中學生通訊解題第二十八期題目

參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
920901

在黑板上寫上連續自然數 1，2，3，…，9209。任意擦去兩個數字，並算出這兩個數字的和與差後，在黑板上寫上它們的和或差(例如：擦去的兩個數字爲 12 與 38，則寫上 50 或者 26)。重複這樣的步驟一直到在黑板上只留下一個數字爲止。證明：最後這個數字不可能是零。

參考解答一：

因爲：偶數±奇數必爲奇數，奇數個數無變化。奇數±奇數必爲偶數，奇數個數減少兩個。偶數±偶數必爲偶數，奇數個數無變化。所以，每次動作後，奇數的個數保持不變或減少兩個，而 1～9209 間有 4605 個奇數。奇數個數爲「奇數」，所以最後一個數必爲奇數，不會爲 0。

參考解答二：

(1) $1+2+3+\cdot\cdot\cdot+9209$

$=\frac{1}{2}\times(1+9209)\times9209=4605\times9209$

爲奇數。

(2) 因爲 $a+b=(a-b)+2b$，所以a－b的奇偶性與a＋b的奇偶性相同，因此只要考慮補上的數爲兩數的和即可。則最後剩下的數數必爲總和＝4605×9209 爲奇數，不會爲 0。

解題重點：

能找出題目中最後剩下的數的奇偶性的變化。

評析：

本題徵答人數共有 54 人，其中全對者共 21 人，平均得分爲 3.98。其中，答題優良或解法富參考價值者有台北市民生國中吳軒宇同學；興雅國中林昭平同學；敦化國中曾偉綸；建成國中江衡同學；東湖國中李光宇同學；台北縣江翠國中林志嘉同學、海山國中江俊緯同學；積穗國中蕭屹宏同學；；新竹市光華國中范祐維同學；彰化市陽明國中王建詒同學；台南市建興國中陳春琰同學等。

問題編號
920902

將一正方體的六面如同骰子編上 1、2、3、4、5、6 等六個號碼，並且在相對面上的數字之和等於 7。今有一含有 100×100 個方格的棋盤，方格的大小與正方體諸面的大小

皆相同。現將正方體放在棋盤最左下角的方格中開始滾動，每一次的滾動都以正方體的一條稜線爲軸，將正方體翻入右面或上面的方格（不得向下或向左）。在正方體翻動中，經過的每一方格都印上與它重合的正方體的那個面上所編的號碼。試問所有 100x100 個方格印出的數之和最大是多少？最小是多少？

參考解答一：

在正方體與方格的翻動中，若有兩次出現 a，則在其間必然也會出現一次（7－a）。數 a 與（7－a)若不是成對出現，則至多相差一次！既然由左下角至右上角共產生 199 個數，故最大值必是 98 對 a 與（7－a）再加 4＋5＋6 其值爲 98x7＋4＋5＋6＝701，同理最小值爲 98x7＋1＋2＋3＝692

參考解答二：

因爲骰子在任一個格子其相鄰的左右格子上的點數和都是 7，所以我設兩個方格的和爲 7 的那兩格爲「一對」，而不成一對者稱之爲「落單」。

因爲骰子只能向上或向右滾，所以在滾三格內不可以有重複的點數，所以最多只能三個落單。

而我們需要製造最多的落單，在其填上、、或、、3（、5 或、2），而造成最大值、最小值。

而 100x100 的棋盤有 100+100-1＝199 個格子，因爲有奇數格所以最多可以造 3 個落單，與 $\frac{(199-3)}{2}=98$（對），一對的和爲 7，

98x7＝686，686+6+5+4＝701（最大值），

686+1+2+3＝692（最小值）。

而我們求得公式：

當 1xn：我們以 $P_1(n)$ 表示最大值，以 $Q_1(n)$ 表示最小值

1.n=4k： $P_1(n)=Q_1(n)=\frac{7}{2}n$

2.n=4k+1： $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+6, Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+1$

3.n=4k+2： $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-2)+11, Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-2)+3$

4.n=4k+3： $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+6, Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+1$

當 2xn：

1.n=4k： $P_2(n)=\frac{7}{2}n+6, Q_2(n)=\frac{7}{2}n+1$

2.n=4k+1： $P_2(n)=\frac{7}{2}(n-1)+11, Q_2(n)=\frac{7}{2}(n-1)+3$

3.n=4k+2： $P_2(n)=\frac{7}{2}(n-2)+15, Q_2(n)=\frac{7}{2}(n-2)+6$

4.n=4k+3： $P_2(n)=\frac{7}{2}(n-1)+11, Q_2(n)=\frac{7}{2}(n-1)+3$

當在 mxn 的棋盤中，　時：

$$P_m(n)=\frac{7}{2}(n+m+\frac{(-1)^{m+n}-1}{2})+\frac{5-3(-1)^{m+n}}{2}$$

$$Q_m(n)=\frac{7}{2}(n+m+\frac{(-1)^{m+n}-1}{2})-6-2(-1)^{m+n}$$

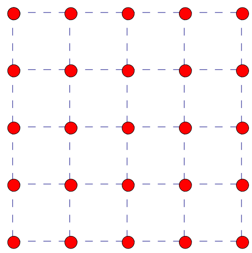
評析：

1. 本題之重點在於找出翻動的規則，即在兩次出現 a 的中間必然會出現一次(7-a)。若學生能發現此性質，自然就可解出本題。

實際上，本題之棋盤不見得要正方形，若是 m×n 的棋盤，則原題亦有相對應的答案，可推導出一固定公式！關於此推廣部分，本次答題者北市師大附中國中部 144 班翁鈺博同學及其學長 142 班黃上思同學給了一個完整的答案。

2. 本題共有 29 位同學答題，答對者 6 人，答案正確且給予詳細之探討者僅有師大附中翁鈺博同學。另北市興雅國中林昭平同學、新竹市光華國中范祐維同學及一無名氏則給予正確之答案。

問題編號 920903

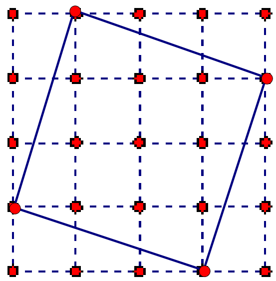


（1）如圖，一個 4x4 的方格中共有 25 個格子點，任意兩個格子點連成一條線段（排除水平與垂直的線段），請問這些斜的線段共可圍成多少個正方形？（正方形的頂點皆在格子點上）

（2）若是一個 9x9 的方格中共有 100 個格子點，任意兩個格子點連成一條線段（排除水平與垂直的線段），請問這些斜的線段共可圍成多少個正方形？（正方形的頂點皆在格子點上）

參考解答一：

符號說明：(1,3) 表示用「直行 1 格橫列 3 格」的直角三角形的斜邊當做正方形的一邊（如下圖所示），它與(3,1)有相同的圖形。



（1）

編號	邊長	數量
(1,1)	$\sqrt{2}$	9
(2,2)	$2\sqrt{2}$	1
(1,2)	$\sqrt{5}$	8
(1,3)	$\sqrt{10}$	2
合計		20

（2）

編號	邊長	數量	編號	邊長	數量	編號	邊長	數量
(1,1)	$\sqrt{2}$	64	(1,6)	$\sqrt{37}$	18	(3,4)	5	18
(2,2)	$2\sqrt{2}$	36	(1,7)	$5\sqrt{2}$	8	(3,5)	$\sqrt{34}$	8
(3,3)	$3\sqrt{2}$	16	(1,8)	$\sqrt{65}$	2	(3,6)	$3\sqrt{5}$	2
(4,4)	$4\sqrt{2}$	4	(2,3)	$\sqrt{13}$	50	(4,5)	$\sqrt{41}$	2
(1,2)	$\sqrt{5}$	98	(2,4)	$2\sqrt{5}$	32	合計		540
(1,3)	$\sqrt{10}$	72	(2,5)	$\sqrt{29}$	18			
(1,4)	$\sqrt{17}$	50	(2,6)	$2\sqrt{10}$	8			
(1,5)	$\sqrt{26}$	32	(2,7)	$\sqrt{53}$	2			

在 n×n 的方格中的正方形個數爲：

$$(n-1)^2+2\times(n-2)^2+3\times(n-3)^2+-----+(n-1)\times 1^2$$

其和爲：

$$S=(n-1)^2+2\times(n-2)^2+3\times(n-3)^2+-----+(n-1)\times 1^2$$
$$S=(n-1)+(n-2)\times 2^2+(n-3)\times 3^2+------+1\times(n-1)^2$$
$$2S=1\times n\times(n-1)+2\times n\times(n-2)+-----+n\times(n-1)$$
$$=n[n-1+2n-4+3n-9+------+n\times(n-1)-(n-1)^2]$$
$$=\frac{n^3(n-1)}{2}-n[1^2+2^2+----+(n-1)^2]$$
$$S=\frac{n^3(n-1)}{4}-\frac{n^2(n-1)(2n-1)}{12}$$

（台北縣江翠國中陳建彰同學提供）

評析：

這個題目大部分答對的同學都是一個一個算，只要有恆心與細心，再加上懂得分類來算，相信可以把這個題目答得非常好也有少數同學利用數列的求和求出每邊 n 格的正方形所形成斜正方形的個數，誠屬難得。

本題表現優異同學名單如下：基隆市銘傳國中：張世暉同學、台北縣江翠國中：陳建彰同學、鄭有博同學、李侑桂同學、林謙盈同學、呂亞軒同學、柯俊吉同學、黃逸鵬同學、李治揚同學、龍旻賢同學、黃子誠同學。台北市民生國中：宋亭熠同學、張又勻同學、楊傑超同學、陳麒安同學、陳怡廷同學、邱信淳同學、涂俊全同學。台北市興雅國中：林昭平同學。台北市師大附中：翁鈺博同學。台北縣積穗國中：蕭屹宏同學。台北市敦化國中：杜政儀同學。新竹縣光華國中：王銘鋒同學、范祐維同學。台北縣海山國中：江俊緯同學。台北市建成國中：江　衡同學。台北市東湖國中：李光宇同學。

問題編號
920904

大雄爲了參加基本學力測驗，擬定出一套數學的讀書計畫如下：

(í)考前 60 天開始，每天至少做 1 題，至多做 16 題；

(íí)若某一天做超過 9 題，則接下來的 4 天，每天至多做 7 題；

(ííí)若某一天做不到 7 題，則接下來的 3 天，每天至少做 9 題。

試問依此計畫(同時滿足(í)(íí)(ííí))，大雄在這 60 天內最多可做幾題數學？最少要做幾題數學？

參考解答一：

設U＝a1＋a2＋⋯＋a60 表示大雄這六十天內最多可做的數學題目數，其中ai爲第i天做的數學題目數。若有一i屬於{1，2，3，⋯，56}，使得ai＞9，則依條件（ii），$a_{i+1}\le 7$，$a_{i+2}\le 7$，$a_{i+3}\le 7$，$a_{i+4}\le 7$，於是$a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4}\le 16+7+7+7+7=44$。

但若取$U*=b_1+b_2+\cdots+b_{60}$，其中$b_i=b_{i+1}=b_{i+2}=b_{i+3}=b_{i+4}=9$，而其他的$b_j=a_j$，則U＜$U^*$，此與U的選取矛盾！因此，$a_i\le 9$，所有i＝1，2，3，⋯，56。

又$\max\{a_{57}+a_{58}+a_{59}+a_{60}\}=9\times 3+16=43$。

因此，所求的最大值S＝9×56＋43＝547。

另一方面，設$L=c_1+c_2+\cdots+c_{60}$表示大雄這六十天最少可做的數學題目數，其中c_i爲第i天做的數學題目數。若有一i屬於{1，2，3，⋯，57}，使得$a_i<7$，則依條件（iii），$c_{i+1}\ge 9$，$c_{i+2}\ge 9$，$c_{i+3}\ge 9$。於是，$c_i+c_{i+1}+c_{i+2}+c_{i+3}\ge 1+9+9+9=28$。但若取

$L^*=d_1+d_2+\cdots+d_{60}$，其中$d_i=d_{i+1}=d_{i+2}=d_{i+3}=7$，而其他的$d_j=c_j$，則$L\ge L^*$，　L由$L^*$

取代時，其值不會變大。故不失一般性，可令

$c_i \geq 7$，所有i＝1，2，3，⋯，57。又$\min\{a_{58}+a_{59}+a_{60}\}=7+7+1=15$。

因此，所求的最小值 L＝7x57＋15＝414。

解題重點：

必須同時滿足(i)(ii)(iii)三個條件，很多同學誤解題意，導致錯誤。

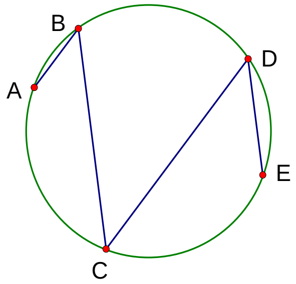
評析：

52 人作答，15 人答對。平均得分率 2.01 分。答對名單：

基隆銘傳國中許書穆、黃柏凱、王欲仁、王光仁、劉懿慧、連昶昶；北市民生國中吳軒宇、曾懷德；敦化國中林政儀；北縣江翠國中許廷瑋、黃逸鵬；北市延平國中黃善佑；北縣積穗國中蕭屹宏；新竹光華國中范祐維、無名氏。

問題編號 920905

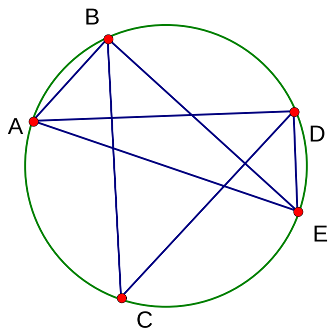
如圖 A,B,C,D,E 皆在圓上，∠ABC＝∠BCD＝∠CDE＝45°。



證明：$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DE}^2$

參考解答一：

連接$\overline{AE},\overline{AD},\overline{BE}$，∵ ∠ABC=∠BCD=∠CDE=45°，



AB 弧+BD 弧=AB 弧+AD 弧∴BC 弧=AD 弧，

$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}$，同理 BE 弧=CD 弧，$\therefore \overline{BE}=\overline{CD}$

∵AC 弧+CE 弧=180°，∴ $\overline{AE}$ 爲直徑

$\overline{AB}^2+\overline{BE}^2=\overline{AE}^2$，$\overline{DE}^2+\overline{AD}^2=\overline{AE}^2$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{BE}^2=\overline{DE}^2+\overline{AD}^2$

$\because \overline{AD}=\overline{BC}$，$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DE}^2$

（基隆市銘傳國中劉 俐同學提供）

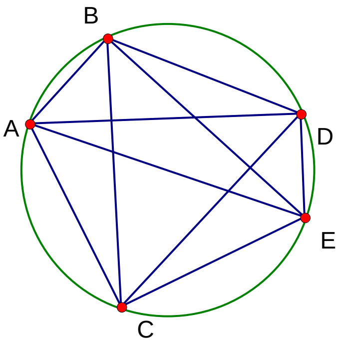
參考解答二：

1.連接$\overline{AE},\overline{BD},\overline{CE},\overline{AC},\overline{BE}$，

∵∠ABC=∠BCD=∠CDE=45°，

BC 弧=AC 弧=CE 弧=90°，∴ACE 弧=180°，

∴ $\overline{AE}$ 爲直徑



$\overline{CD}^2=\overline{FD}^2+\overline{FC}^2=2\overline{FD}^2$，$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=\overline{BD}^2$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=2\overline{BF}^2+2\overline{FD}^2=2\overline{BD}^2$

同理 $\overline{BC}^2+\overline{AD}^2=2\overline{BH}^2+2\overline{DH}^2=2\overline{BD}^2$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$

（台北市民生國中吳軒宇同學提供）

2.CE 弧=BD 弧=90°，

$\therefore \overline{BD}=\overline{CE}$

又∵ ∠BCD=∠CDE=45°，$\therefore \overline{BC}\,//\,\overline{DE}$，

∴四邊形 BDEC 爲等腰梯形，$\overline{BE}=\overline{CD}$

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2=\overline{AE}^2$

同理可證 $\overline{BC}^2+\overline{DE}^2=\overline{AE}^2$

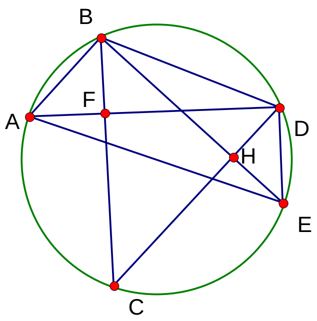
$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DE}^2$

（北縣江翠國中黃詩純同學提供）

參考解答三：

連接 $\overline{AE},\overline{AD},\overline{BD}$，因圓周角爲圓心角的一半，所以同弧所對的圓周角相等，∠ABC=∠BAD=∠BCD=∠CDE=∠CBE=∠FDC=∠DEB，

$\therefore \overline{AF}=\overline{BF}$、$\overline{FC}=\overline{FD}$、$\overline{BH}=\overline{CH}$、$\overline{DH}=\overline{EH}$



依照畢氏定理得到 $\overline{AB}^2=\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=2\overline{BF}^2$，

評析：

當初認爲國中課程對幾何的證明學得很少，於是出一些幾何證明題讓國中生有機會

學習如何去證明，也能夠訓練自己的邏輯思考與推理能力。非常驚訝的發現，這個題目有很多人用不同的方法來完成，且證明過程非常嚴密，這是非常難得的，可見孩子的創造力是要去發現的。

我們從多數同學使用的證明方法，提供下列三種不同的證明方法。但彰化縣陽明國中楊鎭宇同學、基隆市銘傳國中邱楹翔同學、台北縣江翠國中黃子誠同學、台北縣江翠國中柯俊吉同學、台北縣江翠國中李孟翰同學、台北縣江翠國中林怡嫺同學、台北縣江翠國中黃逸鵬同學、基隆市銘傳國中施又瑄同學、台北市建成國中江　衡同學、台北市延平完全中學黃善佑同學等又用了與下述三種不同的方法，真佩服他們的創造力與天才。另外台北縣永和國中李韋翰同學與一位未寫學校姓名的同學利用高中數學三角函數中的餘弦定理來證明，佩服這兩位同學的學識淵博，但其實我們所出的題目用國中所學過的觀念來做即可。

最後提醒同學做證明題實際得畫圖在證明過程的旁邊，這樣閱卷者才能完全看懂你的想法。