臺灣省北區九十二學年度高級中學數學及自然科能力競賽數學科複賽試題及參考解答

國立臺灣師範大學　數學系

《試題部分》

壹、

一、第一區（花蓮區）複賽試題（一）

【問題一】：考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\ldots P_n(n\geq 3)$。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。證明她的領海面積是

$$(p+\pi d)d.$$

有兩個問題要問你：

(1) 請你完成這問題的證明。(8 分)

(2) 如果有一個島嶼的形狀恰爲圓形，且海岸線總長也是 p，那麼這島嶼的領海面積比凸 n 邊形島國的領海面積大、相等或小呢？請你先猜答案，再實際計算是否猜對。(8 分)

【問題二】：設 $a<b$。函數 $f(x)=4+2x-x^2$ 在區間 $[a,b]$ 上的最小值爲 $2a$，最大值爲 $2b$，求 a, b 之值。(16 分)

【問題三】：在一容器內裝有濃度 10%的溶液 100 公克，注入濃度爲 40%的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 公克。如此反覆進行下去。設 a_n %代表稀釋 n 次後，溶液的濃度，並令 a_0 %=10%(溶液初始濃度)。

(1) 求 a_1 的值。(3 分)

(2) 列出 a_n 與 a_{n+1} 的相關式子。(5 分)

(3) 求 a_n 的一般公式。(9 分)

二、第二區（花蓮區）複賽試題（二）

1.用 0、1、…、9 中的三相異數字，拼成一個三位數再除以此三個數的和，試問所得的數值中最小的是＿＿（一）＿＿。

2.某次桌球單打比賽中，原訂每兩位球員恰比賽一場，但有四位球員各比賽了兩場後就退出了，這樣全部比賽只進行了 50 場，則這四位選手之間總共賽了＿（二）＿場。

3.設圓 $x^2+(y-a)^2=1$ 與拋物線 $y=2x^2$ 相切，則 a 的值爲＿＿（三）＿＿。

4.福爾摩斯在偵辦一件兇殺案，案發時間據判斷是在半夜十二點至凌晨三點之間，福爾摩斯想從案發現場拾獲的一只手錶準確研判兇殺時間。據判斷，此手錶在案發時，因爲經過劇烈的打鬥而損壞停止，指針僅剩下時針，而刻度也僅剩下 12，其他刻度皆已脫落。

福爾摩斯拿隨身攜帶的尺量了一下，時針的長度是 0.5 公分，並順手拿鉛筆在錶的中心沿 12 點的方向 0.8 公分處點一個黑點，再量此黑點與時針的頂點的距離是 0.7 公分。福爾摩斯在草稿紙上算了一下，微笑的說：「我知道精確的案發時間了。」問：案發的時間是凌晨幾時幾分？答：(四)。

5.下圖是矩形內接一半圓形，且半圓圓弧與矩形的邊相切，則此半圓形的半徑爲(五)。

6.標準身材的定義是

$$\frac{\text{肚臍高度}}{\text{身高}}=\frac{\text{肚臍距頭頂距離}}{\text{肚臍高度}}$$

有一身高 152 公分，肚臍高度 92 公分的女孩欲借穿高跟鞋來提高身高與肚臍高度，滿足標準身材的定義。試問：該女孩穿多少公分（取最接近的整數）的高跟鞋較恰當。 答：＿（六）＿。

貳、

一、第二區（台北區）複賽試題（一）

【問題一】: 試求滿足下列條件的所有正整數 n：

（1）n 恰有 6 個正因數：$1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$；

（2）$1+n=5(d_1+d_2+d_3+d_4)$。（16 分）

【問題二】: 從 1 到 100 的整數中挑選相異的數形成 n 個集合，滿足下列兩個條件：

（1）任何兩個集合都沒有共同的元素；

（2)每個集合中最大元素等於其餘各元素的乘積。

試問：n 最大是多少？並寫出這 n 個集合。（需說明理由）（16 分）

【問題三】: 在凸五邊形 $ABCDE$ 中，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}$，而且 $\overline{CD}$ 的中點 M 滿足 $\angle CMB=\angle DME=45°$。試求

（1）$\angle ABC$ 的度數；（9 分）

（2）$\overline{CF}:\overline{CM}$，其中 F 是 B 至直線 CD 的垂足。（8 分）

二、第二區（台北區）複賽試題（二）

1.設 ΔABC 中 $\angle B=2\angle C$，$\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，使得 $\overline{AB}=\overline{CD}$，則 $\angle A=$ ＿(一)＿。

2.平面上的格子點到直線 $15x+20y-12=0$ 的最短距離為 ＿(二)＿。（格子點是指兩個坐標都是整數的點）

3. 設 a，b 為正整數且 $a\ge b$，滿足 $ab+a+b=181$ 及 $a^2b+ab^2=3900$。求 $a^2-b^2=$ ＿(三)＿。

4.坐標平面上有三個圓 A、B 與 C。圓 A 的圓心為 $(0,a)$ 而半徑為 a，圓 B 與圓 A 外切且與 x 軸相切於點 $(a,0)$，圓 C 與圓 A、圓 B 都外切且又與 x 軸相切，則圓 C 與 x 軸切點的 x 坐標為＿(四)＿。

5. 若 x 是正數，且 $x\ne 4$，$x\ne\frac{1}{9}$，則 $\frac{4}{4-x}+\frac{9x}{9x-1}$ 的最小值為＿(五)＿。

6. 設 a 是實數，方程式 $x^4-(3+2a)x^2+2x+a^2+2a=0$ 的根都是實根，則 a 的範圍為＿(六)＿。

7.以下是一個猜數字遊戲：甲由 0 到 9 的十個數字中任選四個相異數字排成一列（例如 0923），讓乙猜此數。若數字與位置都對者有 n 個，記為‘nA’；若數字對而位置不對者有 m 個，記為‘mB’。例如：依上面數字，若乙猜‘1935’，則甲記‘1A 1B’；若乙猜‘1983’則甲記‘2A 0B’。若乙第一次猜的結果是‘1A 1B’，則乙第二次就猜對此數的機率為＿(七)＿。

參、

一、第四區（新竹區）複賽試題（一）

【問題一】: 在坐標平面上給定一點 $A(2,5)$，試在直線 $y=x$ 上找一點 P，使得 $\overline{AP}-\overline{PQ}$ 為最小，其中 Q 為 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足。請求出 P 點的坐標，並證明之。

【問題二】：試求出所有的正整數 a、b，使得 $\dfrac{a^2+b}{ab+1}$ 為正整數。

【問題三】：將 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 依順時針方向排列在一圓周上，其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 為 1,2,3,⋯,48 的一種排列。設 $f(n)$ 表示圓周上從第 n 個數 a_n 開始依順時針方向連續的 16 個數中是偶數的個數。

(a) 試證：$f(1)f(2)\cdots f(48) \leqq 2^{144}$；

(b) 試證：必有一整數 $k \in \{1,2,3,\cdots,48\}$ 使得 $f(k)=8$.

二、第四區(新竹區)複賽試題(二)

1. 設有兩圓內切，通過小圓的圓心作一直線 A-B-C-D，分別交大圓於 A、D，交小圓 B、C，若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=2:6:5$，則小圓與大圓半徑的比值為 __(1)__。
2. 已知函數 f 滿足：$f(14)=14$, $f(26)=26$，且當質數 p 與 q 滿足 $p>q\geqq 2$ 時，$f(pq)=f(p)-f(q)+p+q$。則 $f(91)=$ __(2)__。
3. 在△ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上的中點，△ABD 的內切圓與中線 AD 相切於 M，△ACD 的內切圓與中線 AD 相切於 N。若 $\overline{AB}=15$，$\overline{AC}=10$，則線段 $\overline{MN}=$ __(3)__。
4. 平面上過點 (3,0) 且與橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 相切的兩條直線所夾成的銳角為 θ。則 $\tan\theta$ = __(4)__。
5. 設正數 a, b 滿足 $2ab+3a+6b=27$，則 a^2+4b^2 的最小值為 __(5)__。
6. 設 $f(x)$ 為有理係數的三次多項式，$f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$，且對任意正整數 n，$f(n)$ 都是正整數。則 $f(10)$ 的最小可能值為 __(6)__。

二、第四區（新竹區）複賽試題（二）

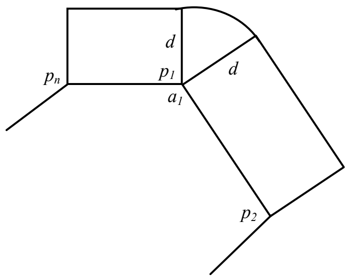
1. 設有兩圓內切，通過小圓的圓心作一直線 A-B-C-D，分別交大圓於 A、D，交小圓 B、C，若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=2:6:5$，則小圓與大圓半徑的比值為 __(1)__。
2. 已知函數 f 滿足：$f(14)=14$，$f(26)=26$，且當質數 p 與 q 滿足 $p>q\geqq 2$ 時，$f(pq)=f(p)-f(q)+p+q$。則 $f(91)=$ __(2)__。
3. 在△ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上的中點，△ABD 的內切圓與中線 AD 相切於 M，△ACD 的內切圓與中線 AD 相切於 N。若 $\overline{AB}=15$，$\overline{AC}=10$，則線段 $\overline{MN}=$ __(3)__。
4. 平面上過點 (3,0) 且與橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 相切的兩條直線所夾成的銳角為 θ。則 $\tan\theta$= __(4)__。
5. 設正數 a, b 滿足 $2ab+3a+6b=27$，則 a^2+4b^2 的最小值為 __(5)__。
6. 設 $f(x)$ 為有理係數的三次多項式，$f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$，且對任意正整數 n，$f(n)$ 都是正整數。則 $f(10)$ 的最小可能值為 __(6)__。

《參考解答》

壹、

一、第一區（花蓮區）複賽試題（一）

【問題一】：(1)如下圖所示，令凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\ldots P_n$ 的 P_i 所對應的內角為 α_i。



領海是由 $P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1$ 爲邊向外作寬爲 d 的 n 個矩形及頂點 $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積總和。

$P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1$ 爲邊向外作寬爲 d 的 n 個矩形面積和爲

$$(P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_nP_1)d = pd.$$

頂點 $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積和爲

$$\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)\frac{\pi d^2}{2\pi} = (n\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n))\frac{\pi d^2}{2\pi}$$

$$= (n\pi-(n-2)\pi)\frac{\pi d^2}{2\pi} = \pi d^2$$

【問題二】：$f(x) = 4 + 2x - x^2 = 5 - (x-1)^2$

case 1. 當 $a < b < 1$ 時，f 在 $[a,b]$ 上遞增故最大值爲 $f(b) = 2b$，最小值爲 $f(a) = 2a$

即 $\begin{cases} 4 + 2b - b^2 = 2b \\ 4 + 2a - a^2 = 2a \end{cases}$，

解之得 $a = -2,\ b = -2$ (不合)

case 2. 當 $a < 1 < b$ 時，f 在 $[a,b]$ 上的最大值爲 $f(1) = 5$ 由已知 $5 = 2b$，$\therefore b = \frac{5}{2}$

$$f(b) = f(\frac{5}{2}) = 5 - (\frac{5}{2}-1)^2 = 5 - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} > 2 > 2a$$

故 f 之最小值發生於 $f(a) = 2a$

$4 + 2a - a^2 = 2a$，$\therefore a = \pm 2$ （取 $a = -2$）

故 $a = -2$，$b = \frac{5}{2}$

case 3. 當 $1 < a < b$ 時，f 在 $[a,b]$ 上遞減故最大值爲 $f(a) = 2b$，最小值爲 $f(b) = 2a$ 即

$\begin{cases} 4 + 2a - a^2 = 2b \\ 4 + 2b - b^2 = 2a \end{cases}$，

解之得 $a = 2,\ b = 2$ (不合)

解答爲：$a = -2$，$b = \frac{5}{2}$

【問題三】：

（1）根據題意

$$a_1\% = \frac{100 \cdot a_0\% + 25.40\%}{125} \Rightarrow a_1 = 16.$$

（2）根據題意

$$a_{n+1}\% = \frac{100 \cdot a_n\% + 25.40\%}{125} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + 8$$

（3）將 $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + 8$

整理成 $(a_{n+1} - 40) = \frac{4}{5}(a_n - 40).$

由此關係式得知，數列 $(a_n - 40)$ 是首項爲 $a_1 - 40 = 16 - 40 = -24$，公比 $\frac{4}{5}$ 的等比數列。

故 $a_n - 40 = (a_1 - 40)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

解得 $a_n = 40 + (a_1 - 40)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

二、第二區（花蓮區）複賽試題（二）

（一）$\frac{189}{18}$（或 $\frac{21}{2}$）。　（二）3。

（三）$\frac{17}{8}$ 或 -1。　（四）二時 0 分。

（五）5。　（六） 5。

貳、

一、第二區（台北區）複賽試題（一）

【問題一】：設正整數 n 滿足條件(1)、(2)且其質因數分解可表示爲 $p_n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}......p_k^{a_k}$ 其中 $1 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_k$ 且 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是

相異質數；則它的正因數共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)......(\alpha_k+1)$ 個。

由條件(1)，則只可能是(i) k=1 且 $\alpha_1=5$；或 (ii) k=2, $\alpha_1=1$ 且 $\alpha_2=2$。若是情況(i)，則 $n=p^5$；且由條件(2)可得

$1+p^5=5(p+p^2+p^3+p^4)=5p(1+p+p^2+p^3)$

此顯然不可能。若是情況(ii)，則 $n=pq^2$，其中 p、q 為相異質數。由條件(2)可得

$1+pq^2=5(p+q+pq+q^2)$；

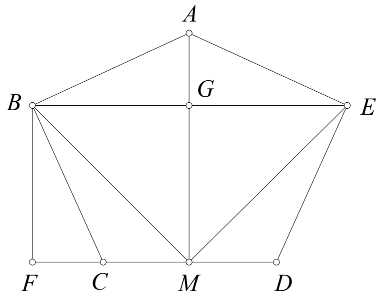
所以，

$$p=5+\frac{30q+24}{q^2-5q-5} \qquad \text{(a)}$$

因為 p 為正整數，所以 $30q+24\ge q^2-5q-5$。由此可得 $q\le 35$。滿足(a)且不大於 35 的質數 q 可使得 p 亦為質數的只有 $q=7$，而此時對應的 $p=31$。故，$n=31\cdot 7^2=1519$。

【問題二】：由於每個集合中的元素均相異，且每個集合中最大的數等於其餘各數之積，所以每個集合至少含有 3 個數，且每個集合中最小的數不大於 9，否則此集合中除了最大的數，其餘各數的積不小於 $10\times 11=110>100$，矛盾！因而集合的個數不大於 9。若存在 9 個滿足條件(1)、(2)的集合，則它們最小的元素分別為 1, 2, …, 9。考慮包含 1 的集合，則此集合至少還包含其他 3 個相異的數，所以此集合中第二小的數大於 9，因而會導致此集合中最大的數大於 100，矛盾！故，滿足條件(1)、(2)的集合至多有 8 個。事實上，{2, 17, 34}, {3, 16, 48}, {4, 15, 60}, {5, 14, 70}, {6, 13, 78}, {7, 12, 84}, {8, 11, 88}, {9, 10, 90}為 8 個滿足條件(1)、(2)的集合。

【問題三】：



(1) 在等腰三角形 $\triangle CDB$ 中，因為 $\angle CDB<\angle CMB=45^\circ$，所以 $\angle BCD>90^\circ$。於是，$\triangle CMB$(與 $\triangle DME$) 是鈍角三角形。依鈍角三角形的 SSA 全等定理，可知 $\triangle CMB\cong\triangle DME$，$\overline{MB}=\overline{ME}$。於是，$\triangle MBE$ 是直角等腰三角形，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 平行，$\overline{AM}$ 將 $\overline{BE}$ 垂直平分於 G。若 B 至直線 CD 的垂足為 F，則 $\overline{BF}=\overline{GM}=\overline{BG}$。依直角三角形的 SSA 全等定理，可知 $\triangle BCF\cong\triangle BAG$。於是，$\angle FBC=\angle ABG$，$\angle ABC=\angle FBG=90^\circ$。

(2)因為 $\angle BMC=45^\circ$，所以，在三角形 $\triangle BMC$ 中引用餘弦定律，得

$$\overline{BM}^2-2\overline{BM}\cdot\overline{CM}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\overline{CM}^2=\overline{BC}^2，$$

$$\overline{BM}^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}\cdot\overline{BM}-\frac{3}{4}\overline{AB}^2=0，$$

$$\overline{BM}=\frac{1}{4}(\sqrt{2}\pm\sqrt{14})\,\overline{AB}\text{（應取正號）。}$$

進一步得

$$\overline{CF}=\overline{FM}-\overline{CM}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BM}-\frac{1}{2}\overline{AB}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{4}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{7}-1}{4}\overline{AB},$$

$\overline{CF}:\overline{CM}=(\sqrt{7}-1):2$。

二、第二區（台北區）複賽試題（二）

（一）$72°$。（二）$\frac{2}{25}$。（三）25。

（四）$\frac{2}{3}a$ 或 $2a$（五）$\frac{12}{5}$（六）$a \geq \frac{-1}{4}$

（七）$\frac{1}{6!}$

參、

一、第四區（新竹區）複賽試題（一）

1.令 A' 爲 A (2,5) 對直線 $y=x$ 的對稱點，即 $A'=(5,2)$，則在直線 $y=x$ 上任意一點 P，恆有 $\overline{AP}=\overline{A'P}$，且 A' 恰好在直線 $2x-5y=0$ 上。若 Q 爲 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足，則 $\overline{AP}-\overline{PQ}=\overline{A'P}-\overline{PQ}=\overline{A'P}-\overline{PQ}\geqq 0$.
因此，使得 $\overline{AP}-\overline{PQ}=0$ 爲最小，此即 $A'=Q$。故 P 點爲直線 $5x+2y=29$ 與直線 $y=x$ 的交點。因此，可得 P 的坐標爲 $(\frac{29}{7},\frac{29}{7})$。

2.我們將證明所求的解爲 $(1, k)$, $(k, k+1)$, (k^2,k)，其中 k 爲任意的正整數。注意：
$\frac{a^2+b}{ab+1}\geqq 1$ 之充要條件爲 $(a-1)(a+1-b) \geqq 0$.

(i) 當 $a=1$ 時，b 可爲任意的正整數。經檢驗可知 $(a, b) = (1, k)$ 爲滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。

(ii) 當 $a\geqq 2$ 時，$1 \leqq b \leqq a+1$。若 $b=a+1$，則經檢驗可知 $(a, b)=(k, k+1)$ 爲滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。若 $1 \leqq b \leqq a$，令 $\frac{a^2+b}{ab+1}=m$，則

$a^2+b = (ab+1)m = abm+m$.

於是可得，$m \equiv b \pmod a$。故可令 $m=aq+b$，其中 q 爲一非負整數；亦即 $a^2+b=(ab+1)(aq+b)$。化簡可得 $a=abq+q+b^2$。因此，比較兩邊大小可知：$q=0$，且 $a=b^2$。經檢驗，$(a, b) = (k^2, k)$ 也是滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。

3.(a) 注意：$a_1, a_2, a_3,\cdots, a_{48}$ 中有 24 個偶數，每一偶數在計算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(48)$ 之和中各重複了 16 次，因此，
$f(1)+f(2)+\cdots+f(48)=24\cdot 16 = 384$.於是，由算幾不等式，可得

$$\prod_{n=1}^{48} f(n) \leq \left(\frac{1}{48}\sum_{n=1}^{48} f(n)\right)^{48} = \left(\frac{384}{48}\right)^{48} = 8^{48} = 2^{144}$$

(b)若每一個 $f(k) = 8$，則證畢；若有一個 $f(k) \neq 8$，則由(a)可知：必有一組 m, n 使 $f(m) < 8 < f(n)$。不失一般性，可設 $m < n$。注意：對每一 k，恆有 $|f(k+1)- f(k)| = 0$ 或 1。故必存在一 $k\in\{m+1, m+2,\cdots, n-1\}$ 使得 $f(k) = 8$。(此爲整數集上離散型的中間值定理)

二、第四區（新竹區）複賽試題（二）

(1) $\frac{18}{49}$ (2)26 (3) $\frac{5}{2}$

(4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (5)18 (6)131