教育部九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽試題與參考解答

國立臺灣師範大學　數學系

壹、試題

一、筆試（一）

【問題一】：設正實數數列 $t_1, t_2, \cdots$ 是一個公比為 10 的等比數列. 試求所有可能的正整數 n 及所有的 n 次多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$，滿足：最高次項係數 a_n 是整數, 且 $\left| f(\log_{10} t_k) \right| = 93$, $\forall\, k = 1, 2, \cdots, n+1$.

【問題二】：在某一個 ΔABC 中, 過頂點 B 作一直線與 $\angle C$ 的平分線垂直, 垂足為 D; 過頂點 C 作一直線與 $\angle B$ 的平分線垂直, 垂足為 E. 設點 D 在 ΔABC 的外部, 點 E 在 ΔABC 的內部且 ΔABC 的內切圓在邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{CA}$ 上的切點分別為點 P 、Q. 試證：直線 DE 通過 P 、Q 兩點.

【問題三】：正八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的內部可被它的對角線分割成 80 個區域. 試求所有可能的正整數 n，使得我們可將其中 n 個區域塗色後, 滿足: 每一個 $\Delta A_iA_jA_k$ 的內部都恰有一個塗色的區域.

二、筆試（二）

【問題一】：在 ΔABC 中, D、E 及 F 分別在三邊 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 及 $\overline{AB}$ 上, 且使得 $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 及 $\overline{CF}$ 三線段交於一點. 過 F 作平行於直線 ED 的直線交 $\overline{AD}$ 於 K, 並交 $\overline{CB}$ 的延長線於 L. 試證：$\overline{FK} = \overline{FL}$.

【問題二】：設正實數 a, b 滿足：

$a^3 + b^3 + 3ab = 1$. 試求

$(a + \frac{1}{a})^3 + (b + \frac{1}{b})^3$ 的最小值.

【問題三】：試求所有的正整數 n，使得

$n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ 為一完全平方數.

三、獨立研究（一）

【問題一】：試求滿足

$$(x+93)P(x-93) + (x-93)P(x+93) = 2xP(x) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

的實係數多項式 $P(x)$。

【問題二】：設 x, y, z, w 都是正實數. 試證：

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+w) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})(1+\sqrt[3]{yzw})(1+\sqrt[3]{zwx})(1+\sqrt[3]{wxy}).$$

【問題三】：在 ΔABC 中，$\angle B$ 是直角，其內切圓與 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 分別交於點 D、E、F. 直線 EF 與直線 BC 交於點 G；過 E 引 $\overline{EF}$ 的垂線交 $\overline{BC}$ 於點 H. 設 ΔGHE 的外接圓與 $\overline{AB}$ 交於點 K. 試證：$\overline{GK}=\overline{GD}$.

四、獨立研究（二）

【問題一】：設多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，其中 $a\geq 0$，$b\geq 0$，且 $f(x)=0$ 的三根都是實數. 試證：$f(2)\geq 27$.

【問題二】：試求所有的整數 m，n，滿足方程式 $3n^3-m^2+18n-6m-30=0$.

【問題三】：每一個由正整數所形成的集合都有一個「交錯和」，它的定義如下：「將此集合中的數，由大到小排列，交錯的加、減得到一個結果，稱爲此集合的交錯和」. 例如：集合 $\{1,2,4,6,9\}$ 的交錯和爲 $9-6+4-2+1=6$；集合 $\{6\}$ 的交錯和爲 6；空集合的交錯和視爲 0. 試求 $\{1,2,\ldots,2004\}$ 所有子集合交錯和的總和.

貳、參考解答

一、筆試（一）

【問題一：參考解答】：令 $d_k=\log_{10} t_k$，則 $<d_k>$ 爲公差爲 1 的等差數列. 注意：滿足條件的 n 次多項式爲

$$f(x)=a_n\prod_{k=1}^{n}(x-d_k)+a_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x-d_k)+\cdots+a_1(x-d_1)+a_0，其中 a_0=\pm 93.$$

當 $n=1$ 時，$(a_0,a_1)=(93,-186)$，$(-93,186)$. 即有 2 個一次多項式

$$f(x)=-186(x-d_1)+93,$$

$$f(x)=186(x-d_1)+93.$$

當 $n=2$ 時，$(a_0,a_1,a_2)=(93,0,-93)$，$(93,-186,93)$，$(93,-186,186)$，$(-93,0,93)$，$(-93,186,-93)$，$(-93,186,-186)$. 即有 6 個二次多項式

$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$

$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$

$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$

$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$

$$f(x)=186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$

$$f(x)=-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93.$$

當 $n=3$ 時，$(a_0,a_1,a_2,a_3)=$ $(93,0,0,-31)$，$(93,0,-93,62)$，$(93,0,-93,93)$，$(93,-186,93,-31)$，$(93,-186,186,-93)$，$(93,-186,186,-124)$，$(-93,0,0,31)$，$(-93,0,93,-62)$，$(-93,0,93,-93)$，$(-93,186,-93,31)$，$(-93,186,-186,93)$，$(-93,186,-186,124)$. 即有 12 個三次多項式

$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93,$$

$$f(x)=62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$

$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$

$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$

$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$

$$f(x)=-124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$

$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93,$$

$$f(x)=-62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$

$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$

$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$

$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$

$$f(x)=124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93.$$

當 $n=4$ 時，$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)=$ $(93,0,0,-31,31)$，$(93,-186,186,-93,31)$，$(93,-186,186,-124,62)$，$(-93,0,0,31,-31)$，$(-93,186,-186,93,-31)$，$(-93,186,-186,124,-62)$，即有 6 個四次多項式

$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93,$$

$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$-186(x-d_1)+93,$$

$$f(x)=62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$-186(x-d_1)+93,$$

$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93,$$

$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$+186(x-d_1)-93,$$

$$f(x)=-62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$+186(x-d_1)-93.$$

現在我們證明當 $n\ge 5$，沒有滿足條件的 n 次多項式 $f(x)$．假設存在，則由已知條件得

$$a_1+a_0=f(d_2)=\pm 93 \quad\cdots\cdots\quad (1)$$

$$2a_2+2a_1+a_0=f(d_3)=\pm 93 \quad\cdots\cdots\quad (2)$$

$$6a_3+6a_2+3a_1+a_0=f(d_4)=\pm 93 \quad\cdots\cdots\quad (3)$$

$$24a_4+24a_3+12a_2+4a_1+a_0=f(d_5)=\pm 93 \quad\cdots\cdots\quad (4)$$

$$\vdots$$

$$n!a_n+\frac{n!}{1!}a_{n-1}+\frac{n!}{2!}a_{n-2}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!}a_1+a_0=f(d_{n+1})=\pm 93. \quad\cdots\cdots\quad (n)$$

由[(n)式$-C_1^n\times(n-1)$式$+C_2^n\times(n-2)$式$-\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n\times(1)$式]可得

$$n!a_n+(-1)^{n+1}a_0=(\pm 1\pm C_1^n\pm C_2^n\pm\cdots\pm C_{n-1}^n)\cdot 93$$

因此，

$$a_n=\frac{(\pm 1\pm C_1^n\pm C_2^n\pm\cdots\pm C_{n-1}^n\pm 1)}{n!}\cdot 93$$

故，當 $n=5$時，

$$a_5=\frac{\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1}{40}\cdot 31$$

因為 a_5 是一整數，$\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1$ 必須是 40 的倍數，其唯一可能是

$$\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1=0,$$

即 $a_5=0$，不合．當 $n=6$ 時，

$$a_6=\frac{\pm 1\pm 6\pm 15\pm 20\pm 15\pm 6\pm 1}{240}\cdot 31$$

因爲 a_6 是一整數，$\pm1\pm6\pm15\pm20\pm15\pm6\pm1$ 必須是 240 的倍數，其唯一可能是

$$\pm1\pm6\pm15\pm20\pm15\pm6\pm1=0\,;$$

即 $a_6=0$，不合. 當 $n=7$ 時,

$$a_7=\frac{\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1}{1680}\cdot31$$

因爲 a_7 是一整數，$\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1$ 必須是 1680 的倍數，其唯一可能是

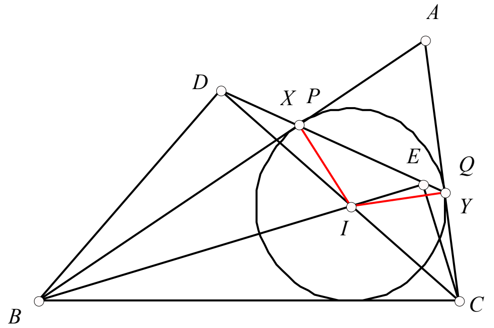
$$\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1=0\,;$$

即 $a_7=0$，不合. 當 $n\geq8$ 時,

$$|\,a_n\,|\leq\frac{(1+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_{n-1}^n+1)\cdot93}{n!}=\frac{2^n\cdot93}{n!}<1$$

因爲 a_n 是一整數，故 $a_n=0$，不合

【問題二：參考解答】：



設直線 DE 與 $\overline{AB}$ 交於 X，與 $\overline{CA}$ 交於 Y，而 I 爲 ΔABC 的內心. 我們僅需證明點 P 與點 X 重合，且點 Q 與點 Y 重合. 因爲 $\angle BDC=\angle CEB=90^\circ$，所以 D、E、C、B 四點共圓. 於是，可得

$$\angle XDI=\angle EDC=(1/2)\angle ABC=\angle XBI\,.$$

由此可知, B、I、X、D 四點共圓. 因此，$\angle IXB=\angle IDB=90^\circ$，即 $\overline{IX}\perp\overline{AB}$，亦即 ΔABC 的內切圓與 $\overline{AB}$ 切於 X 點，因而點 P 與點 X 重合. 另一方面，由 D、E、C、B 四點共圓，可得

$$\angle YEI=180^\circ-\angle DEB=180^\circ-\angle DCB=180^\circ-(1/2)\angle ACB=180^\circ-\angle YCI\,.$$

由此可知 C、I、Y、E 四點共圓. 因此，$\angle IYC=\angle IEC=90^\circ$，即 $\overline{IY}\perp\overline{AC}$,亦即 ΔABC 的內切圓與 $\overline{AC}$ 切於 Y 點，因而點 Q 與點 Y 重合.

【問題三：參考解答】：考慮 6 個互不重疊的三角形：$\Delta A_1A_2A_3$，$\Delta A_1A_3A_4$，$\Delta A_1A_4A_5$，$\Delta A_1A_5A_6$，$\Delta A_1A_6A_7$，$\Delta A_1A_7A_8$．因每一個三角形的內部都有一個塗色的區域，故 $n \geq 6$．另一方面，若 $n \geq 7$，則由鴿籠原理可知上述的 6 個三角形中，必有一個三角形有兩個塗色的區域，故 $n \leq 6$．以下證明 $n = 6$ 是可能的．令

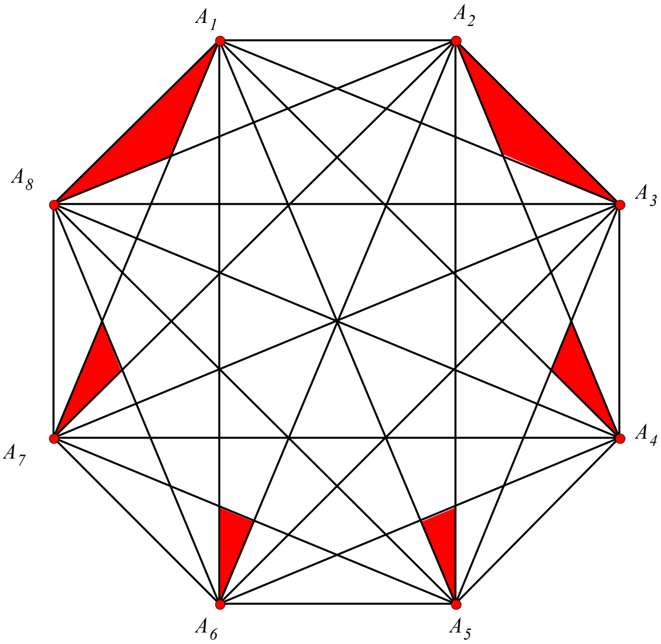
$$S_p = \Delta A_1A_2A_{p+2} \cap \Delta A_{p+1}A_{p+2}A_{p+3}, \quad \forall \; p = 1, 2, \cdots, 6;$$

則將 $S_1, S_2, \cdots, S_6$ 塗色即可滿足所求．事實上，考慮任一 $\Delta A_iA_jA_k$，其中 $1 \leq i < j < k \leq 8$．

(i) 當 $i = 1$ 時（$k \geq 3$），則 S_{k-2} 是 $\Delta A_iA_jA_k$ 唯一的塗色區域.

(ii) 當 $i \geq 2$ 時（$j \geq 3$），則 S_{j-2} 是 $\Delta A_iA_jA_k$ 唯一的塗色區域.

下圖顯示可能的 6 個塗色區域.



二、筆試（二）

【問題一：參考解答】：(1) 由西瓦定理：$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \times \dfrac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \times \dfrac{\overline{BF}}{\overline{FA}} = 1$.

(2) 延長 $\overline{ED}$ 交 $\overline{AB}$ 延長線於 M，則由孟氏定理

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \times \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = 1.$$

(3) 由(1), (2)知

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}，\text{即}\ \frac{\overline{AF}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BM}} \cdots\cdots (*)$$

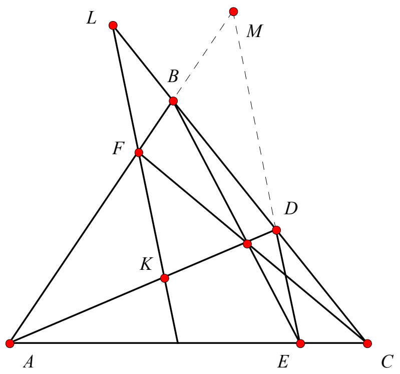
(4) 由 $\overline{FL}\,//\,\overline{DM}$ 知 $\Delta AFK\sim\Delta AMD$，$\Delta BLF\sim\Delta BDM$；故得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{MD}}，\ \frac{\overline{BF}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{FL}}{\overline{MD}} \cdots\cdots (**)$$

(5) 由$(*)$及$(**)$可得

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{FL}}{\overline{MD}},$$

所以 $\overline{FK}=\overline{FL}$.



【問題二：參考解答一】：因爲 $a^3+b^3+3ab=1$，可改寫爲 $a^3+b^3+(-1)^3-3ab(-1)=0$. 所以

$$(a+b-1)[(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2]=0.$$

因此，$a+b=1$ 或 $a=b$ 且 $a=b=-1$ （a,b 爲正實數，不合). 由算幾不等式

$$ab\le(\frac{a+b}{2})^2\le\frac{1}{4}. \cdots\cdots (1)$$

令 $f(a,b)=(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3$，則由(1)可得

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= (a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3 \\
&= a^3+b^3+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+3(a+b)+\frac{3}{a}+\frac{3}{b} \\
&= a^3+b^3+\frac{1}{a^3b^3}(a^3+b^3)+3(a+b)+\frac{3}{ab}(a+b) \\
&= (1+\frac{1}{a^3b^3})(a^3+b^3)+3+\frac{3}{ab} \\
&\ge (1+4^3)(a^3+b^3)+3+12 \\
&= 65(1-3ab)+15 \\
&\ge 65(1-\frac{3}{4})+15 \\
&= \frac{125}{4}.
\end{aligned}
$$

等號成立的充要條件爲 $a=b=\frac{1}{2}$.

【問題二：參考解答二】：由不等式 $x^3+y^3+z^3 \ge 3(\frac{x+y+z}{3})^3$ 及參考解答一中所定義的 $f(a,b)$ 可得

$$f(a,b)+(\frac{5}{2})^3 \ge 3\left(\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{5}{2}}{3}\right)^3 = 3\left(\frac{1+\frac{1}{ab}+\frac{5}{2}}{3}\right)^3 \ge 3\left(\frac{1+4+\frac{5}{2}}{3}\right)^3 = \frac{375}{8}.$$

所以，$f(a,b) \ge \frac{375}{8}-(\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{4}$.

【問題二參考解答三】：設 $g(x)=(x+\frac{1}{x})^3$，則 $g(x)$ 爲 $(0,1)$ 上的凸函數. 由 $b=1-a$ 可得

$$f(a,b)=g(a)+g(1-a) \ge 2\cdot g(\tfrac{1}{2}\cdot a+\tfrac{1}{2}\cdot(1-a)) = 2\cdot g(\tfrac{1}{2}) = 2\cdot\frac{125}{8} = \frac{125}{4}.$$

【註】：由算幾不等式可得 $1=a^3+b^3+3ab \ge ab(a+b)+3ab \ge 2ab\sqrt{ab}+3ab$；若令 $x=\sqrt{ab}>0$，則前式等價於

$$2x^3+3x^2-1 \le 0 \iff (2x-1)(x+1)^2 \le 0 \iff 2x-1 \le 0 \iff x \le \tfrac{1}{2}.$$

因此，$ab=x^2 \le \frac{1}{4}$. 所以既使不知道 $a+b=1$，亦能證明 $ab \le \frac{1}{4}$.

【問題三：參考解答】：首先,我們可將 $n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 因式分解爲

$$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1=(n+1)(n^4+n^3+n^2+n+1).$$

由於 $n+1$ 與 $n^4+n^3+n^2+n+1$ 互質，所以 $n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 爲一完全平方數的充要條件爲 $n+1$ 與 $n^4+n^3+n^2+n+1$ 均爲完全平方數.

其次，對於任意的正整數 n，

$$(n^2+\frac{n}{2})^2<n^4+n^3+n^2+n+1<(n^2+\frac{n}{2}+1)^2.$$

由於當 n 爲偶數時，$n+\frac{n}{2}$ 與 $n+\frac{n}{2}+1$ 爲連續正整數，而 $n^4+n^3+n^2+n+1$ 爲一完全平方數. 所以，只有當 n 爲奇數時，上式才有可能成立. 在此情形下，

$$n^4+n^3+n^2+n+1=(n^2+\frac{n-1}{2}+1)^2,$$

由此可得，$n=-1$ (不合)，$n=3$. 故，僅在 $n=3$ 時，可使得 $n^4+n^3+n^2+n+1$ 爲一完全平方數. 當 $n=3$ 時，$n+1=4=2^2$ 也是一個完全平方數.

三、獨立研究（一）

【問題一：參考解答】：

取 $x=-93$ 代入(1)式可得

$$0\cdot P(-186)-186\cdot P(0)=-186\cdot P(-93),$$

由此可得 $P(0)=P(-93)$；取 $x=93$ 代入(1)式可得

$$186\cdot P(0)+0\cdot P(186)=186\cdot P(93),$$

由此可得 $P(0)=P(93)$；所以 $P(0)=P(93)=P(-93)$. 設 $P(0)=P(93)=P(-93)=c$，則 $P(x)=c$ 有三個根 -93, 0, 93，因而存在實係數多項式 $Q(x)$ 使得 $P(x)$ 可以表示爲

$$P(x)=x(x-93)(x+93)Q(x)+c \quad\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

將此代入(1)式化簡，除以 $x(x-93)(x+93)$ 後可得

$$(x-186)Q(x-93)+(x+186)Q(x+93)=2xQ(x) \quad\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

因爲(3)式對於所有的實數 $x\neq -93, 0, 93$ 都成立，且 $Q(x)$ 爲多項式，所以(3)式對於所有的實數 x 都成立. 若 $Q(x)\equiv a$ 是一常數多項式函數，則(3)式可表示爲

$$a(x-186)+a(x+186)=2ax;$$

此顯然成立；因而

$$P(x)=ax(x-93)(x+93)+c=ax^3-8649ax+c$$

也滿足(1)式.

現在我們僅需證明： $Q(x)\equiv a$ 是一常數多項式. 記 $Q(186)=Q(93\times 2)=a$. 以 $x=186=93\times 2$ 代入(3)式, 我們可得

$$0\times Q(93)+(93\times 4)\times Q(93\times 3)=(93\times 4)\times Q(93\times 2),$$

由此可得

$$Q(93\times 3)=Q(93\times 2)=a.$$

以 $x=279=93\times 3$ 代入(3)式, 我們可得

$$93\times Q(186)+(93\times 5)\times Q(93\times 4)=(93\times 6)\times Q(93\times 3),$$

由此可得 $93\times a+(93\times 5)\times Q(93\times 4)=(93\times 6)\times a$, 因而 $Q(93\times 4)=a$. 事實上, 由數學歸納法可證：對於所有的正整數 $n\geq 2$, $Q(93\times n)=a$. 所以 $Q(x)\equiv a$, 因而

$$P(x)=ax^3-8649ax+c,$$

其中 a, c 可以是任意的實數.

【問題二：參考解答】:

利用算幾不等式($a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$), 得

$$\begin{aligned}(1+x)(1+y)(1+z)&=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz\\&\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{(xyz)^2}+xyz\\&=(1+\sqrt[3]{xyz})^3.\end{aligned}$$

同理可得,

$$(1+y)(1+z)(1+w)=(1+\sqrt[3]{yzw})^3,$$

$$(1+z)(1+w)(1+x)=(1+\sqrt[3]{zwx})^3,$$

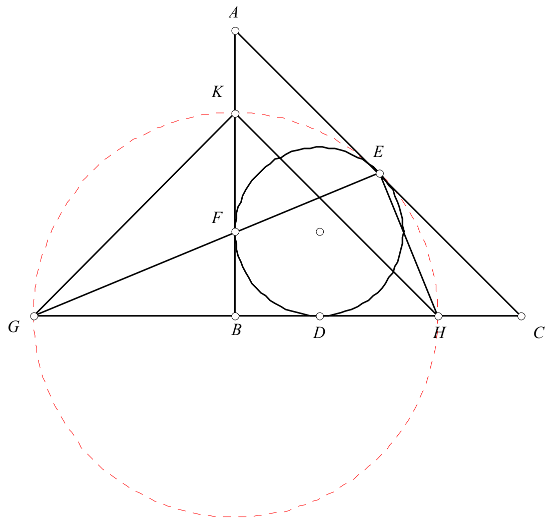
$$(1+w)(1+x)(1+y)=(1+\sqrt[3]{wxy})^3.$$

將上面四個不等式相乘、化簡後可得

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+w)\geq(1+\sqrt[3]{xyz})(1+\sqrt[3]{yzw})(1+\sqrt[3]{zwx})(1+\sqrt[3]{wxy}),$$

其中等號成立的充要條件爲 $x=y=z=w$.

【問題三：參考解答】：



如圖所示，由切割線定理得 $\overline{GD}^2=\overline{GF}\cdot\overline{GE}$．又 $\angle B$ 與 $\angle FEH$ 均爲直角，ΔGHE 與 ΔGFB 相似，所以 $\overline{GE}:\overline{GB}=\overline{GH}:\overline{GF}$，即 $\overline{GF}\cdot\overline{GE}=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$，因而得 $\overline{GD}^2=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$．另方面，因 G、H、E、K 四點共圓，且 $\angle FEH$ 爲直角，得 $\angle GKH$ 爲直角．故，ΔGKH 與 ΔGKB 相似．因此，$\overline{GH}:\overline{GK}=\overline{GK}:\overline{GB}$，即 $\overline{GK}^2=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$．綜合以上結果可得 $\overline{GK}^2=\overline{GD}^2$．故，$\overline{GK}=\overline{GD}$．

四、獨立研究（二）

【問題一：參考解答】：因爲 $f(x)$ 的係數都爲非負，所以 $f(x)=0$ 的三根都是負實數，設爲 $-r_1$，$-r_2$，$-r_3$．由根與係數的關係可知

$$\begin{cases} a=r_1+r_2+r_3; \\ b=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1; \\ 1=r_1r_2r_3. \end{cases}$$

由算幾不等式可得,

$$\frac{a}{3}=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}\ge\sqrt[3]{r_1r_2r_3}=1,$$

$$\frac{b}{3}=\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{3}\ge\sqrt[3]{r_1^2r_2^2r_3^2}=1,$$

因而，$a\ge 3$ 且 $b\ge 3$．由此可得

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 2^3 + a\cdot 2^2 + b\cdot 2^1 + 1 \\
&\geq 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2^1 + 1 \\
&= (2+1)^3 \\
&= 27.
\end{aligned}
$$

【問題二：參考解答】:

$3n^3 - m^2 + 18n - 6m - 30 = 0$ 有整數解

$\Leftrightarrow\ m^2 + 6m - (3n^3 + 18n - 30) = 0$ 有整數解.

$\Leftrightarrow\ m = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 4(3n^3 + 18n - 30)}}{2}$ 爲整數，$36 + 4(3n^3 + 18n - 30) \geq 0$ 且

$36 + 4(3n^3 + 18n - 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot (n^3 + 6n - 7)$ 爲完全平方數.

$\Rightarrow\ n^3 + 6n - 7 \geq 0$ 且 $n^3 + 6n - 7$ 爲 3 的倍數.

$\Leftrightarrow\ n^3 - 1 \geq 0$ 且 $n^3 - 1$ 爲 3 的倍數.

爲此我們可設 $n = 3k + 1$，其中 k 爲整數．由於

$$3n^3 + 18n - 21 = 3^4 k(k^2 + k + 1),$$

所以 $k(k^2 + k + 1)$ 爲一完全平方數．若 $k \neq 0$，則 k 與 $k^2 + k + 1$ 互質．因爲 $k^2 + k + 1$ 恆爲正，得 k 與 $k^2 + k + 1$ 均爲完全平方數．令 $k^2 + k + 1 = t^2$，其中 t 爲正整數，則 $k^2 < k^2 + k + 1 = t^2 < (k+1)^2$，而得 $k < t < k + 1$ 之矛盾結果．故 $k = 0$，即 $n = 1$．當 $n = 1$ 時，$3n^3 + 18n - 21 = 0$ 爲完全平方數．此時，$m = -3$．

【問題三：參考解答】：將 $\{1, 2, \ldots, 2004\}$ 所有子集合分成 2^{2003} 組 S 及 $S \cup \{2004\}$，其中 S 爲 $\{1, 2, \ldots, 2003\}$ 的子集合，則這兩個子集合交錯和的總和爲 2004．所以 $\{1, 2, \ldots, 2004\}$ 所有子集合交錯和的總和爲 2004×2^{2003}．