開啟國中代數教學的新視窗

李美蓮* 劉祥通**
*嘉義市大業國中
**國立嘉義大學　數學教育研究所

摘　　要

本研究目的是設計教學活動，讓學生展現「臆測、檢驗、與修正」的思維歷程，獲知數學的概念，並在課室中實踐此活動以觀察學生的學習反應與效果。研究發現學生在教學者佈置的教學情境之下，能用自發解法解尋求規律的問題，並能根據自發解法類推到較複雜的情境；在臆測活動的問題解決方面，學生能做出臆測，又能嚴密檢驗、修正、並回顧答案的合理性；甚至，學生發現二次函數的對稱規律，並據此簡化解題步驟，符合了教學者的期待。

關鍵字：規律尋求、臆測活動、函數教學、問題解決

壹、緒論

傳統代數在國中的課程編排上，多以數學內容邏輯結構為主，由淺入深以螺旋式的方式來進行，無非是希望學生能奠定日後學習數學的基礎，但這樣的課程內容並未考慮到學生的認知心理邏輯，例如：老師經常在學生還沒掌握到符號的意義時，便丟下了一大堆的符號操作，教學活動中卻很少提供具體情境，讓學生過渡到數學符號的抽象思考，因此，大部分的學生對數學符號感到恐懼，更遑論要學生以數學符號來表示問題之一般化情形。

而國內的數學教育普遍存在以升學導向為先的現象，老師及學生在數學的學習上，為求分數上的表現，不管數學概念是否懂了，直接告知最速成的方法，將已經精緻化的數學很快地呈現出來，但學生所學到的只是皮毛而已，最後變成一台只會應付考試的機器。至於這中間數學化的過程，應該是豐富而有趣的，很值得老師去引領學生探討的，但卻在無形中被抹煞掉了；漸漸地在學生的腦海裡，已經有了一種想法，特定的數學題目，只有一種解法，只要自己沒有將它背起來，下次就一定不會做；所以學生面對題目總是裹足不前，不敢去臆測、嘗試錯誤、再自我修正，少了一份尋求答案的勇氣。

對於美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱 NCTM）（NCTM, 2000）所提到理想中的代數教學，從學前到八年級一連串豐富而多樣的非正規代數經驗，注重學生認知層次的連貫性，要建置一個讓學生能主動探索的教學情境，進而啓發代數思維，一直到八年級後段才充份強調符號運算，這樣的教學方針展現出來的是他們的學生會很有自信地利用代數來呈現並解決問題，這不就是代數學習應該有的風貌嗎？

同時 NCTM（2000）主張：

「做數學包括了發現數學，而臆測—猜想就是一條發現數學的路徑，許多教師和研究都認同學生應該要學習對一些現象進行臆測，並澄清臆測、驗證臆測的結果（p56）。」

許多的數學發現都是經過臆測，經過驗證得來的，讓學生有臆測和達到暫時性答案的機會，對他們的數學學習是非常重要的，學生往往因此而培養出探討數學的臆測能力（陳英娥，1998）。而且在國內「九年一貫國民中小學課程綱要」的基本理念有談到，現今是訊息豐富的社會，透過數與形的訊息，才能認識環境，因此，國民需要培養分析資料、形成臆測驗證與判斷的能力，而數學探究就是培養這些能力的有效學習活動。NCTM（2000）也提到：教學上應該給學生嘗試錯誤的機會，面臨新情境時，能經歷到臆測、檢驗及修正臆測，最後得到合理的答案。

而 Polya 闡述到有效的解題是要能在歷程中，意識到自己正在做的事，堅持不懈地監控、自我評估進展，以調整解題策略，也就是不斷地自我修正，這樣的反思技巧是需要被培養的（引自 NCTM, 2000）。這種監控能力與反思能力，就是後設認知，一旦發展成功，就等於發展了一個回饋系統，隨時對自己的認知與學習，進行偵測，必要時進行修正，有了這個系統，即使沒有旁人的指導，自己也可以達到有效的學習，才能為終身學習奠下基礎。而後設認知是可以培養的，教學上佈置情境讓學生有臆測、檢驗、修正的機會，透過與他人的辯證，刺激自己反思，逐漸澄清、精緻化自己的概念，也就是在展現後設認知，讓真正的數學概念經由不斷修正而被驗證出來。

NCTM（1989）強調：

「讓學生透過與同儕之間的爭論、辨正，可使他們修正、整理或鞏固原來的論據（p57）」。

在陳英娥（1998）的研究中顯示：學生在猜測活動中可以藉由質疑別人的猜測、反駁別人的猜測和為自己的猜測作辯護，這一連串的猜測與反駁的過程具有梳理思維的功能。透過同儕討論，互相質疑辨證，不斷地使自己尋找證據，來澄清問題所在並與別人溝通，歷程中可以把自己的思維重新整理，並有更透徹的理解。需要特別注意的是，學生在臆測的過程中，是很容易會出現盲點的，因為臆測的答案大多是非常直覺的想法，在教學活動中，學生如能大膽地把臆測的想法表達出來，透過同學的互相質疑，進而檢驗臆測的合理性，才是教學活動的重心。如果學生沒有互相質疑辯證，那麼老師應該鼓勵學生提出他們的想法，並藉由提問去刺激學生尋找證據，證明這種臆測是偶然發生的還是永遠成立，讓學生學會如何有系統的去嘗試很多的例子、知道所有的可能性，在各種可能性之間做出辯證。

若是在教導符號操作之前，老師能建置一些教學情境，讓學生能在此情境中有臆測的機會，並能透過同儕討論，促使 Polya

提出的有效調整解題策略充分展現，進而發現數學概念，學生將因此而培養出代數思維的能力。在這資訊化的社會中，能力的培養應該是最重要的，教師應該設計有價値的教學活動，促使學生獲得有意義的學習，並能展現解數學的思考能力。本文期盼能設計出給學生「臆測、檢驗、與修正」以發展數學概念的教學活動，並在課室中實踐此活動以觀察學生的學習反應與效果。同樣的，站在教學的立場，作者也以「臆測、檢驗、與修正」的方式來觀察學生的學習表現。

貳、教學理念

基於以上背景與文獻說明，本文設計了一系列的教學活動，共分成三大幕來呈現，在這整個教學活動裡，希望能看到學生嘗試錯誤，並能從錯誤中反思其過程，找出錯誤的關鍵，進而能自我修正，發現數學概念；期能引發學生在代數學習中不一樣的聲音，提升他們多元化的思考層次。下列分別陳述這三幕的設計理念：

第一幕：

教學活動方面除了由淺入深之外，也應該重視學生的認知發展是從具體到抽象，代數學習不應只是移動符號，也包括了非正規的代數經驗，即能察覺或臆測出樣式與規律，更應學習明確地表達並能歸納出一般性，進而運用符號來解決問題。所以在教學設計上希望能從規律尋求、數量之間的關係出發，並探求學生的解題類型。

第二幕：

教學活動包括了三個臆測活動，透過問題解決，希望學生能臆測函數樣式，包括了線性及二次關係，其中臆測活動（一）學生其實是不難猜出答案的，主要是當成學生經歷臆測的思維歷程之暖身，一開始先給予部份 x 與 y 的對應　，讓學生去猜測 x 與 y 的關係、檢驗猜測的合理性，讓學生對有限資料作出歸納並一般化，最後找出正確的關係式；而臆測活動（二）除了讓學生再次熟悉臆測思維的歷程，題目將設定為無法直觀的看出 x 與 y 之間的關係，應該是比活動（一）的題目稍難一些。臆測活動（三）希望學生能展現臆測、檢驗、修正臆測、再檢驗...一連串的思維歷程，題目設定在二次函數，一開始給予 x 與 y 對應的兩組數據，學生可能因為舊經驗的學習遷移，對有限資料進行分析，會臆測為線性關係，接下來提供多一組數據時，透過檢驗驗臆測就會與臆測形成衝突，學生就必須再修正臆測、再檢驗，最後找出正確的關係式。

第三幕：

以往的函數教學經驗，學生對於二次函數均感到非常抽象，老師通常是透過圖形將二次函數具體化，例如：二次函數 $y=x^2$，老師引導學生將整數點描繪在直角座標平面上，學生可以觀察到二次函數的圖形會沿著一條對稱軸而呈現左右對稱，至於會對稱的原因學生不一定清楚了解。此幕教學活動為「失落的一角」，主軸放在老師針對學生之前的學習經驗，去臆測學生

的解題策略究竟爲何？給予學生 $y=x^2+3$ 的對應關係，是否能探索出二次函數對應關係的特徵，及討論出形成特徵的原因爲何？最後提供表格給學生塡空，檢驗學生是否能夠應用二次函數的對稱性來解題？是否與老師的臆測相符？並修正老師的二次函數教學策略。

參、教學實踐

這樣的一個教學活動，對學生及老師而言，都是一種新的嘗試，學生成爲數學課室的主角，老師扮演著引導的配角，我們師生抱持著探究數學的態度，期待有令人滿意的收穫，茲將重要的研究發現呈現，*T* 代表教學者，也是筆者，*全部*代表兩組的學生共 7 位，*小組*代表第一組或第二組的全部學生，第一組學生的名字個別化名爲*志慶*、*淑娟*、*資涵*，第二組學生的名字個別化名爲*峰銘*、*子爲*、*柏緯*、*凱藝*。

第一幕

讓學生透過具體物操作，辨識及察覺出規律　，以 4 根冰棒棍形成第一個方格，再來以 3 根冰棒棍連著排出下一個方格，筆者希望學生可以透過具體物的操作，得知方格數與冰棒棍數之間的規律。

1.學生呈現不同的解題類型，課室裡充滿了對話、質疑、與辯護。

學生思維一：（操作步驟如下：每次排三根，如圖一）

步驟一　　步驟二　　…………. 最後結果

＜圖一＞

原案一：

T：「要把所有冰棒棍數出來，除了一根一根算之外，有沒有別的算法？」

淑娟：「第一個方格就是 4 支嘛，然後後來陸續增加 9 個方格，就是用 3 支冰棒，就用 9×3，4＋9×3＝31。」

T：「那個 4 是什麼？」

全部：「正方形。」

T：「哪一個正方形？」

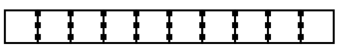
全部：「第一個！」

T：「那 3 是什麼？」

全部：「第一個以外的正方形！」

學生能從一開始的具體物操作，已察覺出第一個正方形與其他的正方形不同，發現第二個方格以後都是由 3 根冰棒棍所組合而成，把整體分成兩部分來看，視第一個方格有 4 根冰棒棍，其餘的方格都當成 3 根冰棒棍來數,所以才會把 4 與 3 分開來算，當他們算到第 10 個方格數時，算式是 1×4＋9×3＝31，31 爲冰棒棍數，而 1＋9＝10，10 代表方格總數。

學生思維二：（操作步驟同第一組，但數法卻有不同，如圖二）



（虛線即重疊處）

＜圖二＞

原案二：

T：「有沒有別的想法呢？」

志慶：「我們又想到一種方法，先算出正方形一共有幾個，然後×4 再－9，」

淑娟：「爲什麼要－9？」

志慶：「因爲會重疊一根一根的，中間

這個啊！」

T：「再把算法完整講一次。」

志慶：「先算出正方形總共有幾個，然後再x4，因爲它有四個邊，這個邊中間會重疊（手比著重疊處），所以要－9。」

淑娟：「那爲什麼－9，而不－10 呢？」

凱藝、志慶：「因爲中間只有 9 根啊！」

T：「中間只有 9 根，那個 9 怎麼來的？」

志慶：「10－1 囉！」

學生把整體的方格當成同一種類型來看，「每一個方格都以 4 根」來看，並把它視爲一種規律，透過具體物的輔助來說明，讓大家能看出 10 個方格有 9 個重疊，並以 10 爲主體，10×4 先算出要 40 根才能排出 10 個方格，再找出重疊處的數目有多少，發現到剛好是爲主體 10 又少 1，所以重疊處是 9 根，就再扣掉 9 根，所以算式是 10×4－9＝31。

從思維一及二看來，學生都能把他們發現的規律以算式呈現出來，而且從學習態度來看，他們的表現是非常積極的，課室裡不時出現質疑與辯護的對話，例如原案二，兩組有不一樣的解法，但是當每一組把想法提出來時，另一組爲了能更清楚的了解，就會去質疑對方的想法，透過同儕之間的互動，讓兩組學生對彼此的做法有更深入的探討，當志慶敘述自己的思維時，是透過具體物輔助說明 10 個方格數時爲何會有 9 根冰棒棍重疊，所以要扣掉 9 根冰棒棍數，淑娟就質疑他爲什麼不是扣掉 10？9 是怎麼來的？志慶說明 10 是方格總數，重疊的部分與 10 有關，9 就是 10 去減掉 1，就好比 10 個數中間共有 9 個閒隔數！這個以 10 爲主體就更顯著了，我想這是透過質疑辯證才讓志慶對自己的解法更爲清楚明確。

2.學生能運用原有的解題活動類型，類推到較複雜的解題情境。

在這一個教學活動裡，同學之間透過充分討論所得到的答案，是經過互相溝通辨證所共同醞釀的，知識形成的歷程才是有意義的學習，學生也才能做進一步的應用，所以當我引入數字較大或抽象的題目時，方格數是 100 及 x 時，兩組學生能夠秉持著討論出來的想法，運用方格數等於 10 所對應的冰棒棍數的解法，類推到數字較複雜的情境，如 100 個及 x 個方格數。

學生類推思維一：

原案三：＜方格數爲 100＞

淑娟：「我們是一個方格是 4 根，再加 99 個方格，每一個都多 3，所以 99x3＋4 也是 301。」

原案四：＜方格數爲 x＞

T：「你們的算式是 3×（x－1）＋4＝y　，解釋一下你們的想法！」

淑娟：「我可以利用桌上的冰棒棍解釋嗎？跟一開始的想法一樣，如果 x 是 3，就先移開一個，剩下另外兩個是 3 支的，就x 3，算方格數的時候，再把它捉回來，就等於 3 個了。」

凱藝：「聽不太懂！」

淑娟：「我現在的 x 是代 3，是代 3 喔，這裡的 x-1 就代表這 2 個方格。（手指在剩下的兩個方格）

T：「為何要先移開？」

淑娟：「這樣比較好算，因為剩下來每一個方格都是 3 個。」

T：「是不是比較有規則？」

淑娟：「是啊，2 個就×3，算出來就再加 4，就是 10 根。」

淑娟這一組是分兩部分來算，以具體物來說明抽象的算式，先以 4 代表第一個方格所需要的冰棒棍數，其餘方格數就以 x－1 來表示，每一個方格需要 3 根，就以 3×（x－1）根來呈現，最後代數式為 y＝4＋3×（x－1）。

學生類推思維二：

原案五：＜方格數為 100＞

凱藝：「用剛剛的想法就是 100×4＝400，中間重疊 99 個，所以再－99 個就是 301！」

原案六：＜方格數為 x＞

志慶：「啊！就跟剛才一樣，x 是方格數，如果有 100 個，有 4 個邊，就×4，還要減重疊的部分，重疊的部份就是方格數減 1 就是 99 個，在這裡就是 x-1 個重疊嘛。」

志慶這一組是以全部的方格數 x 為一主體，每一個方格需要 4 根，就需要 4x 根，重複的根數是為主體－1，就是 x－1，所以他們的代數式為 y＝4x－（x－1），並且自己能化簡為 y＝3x＋1。

代數的學習應從學生生活經驗中的數量關係出發探討，學生從具體觀察及探索的過程裡，可以察覺樣式及規律的模式。在這一個教學過程裡，一開始就讓學生具體操作，透過排冰棒棍的動作，察覺出簡易的規律，可以引發學生比較有系統的思考，所以當學生已發現到規律，不透過具體物操作，遇到數目較大及抽象時，一樣可以成功解題；最後以代數式的數學語言進行溝通，並能描述模式的一致性。

第二幕

在臆測活動（三）實施之前，學生已經能在臆測活動（一）（二）中順利完成任務，筆者給學生一系列 x 與 y 對應的圖表，學生雖然還沒學到教科書中一次函數，但在同儕討論之下，根據線索提出臆測並檢驗，最後能找出 x 與 y 的正確關係，即能臆測出線性函數，在此不再贅述，僅呈現臆測活動（三）的研究發現。

1.學生以各種線性模式臆測並檢驗所有數據，未能找到正確的關係式。

臆測活動（三）

＜表一＞

任務一：對表格中 x 與 y 的數量關係；作出臆測，並檢驗。

X	*0*	*2*	*觀察 x 與 y 的數量，請你找出 x 與 y 的關係，並說出你的想法。*
Y	*3*	*7*	

原案七：（學生執行表一的對話如下）

T：「根據剛剛的經驗來猜 x 跟 y 的關係，如果你已經猜出來了，記得要檢驗看看是否正確。」

小組：「就是 2×2 只有 4 啊，再＋3 就變 7 了。」（檢驗 x＝2 對應 y＝7）

T：「那這一組數好像是對了，那前一組也對嗎？」

小組：「0×2 還是 0，再加 3 還是 3 啊，

所以也對啊！」（檢驗 x＝0 對應 y＝3）

T：「所以你們猜的關係符不符合兩組？」

小組：「符合！」

T：「那個關係是什麼？」

小組：「2x＋3 會等於 y。」

從原案七，他們已經初步臆測 y＝2x+3，並對 x＝0 對應 y＝3，x＝2 對應 y＝7 這兩組數據進行檢驗，確定當初的臆測是否正確，最後，再透過學生與筆者的對答，學生已經知道並且同意目前最適合這兩組數據的關係式是 y＝2x+3。但是在任務二「檢驗臆測、修正臆測」中，筆者再給另一份三組對應的數據，並要求學生再度檢驗 y＝2x+3 此臆測的正確性。

＜表二＞

任務二：將臆測的結果，對其他的資料能加以檢驗，並修正臆測

X	3	4	5	你已經找出 x 與 y 的關係，是否適用於此圖卡中的 x 與 y，如何驗證？請寫下來。
Y	12	19	28	

原案八：（學生執行表二的對話如下）

T：「根據上一題所猜的關係 y＝2x+3，來檢驗接下來的數據對不對？」

峰銘、子爲：「不對」

T：「爲什麼不對？你的證據是什麼？」

小組：「3×2＋3 祇有 9 而已，並不等於 12 啊！」

從原案八以及作業單上的算式來看，學生在檢驗 x＝3 對應到 y＝12 這一組數據產生了質疑，發現到上一題所做出的臆測並不適合這一組的數據，老師提出疑問，釐清學生的問題所在，支持學生繼續思考，希望他們可以找到推翻臆測的證據，評估臆測 y＝2x+3 的真實性，從作業單的執行來看，可以看到他們是逐一檢驗各個數據。

原案九：

T：「那你們現在是不是要再找出一種關係，才能夠符合全部的數據呢？」…….

峰銘：「可是還要符合上面兩組數據啊！」

子爲：「先不要管上面，先找出這三組的，再來代上面的數據！」

峰銘：「喔，我們又找到了 7x－9=y（根據 x＝3 對應到 y＝12，x＝4 對應到 y＝19 這兩組數據所呈現的線性關係）」

T：「那適合於全部數據嗎？」

小組：「不適用。」

T：「是哪一組不適用呢？」

小組：「最上面的兩組和 5、28 這組都不適用，因爲 5×7－9＝26，與 28 不同」

T：「所以你目前找的關係適用於幾組？」

小組：「只有兩組」

T：「那就要再繼續再找其他的關係囉！」

柏緯：「這次從後面兩組來找。」

從原案九，可以發現同學都體認到原有的臆測並不能滿足所有數據，所以全體學生都決定修正臆測，他們嘗試著改變路線，根據 x＝3 對應到 y＝12，x＝4 對應到 y＝19 所呈現的線性關係，又做出新的臆測

就是 $7x-9=y$，這一個新的臆測透過檢驗其他數據，還是發現不適用於全部的數據。接下來從學生的作業單上，可以看出他們又再度修正臆測，利用目前這 5 組數據，取其中任兩組數據並找出其線性關係，當成是修正後的臆測，再對其他 3 組數據進行檢驗。

原案十：

峰銘：「已經找到兩組數據符合，但另外三組數據經過檢驗又不行了！」

T：「做到目前為止，有沒有找到適當的答案？」

全部：「都試過了，找不到！」

結果發現學生窮盡了各種線性模式，及任取兩兩數據配對形成新的臆測，還是不能適用於全部的數據。在這一個過程中，這樣的臆測、檢驗、修正再臆測、再檢驗，一直不斷地發生，筆者看到學生能夠自動檢驗臆測的真實性，發現臆測不適當時，透過小組之間合作解題，嘗試錯誤並重新修正臆測，每當有新的臆測出現，筆者會要求學生解釋，說明理由，從回答中得知學生修正臆測的原因是因為不符合全部的數據。

2.經由老師提示，學生能臆測出二次函數並能嚴密檢驗答案的合理性。

學生已經完成了任務二，整體來看他們是從線性的角度來看 x 與 y 之間的關係，所作出的臆測透過檢驗發現到都不適用，筆者在任務三中給更多的數據並適時介入，試圖讓學生能有一些新的想法。

＜表三＞

任務三：再檢驗，找出最適合的關係。

X	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*再仔細的觀察 x、y，你如何找出最適合 x 與 y 的關係。*
Y	*12*	*7*	*4*	*3*	*4*	*7*	*12*	

原案十一：（學生執行表三的對話如下）

T：「可能不是那麼簡單歐！可見 x 不是指經過乘一個倍數再經過加減就變成 y 了，x 可能還有變化歐！」…………

T：「注意看 x 與 y 數字之間的關聯性！」

結果峰銘有注意去回想老師所給的提示，老師已經可以感受到他已經觀察到了，但是可能還需要老師適度的提供鷹架，支持他繼續思考，

峰銘：「老師我知道有一種方法可以算出來，可是那個方法好像沒有辦法寫 x 跟 y 的關係耶」

T：「你可以說說看啊！」

峰銘：「$3\times3+3=12$，然後 $4\times4+4=19$，$5\times5+5=28$.....」

柏緯：「你 5×5 怎麼會 $+5$？這樣怎麼等於 28」

峰銘：「啊！應該是 $+3$」

柏緯：「原來是用 x 的平方！」

峰銘：「然後 $0\times3+3=3$　，$2\times2+3=9$（應該是 $0\times0+3=3$ 才對）」

一開始可以看出峰銘已經有了平方的想法，但還沒有完全對，因為只有 x 平方還不能夠滿足 x 與 y 的關係，針對任務二的數據，一開始他臆測 x 平方再加上 x 所

得到的數值會等於所對應的 y 值，但同儕之間卻提出了質疑，x 平方之後再加上 x 並不會完全等於 y，所以峰銘修正了臆測， x ＝5 的平方之後再加 3 就可以使得 y ＝28 了，峰銘還將這一個修正後的臆測，自動對其他數據作逐一檢驗。老師發現峰銘腦筋轉的很快，能夠很清楚的抓住解題的要領，但其他同學可能還一頭霧水，老師希望他可以將這一個想法與其他同學分享，塑造高層次思考的表現。

原案十二：

峰銘：「把這個平方之後就等於 9，啊 y 是 12，然後就可以知道平方之後要＋3 才可以等於 y，這個也是一樣，4 平方＝16 再＋3＝19，5 平方＝25 再＋3＝28，上面也是一樣 0x0＝0 再＋3＝3，2 平方＝4 再＋3＝7。」

從峰銘的解釋可以很清楚的知道，一個新的臆測要具有正確性，就必須透過檢驗所有的數據，但同學的疑惑卻是怎麼知道要平方？怎麼知道的？難道是用猜的？

原案十三：

資涵：「怎麼知道要利用平方來算出答案？」

峰銘：「ㄟ，猜的！幾乎所有 x 一次方的方法都用過，還是找不到答案，只剩下平方還沒試過。就試試看，然後就把答案算出來了！」

T：「數學本來就可以猜想，果然也真被峰銘給猜出來了，那你們認為峰銘試的都對了嗎」

全部：「目前為止都對！」

峰銘：「後面題目還沒出來，不知道對不對！」

峰銘是試過目前所有 x 與 y 的線性關係來解題，但都沒有辦法找到適當關係，最後他大膽猜想會不會有平方關係呢？經過重新修正臆測，並將臆測加以檢驗，證明 x 與 y 之間真的具有平方關係，最後得到 x 與 y 正確的關係，老師也從峰銘的回應中，肯定了學生臆測－檢驗臆測這種探討數學的態度。其實我們可以看出峰銘在整個臆測活動理，他的回應裡展現了自我監控及反思的能力，有多少數據就說多少的話，他提醒其他同學到目前所找到的二次關係，不見得適用於更多數據，他有隨時檢驗臆測、修正臆測的準備。

學生的學習深深的受到舊經驗的影響，經過檢驗發現臆測一再地錯誤，但學生並沒有放棄，我看到他們主動修正臆測、再檢驗、再修正，直到發現二次函數，這樣的思維歷程一直不斷地發生，如果有了新的想法，就必須蒐集論證來支持自己的論點，才能跟別人溝通討論，經過彼此質疑辨證，就是釐清問題的重要關鍵，在這一種教學情境下，學生有了邏輯推理的思維模式以及同儕之間的互動，才能發現數學的概念。而在整個教學過程中，要發現二次函數的存在並不容易，值得注意的是，老師需要適時的提供鷹架，簡化問題，必要時要求能力高的學生，塑造高層次的表現，透過同儕討論，來帶動其他能力較低的學生跟上腳步。

第三幕

學生完成任務三，也就是進行所有數據進行檢驗之後，很肯定的接受了 x 與 y 之間的關係，就是 $y=x^2+3$，而「失落的一角」，老師希望學生能夠透過觀察，察覺出 $y=x^2+3$ 中 x 與 y 對應的規律。

1.學生發現了對稱的規律

同學發現 y 值都是 x 平方之後再加 3 的關係之下，x 平方以後，無論正負數都變成正數，當柏緯看到當 x=10 對應的 y 值與 x＝－10 所對應的 y 值都是 103，並且發現到 x＝0 所對應的 y 值是非常特別的，找不到另一個 y 值與其相等，同時淑娟也有相同的發現。

原案十四：

柏緯：「前後一樣，就是前面 103，後面也是 103，中間那一個 0 是自己單獨一個數。」

淑娟：「嗯，前面和後面都有兩個相同的數，除了 0 之外」.....

從柏緯和淑娟兩位學生的回應中，可以看出他們在 y 值觀察中，已經察覺出以 x=0 爲中心，兩邊的 x 值成相反數時所對應的 y 值是會相等的，老師感到非常驚訝並同時好奇，學生是否知道真正的原因，於是提出了質疑。

原案十五：

T：「你們能夠進一步說明兩邊的 y 值會相等的原因？」

淑娟：「因爲－10 的平方和 10 的平方是一樣的，再加上 3 還是一樣」...

從學生的解釋，可以得知是因爲相反數的平方會相等，再加上同一個數 3 所得到的 y 值還是會相等的。

除了觀察出兩邊的 y 值是對稱的，接下來峰銘、柏緯說明的更詳細了，他們提到 x 值從－10 到 10 由小到大，而 y 值是從左而右依序出現由大到小，再由小到大的情形，口頭的說明其實還不具體，老師要求學生能用箭號來表示大小的方向。從學生的圖表說明，發現已經有最小值的意涵了。

老師再次追問學生，希望學生可以看到更多規律，所以試圖讓學生去感覺出來兩段 y 值由小到大的中間點，就是 x＝0 所對應的 y＝3。

原案十六：

T：「再來注意這兩個箭號，由小到大、由小到大（用手指出），你發現什麼？」

峰銘、柏緯：「0 是他們中間的數！」（指的是 x＝0）

峰銘：「由 0 分成兩段的由小到大，但中間 0 沒有包括進去（指的是 x＝0 這一排）」

資涵：「那一個數最小，就是 3（指的是 x＝0 對應到的 y＝3）

從原案十六，他們果然去注意到了 x＝0 是爲中間值，從資涵的回答中，發現到 3 就是所有 y 值中最小的。在學生一來一往的回應中，已經能勾勒出二次函數的初步輪廓，最後他們共同統整出 $y=x^2+3$ 的重要規律如下：

＊當 x 值互爲相反數，所得 y 值是相等的

在此 $y=x^2+3$ 二次函數的探討之下，

學生認爲不管是 x 值是正數或負數所求出來的 y 值都是一樣的，原因是有兩個 x 值互爲相反數時，負數×負數會與正數×正數相同，再同時加 3 所得 y 值必爲同一個。然而學生目前只能觀察到 $y=x^2+3$ 的對稱規律，當 x 互爲相反數時，其 y 值會相同；至於學生有沒有可能會將此對稱規律過度類推到其他二次函數，值得我們注意！例如：學生往往以爲二次函數 $y=(x-5)^2+3$，當 x＝3 及 x＝-3 代入所求得的 y 值會相同，教師必須再佈題追問，以澄清學生的迷思概念。

會有最小的 y 值

在這樣一個 $y=x^2+3$ 的關係式裡，所呈現的對應圖表裡，兩邊的 y 值會具有對稱性，對稱的中心剛好是 x＝0 對應的 y＝3 這一排，而這一個 y＝3 剛好是所有 y 值中的最小值。

活動結束之後，我把另一個二次函數 $y=(x-3)^2+5$ 寫出來時，想試試學生是否可以理解的更多，從學生的說明：x 以 4 代入，會同於 x 以 2 代入，即 1 的平方會等於-1 的平方，再加上 5 還是會相等的，所以他們的 y 值會相等；而且 x 以 3 代入的時候，y＝5，是全部裡頭最小的，以此爲基準其餘兩邊的 y 值會兩兩對應相等。

2.學生的解題策略與教學者的期待相符

而「失落的一角」是筆者臆測學生是否能依據 $y=x^2+3$ 中 x 與 y 的對應規律來簡化解題步驟，而學生很快速地完成所有空格，筆者想從學生的解題歷程了解學生的想法，並檢驗筆者的臆測，便要求他們解釋解題的歷程。學生一開始先把 x＝20 所對應的 y 值算出來，並填入 403。

＜表四＞

【失落的一角】

這是 $y=x^2+3$ 圖表的一部分，請你將失落的一角找出來

X			*-3*	*0*	*3*		*20*
y	*403*	*124*		*3*		*124*	

原案十七：（學生執行表四的對話如下）

T：「你在 x＝20 所對應的 y 值填入 403，接下來你會填哪一格？」

峰銘：「嘿嘿，因爲兩邊一樣，所以好像不用算啊！（學生比較的是 20 與－20 這兩欄）」

峰銘：「像是剛剛的 3 平方＝9 再加 3 ＝12，－3 也是一樣會等於 12，」。

峰銘：「最左邊的 y 也是 403，所以最左邊的 x 值一定是-20」。

筆者的提問，是爲了要檢驗學生是不是有根據 x 值互爲相反數，所對應的 y 值是相等的規律來解題，從峰銘的回答，我們可以得知學生真的是根據此規律來解題。而另一組的解題歷程也是相同的，都是從兩邊對應去著手解題。

原案十八：

淑娟、資涵：「我們就看到這邊了啊！就抄過去！」（手指著最左邊 y=403）

T：「爲什麼呢？」

淑娟、資涵：「兩邊一樣大。」

學生都是以 x＝20 來代入 $y=x^2+3$，

求得 $y=403$，並有發現到兩邊 y 值都是 403，所對應的 x 值剛好會是相反數來解題，就在最左側 $y=403$ 對應的值中馬上填入 -20。

筆者想要對學生的解題有更進一步的了解，問到 $y=124$ 對應的 x 值這一排是怎麼解出來的，發現到學生利用 $124-3$，再開根號，也就是 121 開根號，就是 11 了，學生是同時填入 $x=-11$ 與 $x=11$，從這裡我們更可以肯定學生的解題策略與所發現的規律大有關係，利用 y 值相等對應的 x 值必互為相反數來進行解題；當學生在解 $x=3$ 與 -3 的這兩排所對應的 y 值時，對話如下。

原案十九：

T：「這兩格（指的是 $x=3$ 與 -3 的這兩排所對應的 y 值），你們是先算哪一格？」

全部：「兩個算出來都一樣，所以只要先出其中一個，另一個照抄就可以了....！」

筆者更確定了一件事，學生是利用 x 互為相反數時所對應的 y 值會相等的觀念，就可以簡化解題的步驟，這樣的解題策略與筆者的臆測是相符的，而且學生對二次函數的學習也有了初步的概念。這與以往的教學方式有很大的不同，只要教到二次函數，都是先給定一個二次函數，再依函數關係請學生列出圖表，灌輸學生有關於二次函數的規律，對學生而言，他們很少有機會去注意到兩邊對稱關係及原因，對 y 的最大、最小值更是一頭霧水。

但在這一個教學裡，我修正了自己的想法，以填鴨式灌輸二次函數的知識，學生不一定能理解，當我們佈置好教學情境，讓學生臆測二次函數，檢驗二次函數，從過程中發現到二次函數的規律及形成規律的原因，引導學生挖掘知識，也是可行之道，而且老師是應該對學生的表現有所期待，學生所能學到的可能遠超乎我們所想像，教學時能多聽聽孩子的想法，從他們的想法出發，做適當的引導，才是落實有意義的學習。

肆、結論與省思

結論

本文從三幕的教學活動整理出如下三點結論：

1.學生用自發解法，並能據此類推到複雜情境。

在第一幕中學生能透過具體物的操作，進而察覺出樣式與規律，找到兩種不一樣的解法，學生也能將自發解法類推到較複雜的問題情境，最後明確地歸納出一般性的結果。

2.學生能嚴密檢驗、修正、並回顧答案的合理性。

在第二幕的臆測活動（三）學生能對有限資料進行分析並形成臆測，根據臆測的結果對其他資料進行嚴密驗證判斷；當驗證錯誤時，就必須自我修正進行再臆測、再驗證；最後要能滿足所有資料，找出數量之間正確的關係，在解題過程裡，不斷地回顧答案的合理性。

3.學生發現對稱規律、並據此簡化解題步驟，符合老師的期待

在第三幕的「發現規律」中，學生在同儕討論中，統整出二次函數 x 與 y 之間所呈現的規律，包括了對稱性及 y 具有最小值，在「失落的一角」並能運用此規律來簡化解題步驟。

二、省思

學生在以往的學習經驗裡，都是老師一味地灌輸數學知識，老師教什麼，他們就學什麼，很少有機會去懷疑知識的來由，自然而然同儕的討論就少了，更不用談學生會去應用知識了！但在這一個教學活動裡，我看到學生成爲數學課的主角，他們不再沉默，只要別人有異於自己的想法出現，他們並不會照單全收，老師更是有義務鼓勵學生提出質疑，澄清彼此的想法，這樣一來知識才能真正的被接受；數學的學習除了個人建構之外，往往也需要其他人的共同建構，個人的認知才能由外而內經過內化歷程而得，資涵在週記上反應到，「從這一次的活動中我獲得很多，時間一久我也不會忘，因爲是透過同學之間討論出來的，有經過理解才吸收的，這才是我們真正學到的，也比較有意義，我學習到了數學是要經過討論才能真正吸收。」我發現在這一個活動中學生所獲得的「知識」就是在同儕互動的歷程中建構出來的，學生學習主動性比以往的數學課來的更多更積極。

在教學設計完成之後，進入教室進行臆測教學仍有一些值得注意的事，學生可能會遭遇許多困難和失敗，但在教師和同儕的支持下，學生若能建立繼續挑戰問題的信心，並有平等的發表想法和享有成功的機會；而摸索過程雖然艱辛，但每一個想法都是經過理解而被接受，才是最重要的，我體認到教學其實是需要花時間去等待學生，學生如果不經過理解，就無法得到有用的知識。如果老師沒了耐心，太早告知結果，那麼學生沒了機會作腦力激盪，這個教學活動就變得沒有挑戰性了，活動的目的是提供學生臆測和修正臆測的經驗，經歷取信自己和別人對自己的信任的過程，老師是可以適時的介入，作出教學決策，如果教學臆測活動對大部分的學生而言都感到困難，老師可以給一小部分的提示或簡化問題、釐清題目本意，提供適度的鷹架，讓臆測活動能發展成功。

教師爲了實踐理想的教學情境，落實九年一貫的教育理念---彈性、多元，所以設計教學活動，讓學生從事有意義的學習，培養邏輯思考能力，是責無旁怠的事；但是，目前比較令老師及家長惶恐的是，教學活動裡佈置讓學生有臆測的機會，經驗到有效的數學學習，學生理解的過程中，要建構出有意義的知識，就不能把學習的重心放在解題的速度，但國中基本學測題目則強調統一的試題、標準的答案（引自國語日報），大體上還是非常重視解題速度，這樣的教學理念是否能與基本學力測驗互相配合呢？值得我們深思！

伍、參考文獻

1.教育部（2000）。*國民中小學九年一貫課*

程暫行綱要。教育部編印。
2.陳英娥（1998）。*數學臆測：思維與能力的研究*。國立台灣師範大學科學教育研究所博士論文（未出版）。
3.（2003，3 月 25 日）。「一綱多本」問題何時了？*國語日報*，第十三版。
4.National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
5.National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The principles and standards for school mathematics.* Reston, VA:NCTM.

（上承第 20 頁）

數值就好了，不一定非要是整數不可；這個觀念雖然簡單，但是就像鴿籠原理本身一樣，初看並不起眼，卻常能小兵立大功，時有令人意想不到的妙用。

參考資料

1.許介彥（2000），鴿籠原理及應用舉例，科學教育月刊，第 232 期。
2.R. Grimaldi, *Discrete And Combinatorial Mathematics, Addison-Wesley,* 1999.
3.R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, 5th edition, Prentice Hall, 2001.

（上承第 37 頁）

問題編號 921205

有一數列第 1 項 a_1=2，第 2 項 a_2=7；今將兩數相乘得到 14，且將十位數"1"視為第 3 項 a_3，個位數"4"視為第 4 項 a_4；再將末二項（1 與 4）相乘得 4，並令其為第 5 項；再將末二項（4 與 4）相乘，…如此繼續下去，可得數列的任意項。試求：

(1)此數列的第 20 項為何數？

(2)此數列的第 1000 項為何數？

(3) 若將 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 7 \end{cases}$ 改成 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$、$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \end{cases}$、$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases}$、$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \end{cases}$或$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 9 \end{cases}$等，則其結果又會如何？有何較具體的結論。