臺北市九十二學年度高級中學數學及自然科能力競賽數學科複賽試題及參考解答

國立臺灣師範大學　數學系

《試題部分》

一、筆試（一）

【問題一】：已知一元二次方程式 $ax^2-2bx+2c=0$ 有兩個相異實根都介於 2 與 3 之間，又 $a>0$。試證下述兩個不等式成立：

(1) $b<c<\frac{3}{2}a+b$。(6 分)

(2) $\frac{3a}{4a+2c}+\frac{b}{2a+b}>\frac{c}{b+c}$。(6 分)

【問題二】：給定一銳角三角形△ABC，其中 $\angle A>45^\circ$、$\angle B>45^\circ$。設 $\overline{AM}$ 與 $\overline{BN}$ 分別表示△ABC 過頂點 A 與 B 的高，而 D 與 E 分別爲射線 $\overrightarrow{MA}$ 與 $\overrightarrow{NB}$ 上滿足 $\overline{MD}=\overline{MB}$ 與 $\overline{NE}=\overline{NA}$ 的兩點。試證：$\overline{DE}$ 與 $\overline{MN}$ 平行。(12 分)

【問題三】：試求出能使 n^4+4^n 爲質數的所有正整數 n。(12 分)

【問題四】：有多少個多項

$f(x)=x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$

同時滿足下面兩個條件？(13 分)

(1) a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7 是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ 中的七個相異元素；

(2) $f(x)$ 可被 x^3+x^2+x+1 整除。

二、筆試（二）

1. 對每個大於 1 的正整數 n，令

$T_n=1+2+3+\cdots+n$，

$P_n=\frac{T_2}{T_2-1}\times\frac{T_3}{T_3-1}\times\cdots\times\frac{T_n}{T_n-1}$，

則 $P_{2003}=$__(1)__。(以最簡分數表示)

2. 設正整數 m 與 n 滿足 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$。若 n 是奇數，則所有可能的正整數序對 (m,n) 爲__(2)__。

3. 已知拋物線 $y=x^2+3x-1$ 上有兩相異點對直線 $x+y=0$ 成對稱，則此兩相異點的坐標爲__(3)__。

4. 設 $f(x)$ 表示實數 x 的小數部分 (例如：$f(2.38)=0.38$，$f(5)=0$)，則

$f(\frac{4\times1}{2003})+f(\frac{4\times2}{2003})+f(\frac{4\times3}{2003})+\cdots+f(\frac{4\times2003}{2003})$

之值等於__(4)__。

5. 有一張邊長爲 6 公分的正三角形紙片 ABC，設 P 點在 $\overline{AB}$ 上而 Q 點在 $\overline{AC}$ 上。若將紙片 ABC 沿 $\overline{PQ}$ 對摺，恰好能使頂點 A 與 $\overline{BC}$ 的一個三等分點 A' 重合，則 $\overline{PQ}$ 的長爲__(5)__公分。

6. 在坐標平面上，令 S 表示集合 $\{(x,y)\mid x,y\in \boldsymbol{N},1\le x\le 4,1\le y\le 5\}$，則以集合 S 中的點做爲頂點的正方形共有__(6)__個。

7. 若 $\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{5x-6}=\sqrt[3]{2x-4}+\sqrt[3]{4x-5}$，則 x 的所有可能值爲__(7)__。

《參考解答》

一、筆試（一）

【問題一】:

證：設 $ax^2-2bx+2c=0$ 的兩個實根為 x_1 與 x_2。依假設，$2<x_1<3$，$2<x_2<3$。依根與係數的關係，可得

$$x_1+x_2=\frac{2b}{a}，x_1x_2=\frac{2c}{a}。$$

因為 $2<x_1<3, 2<x_2<3$ 且 $a>0$，所以，得；

$$c-b=\frac{a}{2}(x_1x_2-x_1-x_2)$$
$$=\frac{a}{2}[(x_1-1)(x_2-1)-1]>\frac{a}{2}(1\times1-1)=0$$
$$\frac{3a}{2}+b-c=\frac{a}{2}(3+x_1+x_2-x_1x_2)$$
$$=\frac{a}{2}[4-(x_1-1)(x_2-1)]>\frac{a}{2}(4-2\times2)=0$$

。由此可得

$$b<c<\frac{3}{2}a+b。$$

(2) 因為 $x_1>2, x_2>2$ 且 $a>0$，所以，得 $b>2a$。因為 $c>b$，所以，進一步得 $c>2a$。於是，可得

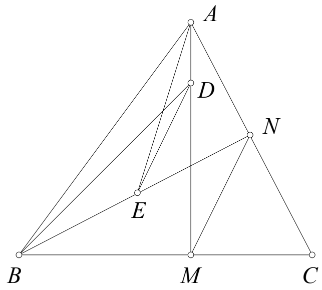
$$\frac{3a}{4a+2c}+\frac{b}{2a+b}>\frac{3a}{2b+2c}+\frac{b}{c+b}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}a+b}{b+c}>\frac{c}{b+c}。\|$$

【問題二】:

證：因為 $\angle A>45^\circ$、$\angle B>45^\circ$，所以點 D 與 E 都在 $\triangle ABC$ 內部。

因為 $\angle AMB=\angle ANB=90^\circ$，所以 A、B、M 與 N 共圓。於是，得

$$\angle MAN=\angle MBN，\quad \angle ABN=\angle AMN。$$



其次，因為

$$\angle DAE=\angle NAE-\angle NAD=\angle 45^\circ-\angle MAN$$
$$=\angle 45^\circ-\angle MBN=\angle MBD-\angle MBE=\angle DBE$$

，所以 A、B、E 與 D 共圓。於是，得 $\angle EDM=\angle ABE$。進一步得

$$\angle EDM=\angle ABE=\angle ABN=\angle AMN=\angle DMN$$

。由此可知 $\overline{DE}$ 與 $\overline{MN}$ 平行。 $\|$

【問題三】:

解：當 $n=1$時，$n^4+4^n=5$ 為質數 。

當 n 為偶數時，設 $n=2k$，其中 $k\in \boldsymbol{N}$，則 $n^4+4^n=16k^4+4^{2k}=16(k^4+16^{k-1})$。

此整數必是 16 的倍數，它不是質數。

當 n 為比 1 大的奇數時，設 $n=2k+1$，其中 $k\in \boldsymbol{N}$，則

$$n^4+4^n=(2k+1)^4+4^{2k+1}=(2k+1)^4+(2^{2k+1})^2$$
$$=[(2k+1)^2+2^{2k+1}]^2-2\cdot2^{2k+1}(2k+1)^2$$
$$=[(2k+1)^2+2^{2k+1}]^2-[2^{k+1}(2k+1)]^2$$
$$=[(2k+1)^2+2^{2k+1}+2^{k+1}(2k+1)]$$
$$\times[(2k+1)^2+2^{2k+1}-2^{k+1}(2k+1)]。$$

上式右端第一個因數顯然恆大於 1，只要證明第二個因數也恆大於 1，即可知 n^4+4^n 不是質數。依算幾不等式可知

$$(2k+1)^2+2^{2k+1}-2^{k+1}(2k+1)$$
$$\geq 2\sqrt{(2k+1)^2\times2^{2k+1}}-2^{k+1}(2k+1)$$
$$\geq 2^{k+1}(2k+1)\sqrt{2}-2^{k+1}(2k+1)$$

$= 2^{k+1}(2k+1)(\sqrt{2}-1)$

$\geq 4\cdot 3\cdot 0.4$

≥ 4 。

【問題四】:

解：將 $f(x)$ 除以 x^3+x^2+x+1，可得

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+x^2+x+1)[x^4+(a_1-1)x^3 \\ &\quad +(a_2-a_1)x^2+(a_3-a_2)x+(a_4-a_3+1)] \\ &\quad +(a_5-a_4+a_1-1)x^2+(a_6-a_4+a_2-1)x \\ &\quad +(a_7-a_4+a_3-1) \end{aligned}$$

。因爲 $f(x)$ 被 x^3+x^2+x+1 整除，所以，可得 $1+a_4=a_1+a_5=a_2+a_6=a_3+a_7$ 。

根據上述等式，我們必須從 $\{1,2,3,\cdots,10\}$ 中選出七個相異數，連同 1 共八個數，平分成四組，每一組的兩個數之和都相等，設和等於 k。因爲七個數相異，所以，a_1，a_2，a_3，a_5，a_6，a_7 等六個數都不等於 1。(例如：若 $a_1=1$，則 $a_4=a_5$ 。)

a_4 也不等於 1，否則 $1+a_4$ 比其他三組的和都小。由此可知：從 $\{1,2,3,\cdots,10\}$ 中選出的七個相異數不能含 1，因此其中的最大數至少爲 8，四組的共同和至少等於 9，亦即：$k=9$、10 或 11。

(i) 當 $k=9$ 時，$a_4=8$，而且另外三組數分別爲 $\{2,7\},\{3,6\}$ 與 $\{4,5\}$。其分配方法數共有 $6\times4\times2=48$ 種。(a_1 有 6 種選擇，a_2 有 4 種選擇，a_3 有 2 種選擇。)

(ii) 當 $k=10$ 時，$a_4=9$，而且另外三組數分別爲 $\{2,8\},\{3,7\}$ 與 $\{4,6\}$。其分配方法數共有 $6\times4\times2=48$ 種。(a_1 有 6 種選擇，a_2 有 4 種選擇，a_3 有 2 種選擇。)

(iii) 當 $k=11$ 時，$a_4=10$，而且另外三組數分別爲 $\{2,9\},\{3,8\},\{4,7\}$ 與 $\{5,6\}$ 中的三組。其分配方法數共有 $8\times6\times4=192$ 種。(a_1 有 8 種選擇，a_2 有 6 種選擇，a_3 有 4 種選擇。)

因此，所求的多項式

$f(x)=x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$

共有 $48+48+192=288$ 個。‖

二、筆試（二）

（1）$\dfrac{6009}{2005}$ 。

（2）$(588,49),(204,51),(76,57)$ 。

（3）$(1,3)$ 與 $(-3,-1)$ 。

（4）1001。

（5）$\dfrac{7\sqrt{21}}{10}$ 。

（6）30。

（7）$x=1$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$ 或 $x=\dfrac{3}{2}$ 。