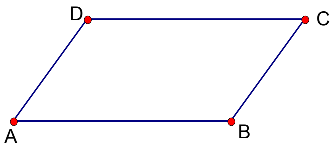
中學生通訊解題第二十九期題目
參考解答與評析

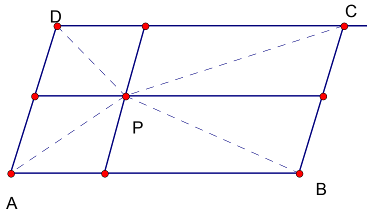
臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號 921001

如圖，將平行四邊形內部一點分別與四個頂點連接，可得四個三角形，若此四個三角形的面積成等比數列，試問滿足這樣條件的點共有多少個？並說明你的理由。



參考解答：



∵△PAB+△PCD=△PAD+△PBC=1/2 ◇ABCD

設此四個三角形的面積為 a, ar, ar2, ar3

1.若 a+ar= ar2+ ar3 → r= 1

2.若 a +ar2 =ar + ar3→ r= 1

3.若 a +ar3 = ar + ar2 → a(1-r)(1-r2)=0 →r=1

∴此四個三角形面積必相等，所以 P 點為平行四邊形 ABCD 之對角線交點。

解題重點：

能討論 $a+ar=ar^2+ar^3$，$a+ar^2=ar+ar^3$，$a+ar^3=ar+ar^2$ 三種情形才算是完整。

評析：

此題答對率頗高，46 人作答，其中 35 人都能得出正確答案。平均得分率 4.84 分。答題優良名單：北縣江翠國中許廷瑋、陳建宏、陳建彰；北市延平國中黃善佑；新竹光華國中范祐維、王銘鋒；彰化陽明國中王建詒；螢橋國中蔡佩真；北市興雅國中林昭平；台南建興國中陳春琰；北市東湖國中李光宇。

問題編號 921002

		1

如上圖，在剩下的 8 個空格中，填入小於 100 且相異的質數，使得橫、豎、斜三數的和皆相等。註：質數除了 2、3 以外，其他質數除以 6 的餘數為 1 或 5。

參考解答與評析:

我們對於質數的了解不多，只知它的正因數只有 1 和本身，其他如「1 到 100 的自然數中質數有 25 個」,「許多質數都是配對差 2 出現的，如 5,7；11,13；17；19；29,31 等」。這一次我們利用質數來改變九宮格數字的連續性，我們怕中學生不知道質數除了 2 和 3 以外，都是「6k+1」或「6k+5」的形式，特別在題目提醒，很驚訝的發現，有部分的學

生會把 1 到 100 所有的質數一一討論代入得到正確的答案，佩服他的耐心與毅力，更相信其對數學的研究很早以前就被啓發。很遺憾的是有少數同學只是把正確答案寄來，而沒有詳細的思考過程，我們懷疑是找參考答案或者任課老師提示的，希望爾後每一題都能把計算過程寫下來。

下面是新竹縣光華國中王銘鋒同學所提供的方法，分析得非常仔細。

【解答】

所有的質數除了 2 和 3 以外都是 3k+1 或 3k-1 型，1 也屬於 6k+1 型，即每列至少有一個 6k+1 型

(1).如果每行每列每斜排都有一個 6k+1 型和二個 6k-1 型。

I	A	B	C	II
1	6k+1		6k-1	
2	6k-1	6k-1	1	
3	6k+1		6k-1	

如上圖，C 列和 2 行都有一個 6k+1 型(就是 1)，所以另外二格都是 6k-1 型；因爲 I 斜排(A1,B2,C3)和 II 斜排(C1,B2,A3)，都已經有二個 6k-1 型，所以 I 斜排的 A1 和 II 斜排的 A3 都應是 6k+1 型。

但是這樣 A 列就有二個 6k+1 型，不合

(2).如果每行每列每斜排都有二個 6k+1 型和一個 6k-1 型。

I	A	B	C	II
1			6k+1	
2	6k-1	6k+1	1	
3	6k-1		6k-1	

如上圖，C 列還要再排一個 6k+1 型和一個 6k-1 型，可令 C1 爲 6k+1 型，則 C3 爲 6k-1 型，2 行也要再排一個 6k+1 型和一個 6k-1 型，但 B2 不可以是 6k-1 型(要不然 I 斜排就有二個 6k-1 型)，所以 B2 是 6k+1 型，A2 是 6k-1 型。

因爲 II 斜排已經有二個 6k+1 型，所以 A3 一定是 6k-1 型，但這樣 A 列就有二個 6k-1 型，不合

(3).由(1).(2) 可以知道每行每列每斜排有一個 6k+1 型和二個 6k-1 型或者是每行每列每斜排都有二個 6k+1 型和一個 6k-1 型都不行，每行每列每斜排裡面全部都是 6k+1 型

I	A	B	C	II
1	6a+1	6b+1	6c+1	
2	6d+1	6e+1	1	
3	6f+1	6g+1	6h+1	

設 A1 是 6a+1；B1 是 6b+1；C1 是 6c+1；A2 是 6d+1；B2 是 6e+1；A3 是 6f+1；B3 是 6g+1；C3 是 6h+1。

因爲 A 列總和=B 列總和=C 列總和=1 行總和=2 行總和=3 行總和=I 斜排總和=II 斜排總和可以知道

$$6(c+h)+3=6(d+e)+3=6(a+b+c)+3=6(f+g+h)+3$$
$$=6(a+d+f)+3=6(b+e+g)+3$$
$$=6(a+e+h)+3=6(c+e+f)+3$$

$$\rightarrow c+h=d+e=a+b+c=f+g+h=b+e+g$$
$$=a+d+f=a+e+h=c+e+f$$

$c+h=a+b+c \rightarrow h=a+b$ 1

$c+h=f+g+h \rightarrow c=f+g$ 2

$c+h=a+e+h \rightarrow c=a+e$ 3

$c+h=c+e+f \rightarrow h=e+f$ 4

$d+e=b+e+g \rightarrow d=b+g$ 5

$d+e=a+b+f \rightarrow e=a+f$ 6

$d+e=a+e+h \rightarrow d=a+h$ 7

d+e=c+e+f → d=c+f　　8

由 1,4：a+b=e+f　　9

6 代入 9：a+b=a+2f

b=2f

由 2,3：f+g=a+e　　10

6 代入 10：f+g=2a+f

g=2a

小於 100 的質數中，型如 6k+1 的有：

7,13,19,31,37,43,61,67,73,79,97

故 a,b,c,d,e,f,g,h 只會是 1,2,3,5,6,7,10,11,12,13,16 共 11 個裡的 8 個數。

滿足 g=2a ,b=2f　且數字不重複的情形有

1) g=2,a=1,b=6,f=3

2) g=2,a=1,b=10,f=5

3) g=2,a=1,b=12,f=6

4) g=6,a=3,b=2,f=1

5) g=6,a=3,b=10,f=5

6) g=10,a=5,b=2,f=1

7) g=10,a=5,b=6,f=3

8) g=10,a=5,b=12,f=6

9) g=12,a=6,b=2,f=1

10) g=12,a=6,b=10,f=5

組別	g	a	b	f	c=f+g	h=a+b	d=c+f	e=a+f	符不符合	不合的原因
1	2	1	6	3	5	7	8	4	不合	d 不能是 8(6*8+1=49 不是質數) e 不能是 4(6*4+1=25 不是質數)
2	2	1	10	5	7	11	12	6	符合	
3	2	1	12	6	8	13	14	7	不合	c 不能是 8(6*8+1=49 不是質數) d 不能是 14(6*14+1=85 不是質數)
4	6	3	2	1	7	5	8	4	不合	d 不能是 8(6*8+1=49 不是質數) e 不能是 4(6*4+1=25 不是質數)
5	6	3	10	5	11	13	16	8	不合	e 不能是 8(6*8+1=49 不是質數)
6	10	5	2	1	11	7	12	6	符合	
7	10	5	6	3	13	11	16	8	不合	e 不能是 8(6*8+1=49 不是質數)
8	10	5	12	6	16	17	22	11	不合	h 不能是 17(6*17+1=103>100) d 不能是 22(6*22+1=133>100)
9	12	6	2	1	13	8	14	7	不合	h 不能是 8(6*8+1) d 不能是 14(6*14+1=85)
10	12	6	10	5	17	16	22	11	不合	C 不能是 17(6*17+1=103>100)

故得到二個解

(1)

7	61	43
73	37	1
31	13	67

(2)

31	13	67
73	37	1
7	61	43

問題編號
921003

某次考試只考國文、英文、數學、自然與社會五科，各科都用「0、5、10、15、20」等五種級分來計分。今甲、乙、丙、丁、戊五人的部分成績如下表，已知各科中每人的成績皆相異，且乙有 3 科同分，丙有 4 科同分，請把其他成績填入表格中。

	國文	英文	數學	物理	化學	總分	名次
甲						95	1
乙					5		2
丙							3
丁							4
戊	20	10					5

參考解答：

（1）求甲的分數：甲總分爲 95，因滿分 100，所以可確定甲的分數有一科是 15 分，其他科維滿分(20 分)，又戊的國文爲 20 分，因各科中每人的成績皆相異，所以甲國文爲 15 分，其他爲 20 分。

（2）乙有 3 科同分

(a).同分分數爲 5 分，這樣的話，乙最高只能 5、5、5、15、15 總分 45 分，丙有 4 科同分，不可能也是 5 分，若爲 10 分，總分必超過乙，若爲 0 分，必低於戊，故此狀況不可能。

(b).同分分數爲 10 分

	國文	英文	數學	物理	化學	總分	名次
甲	15	20	20	20	20	95	1
乙	10	15	10	10	5	50	2
丙							3
丁							4
戊	20	10					5

這樣的話，乙最高只能 10、10、10、15、5，總分 50 分，丙有 4 科同分，不可能是 15 分(會超過乙)，也不可能爲 5 分(低於戊)，故此狀況不可能。

(c).乙 3 科同分分數爲 15 分

	國文	英文	數學	物理	化學	總分	名次
甲	15	20	20	20	20	95	1
乙		15	15	15	5	50	2
丙							3
丁							4
戊	20	10					5

（3）丙有 4 科同分，同分分數是 5 分不可能，因爲戊已經有 30 分，若丙有 4 科同分分數是 5 分，頂多 30 分，不可能第 3 名，故 4 科同分分數必爲 10 分。

	國文	英文	數學	物理	化學	總分	名次
甲	15	20	20	20	20	95	1
乙		15	15	15	5	50	2
丙	10		10	10	10		3
丁							4
戊	20	10					5

（4）將剩餘空格依照名次的條件，由於戊有 30 分，數學和物理的 5 分給丁，0 分給戊，數學的 15 分給丁，英文剩 5 分和 0 分分給丙和丁，5 分一定要給丁，否則丁將頂多和戊同分，國文剩 5 分和 0 分分給乙和丁，5 分一定要給丁，否則丁將頂多和戊同分，數學的 0 分給戊。

	國文	英文	數學	物理	化學	總分	名次
甲	15	20	20	20	20	95	1
乙	0	15	15	15	5	50	2
丙	10	0	10	10	10	40	3
丁	5	5	5	5	15	35	4
戊	20	10	0	0	0	30	5

評析：

本題同學答題情形不錯，大部分都寫出了正確答案，需加強的地方則是在過程的描述應力求簡潔，有條理、分類清楚討論才是。

問題編號
921004

$1331=11^3$

$1030301=101^3$

$1003003001=1001^3$

我們發現四位數 『1331』 在每兩個相鄰的數字之間插入個數相同的零，所得的新數是完全立方數，試證之。

參考解答：

因為 1331＝1x103＋3x102＋3x10＋1

＝113＝(10+1)3

10301＝1x106＋3x104＋3x102＋1

＝1013＝(102＋1)3

1003001＝1x109＋3x106＋3x104＋1

＝10013＝(103＋1)3

可知：在相鄰一對數字之間插入 k 個零後，得到數

100⋯00300⋯003⋯001

$= 10^{3(k+1)} + 3\cdot 10^{2(k+1)} + 3\cdot 10^{k+1} + 1$

$= (10^{k+1}+1)^3$ 。

解題重點：

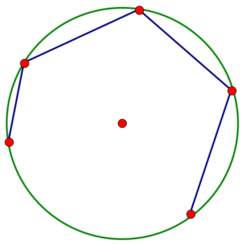
能利用立方公式(a＋b)3＝a3＋3a2b＋3ab2＋b3 並能找出一般形式解。

評析：

本題徵答人數共有 55 人，其中全對者共 37 人。答對率相當高，可見大部分參與徵答的國中同學對於乘法公式是相當熟練的；少部分同學只由幾個例子即推得結果而未能推演出一般形式，相當可惜。

問題編號 921005

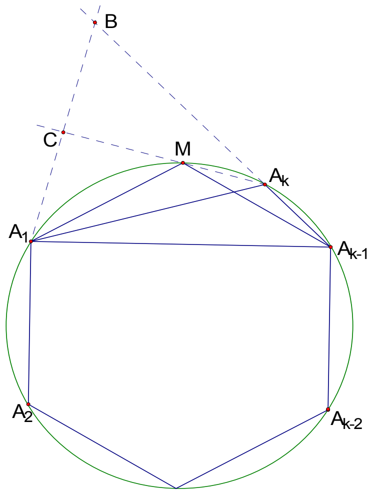
試證明：圓內接 k 邊形中，周長最大的必是正 k 邊形。



參考解答一：

(此方法由新竹市光華國中王銘鋒同學等人提供)

設 $A_1A_2\cdots A_k$ 是所有圓內接正 k 邊形中周長最大者，但它不是正 k 邊形，則它至少有一對鄰邊不相等，設為 $A_{k-1}A_k \neq A_kA_1$ (如圖)。



取弧 $A_1A_kA_{k-1}$ 的中點 M，連接 A_1M，$A_{k-1}M$，A_kM，

過 A_1 作 A_kM 的垂線，垂足為 C 點，延長 A_1C 至 B，使 $BC = A_1C$ 。於是 $\triangle A_1MC \cong \triangle BMC$，$\triangle A_1A_kC \cong \triangle BA_kC$，

所以 $A_1M = BM = A_{k-1}M$，$A_1A_k = BA_k$，

$\angle BA_kM = \angle A_1A_kM = \angle A_1A_{k-1}M$

$= \angle MA_1A_{k-1}$。

又 $\angle A_1MA_{k-1} = \angle A_1A_kA_{k-1}$，

所以 $\angle BA_kM + \angle MA_kA_1 + \angle A_1A_kA_{k-1}$

$= \angle A_1A_{k-1}M + \angle MA_1A_{k-1} +$

$\angle A_1MA_{k-1} = 1800$。

因此 A_{k-1}、A_k、M 三點共線。

再由 $\triangle MA_{k-1}B$ 得到 $A_{k-1}M + MB > A_{k-1}B$，即

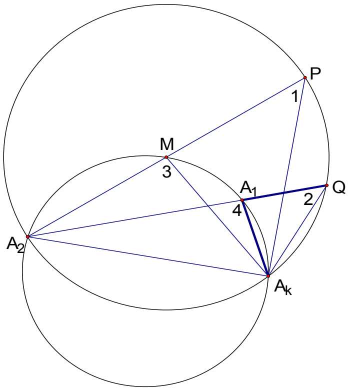
$A_1M+A_{k-1}M>A_1A_k+A_kA_{k-1}$。

所以 $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-2}A_{k-1}+A_{k-1}M+MA_1>A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-2}A_{k-1}+A_{k-1}A_k+A_kA_1$。即得到 k 邊形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}M$ 的周長大於 k 邊形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$ 的周長。此爲矛盾，故圓內接 k 邊形中，周長最大的必是正 k 邊形。

參考解答二：

(此方法由台南市建興國中陳春琰同學提供)

設 A1A2⋯Ak 是所有圓內接正 k 邊形中周長最大者，但它不是正 k 邊形，則它至少有一對鄰邊不相等，設爲 A1A2≠AkA1 (如圖)。



取弧 A2A1Ak 的中點 M，∴ $\overline{A_2M}=\overline{A_kM}$，以 M 爲圓心，$\overline{A_2M}$ 爲半徑作圓通過 A_k。延長 $\overline{A_2M}$ 與 $\overline{A_2A_1}$ 分別交圓於 P 與 Q，

連 $\overline{A_kP}$、$\overline{A_kQ}$

∴ $\overline{A_2M}=\overline{MA_k}=\overline{MP}$，

則 $\overline{A_2M}+\overline{MA_k}=\overline{A_2M}+\overline{MP}=\overline{A_2P}$，

因爲 ∠1=∠2，∠3=∠4 (對同弧)，

所以 ∠QAkA1=∠4−∠2=∠3−∠1

=∠PAkM=∠1=∠2，

得到 $\overline{A_1Q}=\overline{A_1A_k}$。而 $\overline{A_2P}>\overline{A_2Q}$ （$\overline{A_2P}$ 爲直徑)，因此

$\overline{A_kM}+\overline{MA_2}=\overline{MP}+\overline{MA_2}=\overline{A_2P}>\overline{A_2Q}=\overline{A_kA_1}+\overline{A_1A_2}$

所以 A2A3＋⋯＋Ak-1Ak＋AkM＋MA2＞A2A3＋⋯＋Ak-1Ak＋AkA1＋A1A2。即得到 k 邊形 A1A2⋯Ak-1M 的周長大於 k 邊形 A1A2⋯Ak-1Ak 的周長。此爲矛盾，故圓內接 k 邊形中，周長最大的必是正 k 邊形。

解題重點：

(1)能用反證法找出矛盾。

(2)清楚了解並能利用基本的幾何性質。

評析：

本題徵答人數共有 17 人，其中全對者共 6 人。其中，答題優良或解法富參考價值者有台北市延平中學黃善佑同學；海山國中江俊緯同學；積穗國中蕭屹宏同學；新竹市光華國中范祐維同學與王銘鋒同學；彰化市陽明國中王建詒同學；台南市建興國中陳春琰同學等。