找出規律的部分，如質數即是。可不可能重新定義思考或運算模式來嘗試尋求其規律性呢？是此題出題本意。

也提供參考答案如下：

此數列為 2,7,1,4,4,1,6,6,3,6,1,8,8,6,4,2,4,8,3,2,6,1,2,2,4,8,3,2,6,1,2,...

- (1) $2 \cdot ((20-15)/8) = 0 \cdots 5$, 故為循環節第 5 項

(2) $(1000-15)/8=123\cdots 1$,故為循環節第 1 項)

$$(3) \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases} \text{時, } 2, 3, 6, 1, 8, 8, 6, 4, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2,$$

4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, \cdots 。

$(20-8)/8=1\cdots 4$,故為循環節第 4 項,為 3

$(1000-15)/8=123\cdots 1$,故為循環節第 1 項,為 2

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \end{cases} \text{時, } 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2,$$

\cdots 。

$(20-0)/8=2\cdots 4$,故為循環節第 4 項,為 3

$(1000-0)/8=125\cdots 0$,故為循環節第 8 項,為 2

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases} \text{時, } 2, 5, 1, 0, 0, \cdots, \text{顯然第 20 項和第}$$

1000 項均為 0。

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \end{cases} \text{時, } 2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3,$$

2, 6, 1, 2, \cdots 。

$(20-4)/8=2\cdots 0$,故為循環節第 8 項,為 2

$(1000-4)/8=124\cdots 4$,故為循環節第 4 項,為 3

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 7 \end{cases} \text{時, } 2, 7, 1, 4, 4, 1, 6, 6, 3, 6, 1, 8, 8, 6, 4, 2,$$

4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, \cdots 。

如原題解

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 8 \end{cases} \text{時, } 2, 8, 1, 6, 6, 3, 6, 1, 8, 8, 6, 4, 2, 4, 8, 3,$$

2, 6, 1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, \cdots 。

$(20-12)/8=1\cdots 0$,故為循環節第 8 項,為 2

$(1000-12)/8=123\cdots 4$,故為循環節第 4 項,為 3

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 9 \end{cases} \text{時, } 2, 9, 1, 8, 8, 6, 4, 2, 4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, 2,$$

4, 8, 3, 2, 6, 1, 2, \cdots 。

$(20-7)/8=1\cdots 5$,故為循環節第 5 項,為 2

$(1000-7)/8=124\cdots 1$,故為循環節第 1 項,為 2

在 a_1 與 a_2 各從 1 到 9 的 81 組起始值中,除了(2,5),(3,5),(4,5),(5,n),(6,5),(6,9),(7,5),(7,8),(8,5),(8,7),(9,5),(9,6)外,其餘皆可無窮盡的延續下去,且會以{2,4,8,3,2,6,1,2}為循環節。

(上承第 39 頁)

問題編號
933305

如圖, $\triangle ABC$ 內接於一個圓, \overline{AM} 是 $\angle A$ 的平分線交 \overline{BC} 於 M , 延長 \overline{AM} 於 \overline{BC} 於 L , 試以 a 、 b 、 c 來表示 $\frac{AM}{AL}$ 之值。

