不一樣的鴿籠原理

許介彥
大葉大學　電信工程學系

「鴿籠原理」(Pigeonhole Principle)又稱為「抽屜原理」(Drawer Principle 或 Box Principle),在數學上常被用來証明某個東西存在的必然性,是組合數學(Combinatorial Mathematics)中相當重要的一個主題,其原理本身可簡單敘述如下:

「當 k 個籠子中總共裝著 n 隻鴿子,其中一定有某個籠子中的鴿子數不小於 $\lceil n/k \rceil$。」

其中的 $\lceil\ \rceil$ 是數學上的 ceiling function 慣用的記號,此函數可將一個實數對應到一個整數;對任意實數 a,$\lceil a \rceil$ 的值為所有大於或等於 a 的整數中最小的整數,如 $\lceil 3.2 \rceil = 4$, $\lceil 5 \rceil = 5$, $\lceil -3.2 \rceil = -3$ 等。對任意實數 a,不等式 $\lceil a \rceil < a+1$ 恆成立。

鴿籠原理不難由歸謬証法加以証明:如果每個籠子中的鴿子數都小於 $\lceil n/k \rceil$(也就是小於或等於 $\lceil n/k \rceil - 1$),那麼全部 k 個籠子中的鴿子總數最多只有 $k(\lceil n/k \rceil - 1)$ 隻,而

$$k\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{n}{k}+1\right)-1\right) = n$$

與已知總共有 n 隻鴿子的事實矛盾。

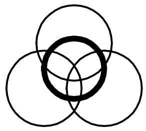
舉例來說,當 6 隻鴿子飛進了 5 個籠子,根據鴿籠原理,一定有某個籠子裡有至少 $\lceil 6/5 \rceil = 2$ 隻鴿子,因為如果每個籠子中的鴿子數都小於兩隻(也就是最多只有一隻),鴿子的總數不可能是 6 隻。同理,在任意 100 個人中,我們可以肯定至少會有 $\lceil 100/12 \rceil = 9$ 個人的生日是在同一個月份,因為如果一年 12 個月的每個月出生的人數都小於 9 人(也就是最多 8 人),總人數最多只有 $8 \times 12 = 96$ 人,不可能為 100 人。

鴿籠原理雖然看似簡單而理所當然,卻可以用來解決許多不簡單的問題。筆者曾經在本刊第 232 期「鴿籠原理及應用舉例」一文中介紹了鴿籠原理的一些較典型的應用;本文中,讀者將看到鴿籠原理的幾個奇特的應用。

鴿籠原理的應用

問題一:

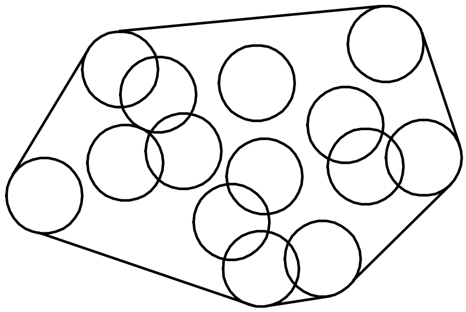
當平面上的兩個圓相交於兩點,我們稱它們的圓周彼此都有一部分被對方「蓋」住了;例如下圖的四個圓中,位於中央的圓的圓周完全被其他三個圓蓋住了:



假設平面上有 n 個大小相同的圓,其中沒有任何兩個圓重合。試證:這 n 個圓當中必存在某個圓,其圓周沒有被其他圓蓋住的部分至少占了它的整個圓周的 $1/n$。

解：

想像我們拉一條繩子以最短的繩長將所有 n 個圓由外圍圈起來，如下圖所示：



繩子所形成的曲線在數學上稱為這些圓的 convex hull。由上圖不難看出，此曲線是由一些弧線與直線連接而成，弧線的部分也就是繩子「轉彎」的部分；上圖中的曲線共在六個地方轉彎。如果我們忽略直線，單看弧線部分的話，所有的弧線顯然正好連成一個完整的圓，因此，所有弧線的總長必定正好等於一個圓的周長。

由於繩子總共圍住了 n 個圓，因此繩子轉彎的地方最多有 n 個，而這些弧線的總長等於一個圓的周長，根據鴿籠原理（鴿子：一個圓的周長，籠子：轉彎的個數），必定存在某個轉彎處其弧長至少是一個圓的圓周的 $1/n$（如果每個轉彎處的弧長都小於一個圓的 $1/n$，所有弧線的總長將小於 $n(1/n)=1$ 個圓的圓周，與已知事實不符）。

由於與繩子接觸的弧線是整個區域最外圍的部分，不會被任何其他圓蓋住，因此必定存在某個圓其圓周沒有被其他圓蓋住的部分至少占了該圓圓周的 $1/n$。

問題二：

某個面積為三坪的房間地板上平鋪著五張形狀不規則不過每張面積皆為一坪的地毯，試證：其中必有某兩張地毯重疊了至少 $1/5$ 坪。

解：

總共有五張面積各為一坪的地毯，因此如果所有地毯之間都互不重疊，將蓋住正好五坪的面積；然而房間只有三坪，因此地毯之間重疊的面積至少有 $5-3=2$ 坪。

五張地毯的任意兩張之間都可能有重疊，因此最多可能有 $C(5,2)=10$ 個「兩兩之間」的重疊；這些重疊的面積至少有兩坪，根據鴿籠原理（鴿子：兩坪，籠子：兩兩之間的重疊數），我們推知必定有某兩張地毯重疊了至少 $2/10=1/5$ 坪。

這個問題還可用歸謬証法來解決：假設任意兩張地毯之間重疊的面積都小於 $1/5$ 坪；想像將地毯一張一張鋪到地板上，第一張地毯當然蓋住了滿滿 1 坪的地板；第二張地毯由於與第一張重疊的面積小於 $1/5$ 坪，因此未與第一張地毯重疊的面積一定大於 $4/5$ 坪；第三張地毯由於與前兩張重疊的面積都小於 $1/5$ 坪，因此未與前兩張重疊的部份一定大於 $3/5$ 坪；依此類推，五張地毯全部鋪到地板上後，所蓋住的地板面積一定大於

$$\frac{5}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{15}{5}=3$$

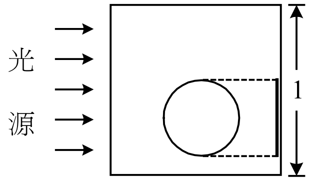
坪，這與已知房間地板只有三坪相矛盾，因此一開始的假設是錯的，這些地毯中必有某兩張地毯重疊了至少 $1/5$ 坪。

問題三：

平面上一個邊長爲 1 的正方形內任意散布著一些大大小小的圓，已知這些圓的圓周總長爲 10。試證：平面上存在一條與這些圓中的至少四個圓相交的直線。

解：

想像每個圓經由光線的照射被投影到正方形的一邊，如下圖所示：



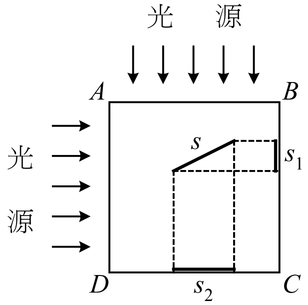
一個周長爲 $2\pi r$ 的圓經投影後所得的線段長度爲 $2r$，因此所有位於正方形內部的圓經投影後所得的所有線段總長爲 $10/\pi \cong 3.18$；由於這些總長約爲 3.18 的線段全都落於長度爲 1 的正方形的一邊上，根據鴿籠原理（鴿子：總長約爲 3.18 的線段，籠子：正方形的一邊），在正方形的邊上必定存在某個點，投影於此點上的線段有至少 $\lceil 3.18/1 \rceil = 4$ 條；因此，必有某束光線（直線）穿越了至少四個圓。

問題四：

平面上一個邊長爲 1 的正方形內任意散布著一些長短不一的線段，已知這些線段的總長大於 $2n$（n 爲正整數）。試證：存在一條與這些線段交於至少 $(n+1)$ 個點的直線。

解：

想像正方形內的某條線段 s 經由如下圖兩個方向的光線照射而分別被投影到正方形的兩條邊上：



由於任意三角形的兩邊之和必大於第三邊，因此 $s_1 + s_2 > s$。如果我們將正方形內所有線段的總長記作 Σs，將所有線段經光線照射後落於 $\overline{BC}$ 上的投影的總長記作 Σs_1，將所有線段落於 $\overline{CD}$ 上的投影的總長記作 Σs_2，那麼

$$\Sigma s_1 + \Sigma s_2 > \Sigma s > 2n$$

根據鴿籠原理，Σs_1 與 Σs_2 這兩數中至少會有一個數大於 n。

如果 $\Sigma s_1 > n$，再次根據鴿籠原理（鴿子：Σs_1，籠子：$\overline{BC}$），在 $\overline{BC}$ 上必定存在某個點，投影於此點上的線段至少有 $(n+1)$ 條；此時必有某束光線（直線）穿越了至少 $(n+1)$ 條正方形內的線段。

如果 $\Sigma s_2 > n$，情況顯然類似。

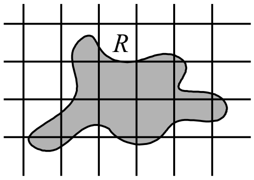
問題五：

坐標平面上 x 坐標與 y 坐標皆爲整數的點稱爲「格子點」（lattice points）。假設 R 爲坐標平面上任意一塊面積大於 n 的區域（n 爲正整數），試證：不論 R 位於何處，經由平移一定能將 R 移至某個位置使得 R 蓋住了平面上的至少 $(n+1)$ 個格子點。

解：

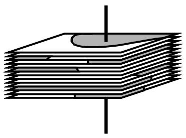
想像 R 所在的平面是一張白紙，而且 R

的內部被塗成了紅色：



以小刀沿著水平（與 x 軸平行）及鉛直（與 y 軸平行）方向切割平面，將紙割成一個一個邊長皆爲 1 的小正方格；有些小正方格由於原來位於 R 的內部以致整個格子都是紅色，有些小正方格可能只有一部分是紅色，有些小正方格則整個格子都是白色。

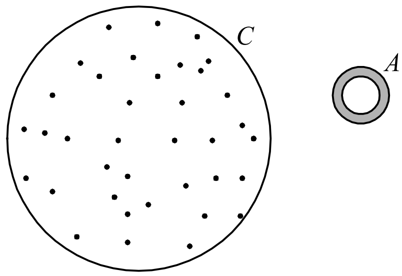
將格子內部有任何紅色部分的小正方格全部收集起來堆成一疊，形成一個底面積爲 1 的立方體，而且每個小正方格在移動過程中都僅做平移而不予旋轉或翻轉。由於 R 的面積大於 n，根據鴿籠原理（鴿子：R 的面積，籠子：立方體的底面積），我們必能將一根針由上而下貫穿立方體的某處使得此針穿過了至少 $n+1$ 個紅色的點（如下圖）。



接著我們將針拔出，將每個小正方格平移放回原來在平面上的位置，重新組成平面上的 R，然後再透過平移將 R 移至平面上的某處使得剛才被針穿過的任何一個紅點與平面上的任何一個格子點重合。由於所有被針穿過的點都位於小正方格中相同的位置，因此只要有一個被針穿過的點與平面上的某個格子點重合，所有其他被針穿過的點也必定正好都落在格子點上，這時候的 R 顯然蓋住了至少 $n+1$ 個格子點。

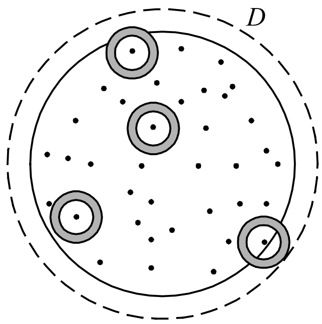
問題六：

A 是平面上一個外徑爲 3 且內徑爲 2 的環形區域，C 則是一個半徑爲 16 的圓，在 C 的內部任意散布著 650 個點，其中沒有任何兩個點重合（如圖）。試證：不論 C 中的 650 個點如何分布，A 一定能被移到 C 中的某處使得 A 蓋住了 650 個點中的至少 10 個點。



解：

想像 C 中的 650 個點的每個點都是一個如 A 的環形區域的中心；在這 650 個環形區域中，有些可能會超出圓 C 的範圍，不過所有的650個環形區域一定都位於半徑爲19（即 $16+3$ ）的圓 D 的內部：



所有 650 個環形區域的面積總和爲 $650\cdot\pi\cdot(3^2-2^2)=3250\pi$，圓 D 的面積則是 $19^2\pi=361\pi$，根據鴿籠原理（鴿子：3250π，籠子：361π），圓 D 內部必有某個點被至少 $\lceil 3250\pi/361\pi \rceil=10$ 個環形區域蓋住；既然這個點離蓋住它的環形區域（至少有 10 個）的中心的距離都介於 2 與 3 之間，如果我們將 A 的中心移到這個點上，A 將能同時蓋住至少 10 個環形區域的中心，也就是說，A 將能同時蓋住當初的 650 個點中的至少 10 個點。

練習題

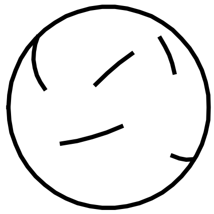
以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

1.假設 S 爲坐標平面上任意一塊面積小於 1 的區域，試證：不論 S 位於何處，經由平移一定能將 S 移至某個位置使得 S 未蓋住平面上的任何一個格子點。

2.空間中的某處散布著數個大小相等的球形光源，其中有些光源的表面上有部份面積由於背對著其他光源以致接受不到任何其他光源的照射。如果我們將每個光源的表面上無法接受其他光源照射的面積相加，所得是否一定等於一個球形光源的表面積？

3.一個 20×25 的長方形內散布著 120 個邊長皆爲 1 的小正方形。試証：在這個長方形內一定還能擺得下一個直徑爲 1 且不與任何小正方形相交的圓。

4.某個半徑爲 1 的球面上散布著一些弧線，每條弧線都是大圓的一部分，而且這些弧線的總長小於 π。試証：此球面上存在著一個不與任何弧線相交的大圓。



結語

利用鴿籠原理解題時，最大的難關常是在設法找到適當的「鴿子」和「籠子」；一旦找到了，許多問題即可迎刃而解。

本文幾個例子的特殊之處除了它們都是與幾何圖形有關的問題外，最大的特點是它們所用的鴿籠原理可以說是「連續」（continuous）的版本；與一般常見可用鴿籠原理解決的問題不同，這裡的鴿子或籠子可能不是一隻一隻或是一個一個可以數得出來的。以下是幾個更直接的例子：

1.如果將 64.8 公克的水全部倒入四個杯子中，那麼一定有某個杯子中裝著不少於 $64.8/4=16.2$ 公克的水。（籠子爲整數而鴿子不是整數）

2.如果將 17 發截面積皆爲 2.2 平方公分的子彈全部打在面積爲 7.8 平方公分的靶紙上，那麼這張靶紙上一定有某個地方被至少 $\lceil 17\times2.2/7.8 \rceil=5$ 顆子彈穿過。（鴿子爲整數而籠子不是整數）

3.如果某座模型小山的體積爲 92.25 立方公分，底面積爲 12.3 平方公分，那麼這座小山的高度一定不會低於 $92.25/12.3=7.5$ 公分。（鴿子與籠子都不是整數）

看了這些例子，讀者不難體認概念上的鴿子或籠子的數量在某些情況下其實只要是

（下轉第 20 頁）