

垂直平分器

許建銘

高雄市立龍華國民中學

壹、摘要：

政府實施九年一貫課程改革以來，教科書出版業者紛紛推出各式符合能力指標的數學教材。而許多編著者爲了配合 S-3-10「能透過實測辨識三角形、四邊形、圓的性質」的能力指標，於是在國一課程中規劃「能察覺三角形的三邊中垂線會交於一點」的摺紙活動，同時也爲解決鈍角三角形三邊中垂線在摺紙時衍生的「一點問題」，有的教科書還將三角形畫在透明片上。但是透明片並不是那麼容易摺疊，反而讓學生心生疑惑：「爲什麼不畫在紙上？」

爲了解答這個問題，也爲了解決分角線與中垂線在實際作圖時碰到的難題：如被作圖物不一定可摺疊，圓規不一定好操作甚至會刺傷被作圖物等問題，遂讓筆者興起創作「垂直平分器」的念頭，並依此爲主題完成這份強調「啓發創造」的教案。

貳、設計理念：

本文所指的「垂直平分器」是由筆者自行設計的簡易作圖儀器【詳見本期月刊封底之圖(一)】，它可以輕易解決任意一個角的分角線與任一線段的中垂線作圖問題

【詳見本期月刊封底之圖(二)、(三)】，而且較不會受到被作圖物的自身材質與周遭環境的影響。

- 一、兩節課的課程規劃先以漫畫情節裡的真實問題開啓序幕，在謀求解決之道的動機驅使下，適時融入有條不紊的實作與知識建構的活動，並逐步引入「小兵立大功」的「垂直平分器」。讓學生能夠清楚瞭解整個教學活動設計的輪廓和方向，也對包含摺紙與操作垂直平分器的學習歷程，留下深刻印象。
- 二、教材編寫力求文字表達淺顯流暢，在分角線與中垂線的作圖步驟上，呈現「圖文並茂」的對照說明，讓每一位學生好學易懂而不輕易放棄。期望這份教材，對於國一學生日後研習國中幾何課程的局部推理與尺規作圖，除了可以奠立踏實的基礎知識外，也能夠產生更主動積極的學習意願。

參、教學目標：

- 一、知道等腰三角形頂角的平分線即爲底邊的中垂線，也是該等腰三角形的對稱軸。
- 二、知道同一平面上兩個等底的等腰三角

形，若將它們的底邊靠緊密合，則兩個在底邊兩側的頂角的頂點連線，就是兩個等腰三角形的頂角平分線，也是底邊的中垂線。

三、知道如何使用垂直平分器作出一個角的分角線與一線段的中垂線，並瞭解其中的作圖原理。

四、藉由摺紙與垂直平分器的作圖活動，發現任意一個三角形的三內角平分線會交於同一點，並知道此點稱為此三角形的內心；也發現任意一個三角形的三邊中垂線會交於同一點，並知道此點稱為此三角形的外心。

參、教學對象：

國一(七年段)的常態班學生，先備經驗：

- 一、瞭解相反數、三角形、分角線、中點和中垂線的意義。
- 二、瞭解平面圖形線對稱與鏡射的意義。
- 三、具備等量加法的基本概念。

肆、能力指標：

- 一、S-3-10：能透過實測辨識三角形、四邊形、圓的性質。
- 二、S-3-11：能操作圖形之間的轉換組合。
- 三、C-S-5：瞭解一數學問題可有不同的解法，並能嘗試不同的解法。
- 四、C-C-8：能尊重他人解決問題的多元想法。
- 五、C-E-2：能由解題的結果重新審視情境，提出新的觀點或問題。

伍、教學時間：

兩節課(90 分鐘)。

陸、教學重點及教學流程：

一、教學重點：

(一)第一節：

- 1.知道等腰三角形頂角的平分線即為底邊的中垂線，也是該等腰三角形的對稱軸。
- 2.瞭解兩個等底的等腰三角形，若將它們的底邊靠緊密合，則兩個在底邊兩側的頂角的頂點連線，就是兩個等腰三角形的頂角平分線，也是底邊的中垂線。
- 3.瞭解如何使用垂直平分器作出一個角的分角線與一線段的中垂線，並瞭解其中的作圖原理。
- 4.透過摺紙活動，發現任一個三角形的三內角平分線會交於三角形內部的同一點，並知道此點稱為此三角形的內心。

(二)第二節：

- 1.透過摺紙活動，發現任一個三角形的三邊中垂線會交於同一點，並知道此點稱為此三角形的外心，而且察覺外心隨著三角形的形狀不同，共有三種不同的相關位置。
- 2.瞭解如何應用垂直平分器作一個角的分角線與一線段的中垂線，而且知道還有不同的操作方法(見「家庭作業」之問題二、四)。
- 3.利用垂直平分器作出一個三角形的三內角平分線與三邊中垂線，並發現三內角平分線會交於同一點，而且三邊中垂線也會交於同一點。

二、自編學習教材乙份【見下兩頁起之內容】。

三、配合自編教材，規劃教學活動與流程【受限篇幅因素而未刊出】。

柒、評量方法：

一、教學活動中配合教材讓學生「動動腦」和「隨堂練習」，並鼓勵學生親自動手做與發表看法。

二、規劃兩人協同解題(如教學活動二之8的教學安排)，可藉此評量學生順應時勢與互助合作的能力，也讓學生瞭解講究團隊與創意的時代，一個人做不好的事，如果經由兩人以上集思廣益、群策群力，可能就會順利達成目的。

三、設計銜接上課學習內容與啓發學生靈活思考的「家庭作業」，讓學生經由作業練習，瞭解如何運用垂直平分器解決漫畫中的作圖問題，也能夠充分思考分角線與中垂線的不同作圖法，相信配合教師的逐題解答，學生更能體會「學以致用」及「一題多解」的意義。

四、根據教學目標，設計並實施「自我評量」，評量向度兼顧觀念思考與實作能力的表現，並藉此檢視教學成效。

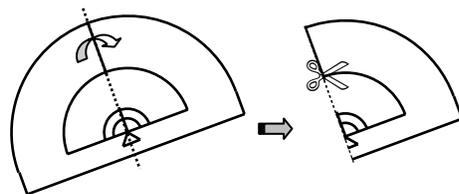
捌、教學前準備與教具之使用：

一、教師準備每位學生教材乙份(含「家庭作業」與「自我評量卷」)，並於上課前二至三天將教材發給每位學生(不含

「家庭作業」與「自我評量卷」)，鼓勵學生做課前預習。

二、教師請學生在課前必須將教材之附件(一)、(二)、(三)事好剪好。

三、教師將「垂直平分器」的圖形【如本期月刊封底之圖(一)】影印成投影片並護貝，然後發給每位學生一人一份，並請學生在課前先剪好成品，並妥善保管，上課時連同教材、直尺及其它剪好的附件一起帶進教室。【這是因為市面上無「垂直平分器」的權宜之計。教師務必提醒學生謹慎剪裁，要注意安全並力求成品完整，剪裁以保留黑線為原則，三角窗可用直尺和美工刀切除，扇面窗可先以美工刀挖出一個較大內洞，再以小剪刀慢慢修剪弧線，而避免從儀器中心線對摺疊合後剪除(如下圖示)，如此會造成儀器板不平整。】



四、教師上課時要攜帶大型三角板與圓規教具，方便在黑板上畫圖。

五、教師課前以一張壁報紙繪製如自編教材活動二之方格圖。

六、教師課前影印放大附件(一)、(三)的三角形圖形紙，並摺畫出附件(三)的三個三角形的三邊中垂線(必須讓教室後排與兩側的學生能清楚看到摺痕線)。

- 七、教師課前剪張較大三角形紙，並摺畫出三個內角的分角線摺痕。
- 八、教師課前影印放大附件(二)的圖形紙各兩份，紙背黏貼磁鐵片，並準備幾根磁鐵條，作為演示教學活動二之 8：兩個等底的等腰三角形，若將它們的底邊靠緊密合，則兩個在底邊兩側的頂角的頂點連線，就是兩個等腰三角形的頂角平分線，也是底邊的中垂線。
- 九、教師課前準備要發給每位學生的一張白紙(可從 A4 紙張的長邊一分為二)。
- 十、教師課前以較厚的紙板製成一個較大型的「垂直平分器」(也可以改變現有的量角器教具)，這個教具可以用來示範及輔助解說作圖步驟。

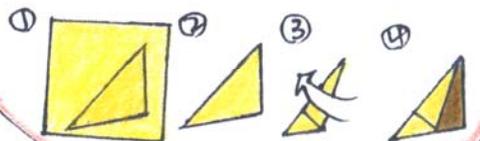
※【下起內容依次為「自編學習教材」、「家庭作業」、「自我評量卷」。】

垂直平分器





有了！你先將①紙板描在一般的紙張上 ②從紙張上剪下三角形 ③利用摺紙的技巧，對摺出一半度數 ④拿著這張摺過的紙，放到厚紙板上，問題就可以解決了。



小芳這招「移花接木」，還真是不錯的方法！

爸爸

可是……這種「一波四折」的辦法，準確度好像不怎麼好呢！

爸爸，你看哥哥真是愛挑剔！

受不了!!

小芳，你不必生氣，哥哥講的話也是有點道理喔！有時候角度差一點點，畫出來的圖形可能會差很多，就讓我們一起想想其它的辦法吧！

怎麼解決前兩頁漫畫當中的分角線作圖問題呢？只要同學配合以下的內容認真學習，很快就可以找到答案了。

首先，讓我們復習幾個以前學過的觀念：

- (1) 將一個角分成兩個相等角度的直線，稱作這個角的角平分線或分角線。
- (2) 如果一條直線，經過一線段的中點，而且和這條線段垂直，我們稱這條直線為此線段的垂直平分線或中垂線。
- (3) 一個線對稱圖形的對稱軸，是此圖形兩個對稱點連線的中垂線。

活動一：

1. 從附件(一)剪下任一個等腰三角形，然後摺出它的頂角平分線，並把此摺痕用筆畫出來，再檢查此摺痕線與底邊有何關係？
2. 從附件(一)剪下任一個不是等腰的三角形，然後摺出其中一個內角的分角線，並把此摺痕用筆畫出來，再檢查此摺痕線與此角的對邊有何關係？

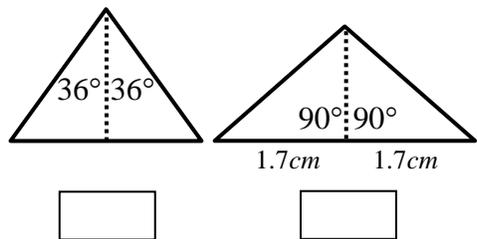
由活動一，我們可以知道：一個等腰三角形，它的頂角平分線會垂直平分底邊。也就是說：一個等腰三角形的頂角平

分線，就是其底邊的中垂線，而且也是該等腰三角形的對稱軸。

但是一個不是等腰的三角形，它的任何一個內角的分角線，並不會是這個角的對邊中垂線。

動動腦

1. 以下兩個等腰三角形中，都有一條點狀的虛線段，你認為它是該三角形的對稱軸的話，請在圖形下方的空格內打✓。

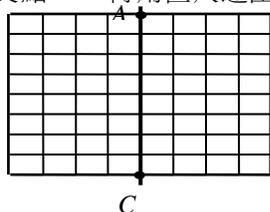


2. 一個等腰三角形，若從對稱軸切開，可以將它分割成兩個形狀與大小皆相同的三角形。

由以上的討論中，我們發現運用摺紙的技巧，可以很快找出等腰三角形的對稱軸。但是，除了摺紙以外，難到沒有其它方法可以作出等腰三角形的對稱軸嗎？

活動二：

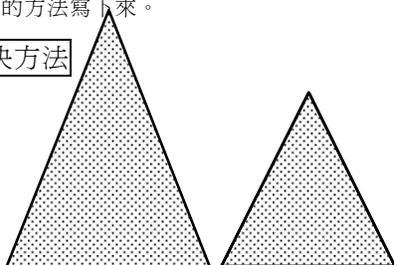
- 請在下圖線段 AC 的左側，先任取一條縱線與一條橫線的交點 B ，再用直尺連出線段 AB 和 BC 。



- 以線段 AC 為對稱軸，作線段 AB 與線段 BC 的鏡射圖形。
- 以直尺連出 B 點與其對稱點 D 的線段 BD 。

- 你認為線段 AC 是 $\angle BAD$ 與 $\angle BCD$ 的分角線嗎？為什麼？
- 你認為線段 AC 是線段 BD 的中垂線嗎？為什麼？
- $\triangle BAD$ 與 $\triangle BCD$ 為何種三角形？這兩個三角形共用相同的 BD 邊，它稱為 $\triangle BAD$ 與 $\triangle BCD$ 的什麼邊？
- 將附件(二)中的兩個等腰三角形剪下，假設僅能用筆和直尺的邊緣畫直線，請畫出這兩個等腰三角形的對稱軸。
- 如果你認為解決第 7 題有困難，可以找一位同學合作，共同討論解決的辦法，並將你們想出來的方法寫下來。

解決方法



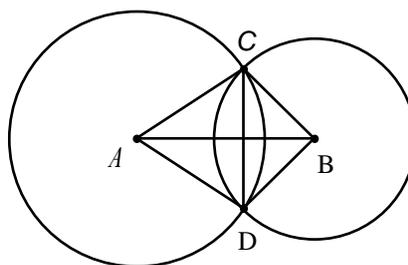
由活動二中我們知道，如果依照下面的步驟操作，將可作出等腰三角形的對稱軸：

- 將底邊等長(或稱等底)的兩個等腰三角形，底邊靠緊密合後，放在同一個平面上。
- 以筆和直尺，將兩個等腰三角形頂角的頂點相連。
- 兩個頂點所連出的線段，即為兩個等腰三角形的對稱軸。

動動腦

右圖中的圓 A 和圓 B 相交於 C 、 D 兩點，請問：

- \overline{AB} 是否為 $\angle DAC$ 的分角線？
- \overline{AB} 是否為 $\angle DBC$ 的分角線？
- \overline{AB} 是否為 \overline{CD} 的中垂線？



活動進行至此，我們想問：到底之前漫畫中，阿福哥的問題能不能夠得到解決？「垂直平分器」正是由阿福哥的爸爸以「活動二」的結論，設計出來解決這個問題的作圖工具。

現在就讓我們先來看看，這個看似量角器的東西，到底有什麼特別

之處【封底圖(一)】。原來它是由量角器與刻度尺組合而成的，而且儀器表面在「中心線」兩側有正負兩種度量數據，另外還有兩個鏤空的部分(圖中粉紅色的部分)：其中較大鏤空的「扇面窗」，可以使這個工具畫出三種不同半徑的弧；至於較小鏤空的「三角窗」，可讓使用者利用此三角形正上方的頂點(我們將它取名為「心眼」)將儀器上的弧心對準已知點，或者可以輕易點出儀器上幾個弧的圓心。

※如何使用垂直平分器作 $\angle BAC$ 的分角線：【封底圖(二)】

步驟(一)：將儀器三角窗上的心眼與 A 點重合，再畫出一適當的弧與 $\angle BAC$ 的兩邊交於 P 、 Q 兩點。

步驟(二)：改變儀器位置，使某一弧恰過 P 、 Q 兩點，再點出三角窗心眼上的點 R 。

步驟(三)：以儀器上的直尺，畫出直線 AR ，則 \overline{AR} 就是 $\angle BAC$ 的分角線。

※如何使用垂直平分器作 \overline{AB} 的中垂線：【封底圖(三)】

步驟(一)：調整儀器位置，使某一弧恰過 A 、 B 兩點，並點出三角窗心眼上的點 P 。

步驟(二)：改變儀器位置，使另一弧恰過 A 、 B 兩點，再點出三角窗心眼上的點 Q 。

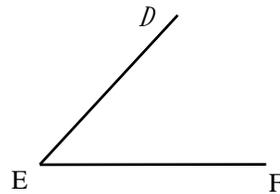
步驟(三)：以儀器上的直尺，畫出直

線 PQ ，則 \overline{PQ} 就是 \overline{AB} 的中垂線。

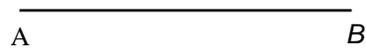
不知道同學從以上的操作過程中，是否察覺到：在垂直平分器的同一弧上取不同的兩點，再由心眼點出此時的圓心，則此三點恰可連成一個等腰三角形。而分角線與中垂線作圖原理，就是應用活動二的結論，即任何兩個等底的等腰三角形，若將它們的底邊靠緊密合，再把頂角的頂點相連成一直線，則此直線就是等腰三角形的頂角平分線，也是底邊的中垂線。

隨堂練習

1. 請利用垂直平分器作出 $\angle DEF$ 的分角線？



2. 請利用垂直平分器作出 \overline{AB} 的中垂線？



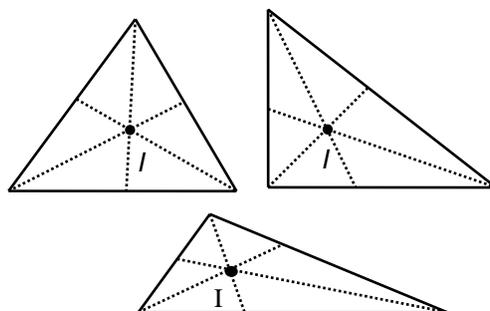
3. 請利用垂直平分器上的刻度，檢驗第 1 與第 2 兩題的作圖精確性為何？

我們接著透過實際的一些操作活動，看看如果作出任意一個三角形三個內角的分角線，或者作出任意一個三角形三個邊的中垂線，結果會有什麼有趣的發現？

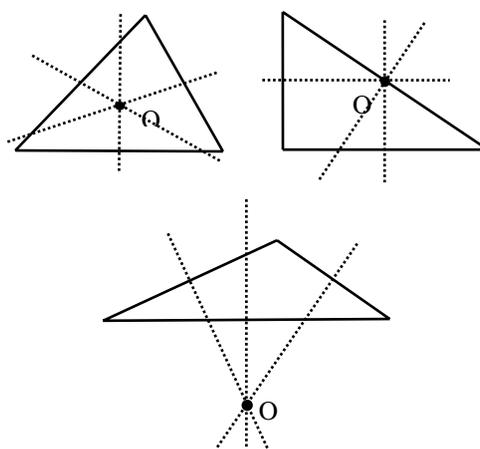
活動三：

- 1.請在一張紙上，以直尺畫出任意一個三角形，然後將它剪下來。再以摺紙的方式，摺出此三角形的三個內角平分線的摺痕，打開紙後，用筆和尺畫出這三條分角線摺痕。
- 2.請觀察這三條分角線是否會交於同一點？如果「是」，那麼交點是在三角形內部嗎？
- 3.附件(三)中有三個三角形(由上而下分別是銳角、直角與鈍角三角形)，

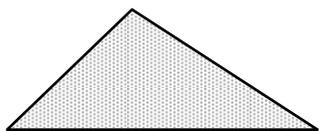
為此三角形的內心。而且正如下圖所示，任何角度的三角形，它的內心位置一定在該三角形的內部。



此外我們也知道，任何三角形的三邊的中垂線會交於同一點，這個點稱爲此三角形的外心。但是正如下圖所示，銳角三角形的外心位置在該三角形內部，直角三角形的外心位置在該三角形的邊上，而鈍角三角形的外心位置在該三角形的外部。



- 4.請觀察每個三角形各邊的三條中垂線是否會交於同一點？如果「是」，那麼這個交點是在三角形的內部嗎？
- 5.你認爲第 3 題中，以摺紙的方式摺出一個三角形的三邊中垂線，操作時有沒有不方便的地方？
- 6.用摺紙的方式摺出一個三角形的三邊中垂線，藉以觀察三條中垂線的交點關係時，爲什麼不直接剪下三角形，再摺出三邊的中垂線呢？
- 7.有沒有什麼方法，讓我們不必摺紙或剪紙，就可以作出下圖鈍角三角形的三邊中垂線，並觀察到三條中垂線的交點位置？



重點整理

- 一、等腰三角形的頂角平分線就是底邊的中垂線，也是對稱軸。
- 二、沿一個等腰三角形的對稱軸切開，可以分成兩個形狀與大小相同的直角三角形。

由活動三我們可以知道，任何三角形的三內角平分線會交於同一點，這個點稱

三、將兩個等底的等腰三角形的底邊靠緊密合後，放在同一平面上，再把頂角的頂點連成一直線，則此直線便是等腰三角形的頂角平分線，也是底邊的中垂線。

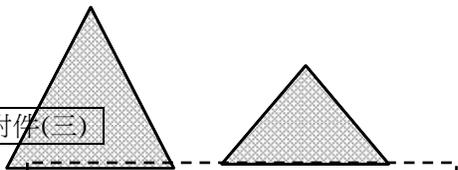
四、一個圓的圓心與圓周上任兩點，此三點恰可連成等腰三角形。

五、認識垂直平分器的基本構造，並瞭解分角線和中垂線的作圖方法與原理。

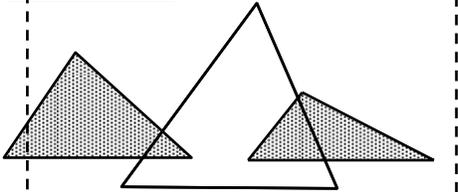
六、任何三角形的三內角平分線會交於同一點，此點稱為此三角形的內心，其位置一定在該三角形的內部。

七、任何三角形的三邊中垂線會交於同一點，此點稱為此三角形的外心。銳角三角形的外心位置在該三角形的內部，直角三角形的外心位置在該三角形的邊上，而鈍角三角形的外心位置在該三角形的外部。

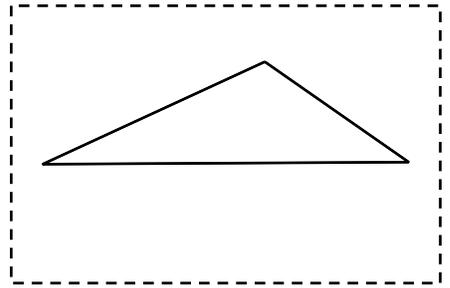
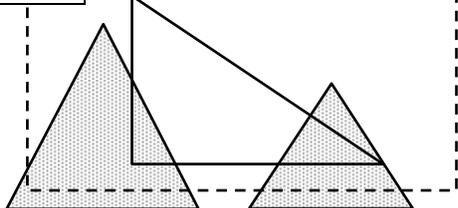
附件(一)



附件(三)



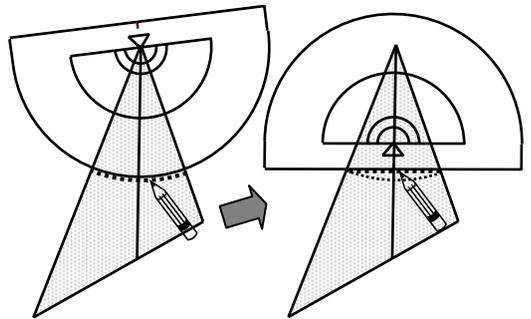
附件(二)



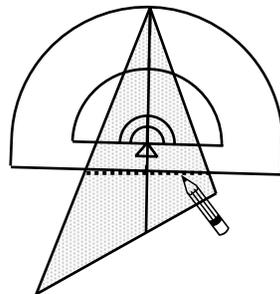
家庭作業

一、阿福哥的爸爸設計「垂直平分器」解決了分角線的作圖問題。接著我們看阿福和小芳，如何運用「垂直平分器」作出兩個形狀和大小都相同的直角三角形。你認為誰的作法正確？：_____。(以筆畫出的虛線弧和線)

(一)阿福的作法：



(二)小芳的作法：

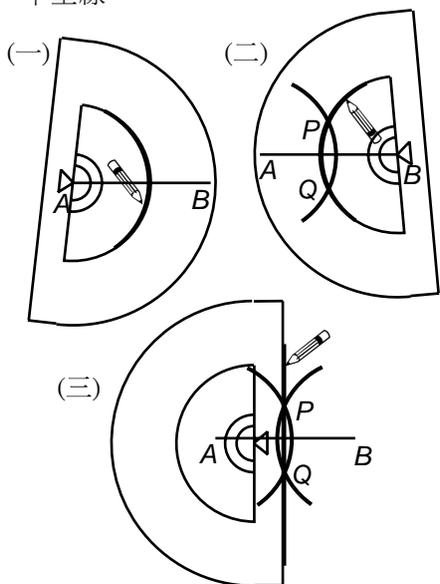


二、如果以如下的步驟，作 \overline{AB} 的中垂線，你認為對嗎？理由是什麼？

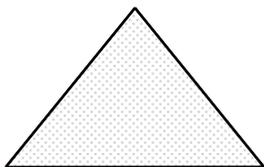
步驟(一)將垂直平分器三角窗上的心眼與 A 點重合，再畫出一適當長的弧(此弧的半徑必須超過 \overline{AB} 長的一半)。

步驟(二)改變垂直平分器的位置，使三角窗的心眼與 B 點重合，再畫出與步驟(一)等半徑的另一弧。(假設以上兩步驟所畫的兩弧的交點為 P 與 Q 點)

步驟(三)以垂直平分器上的直尺邊緣，畫出 \overline{PQ} ，則 \overline{PQ} 就是 \overline{AB} 的中垂線。

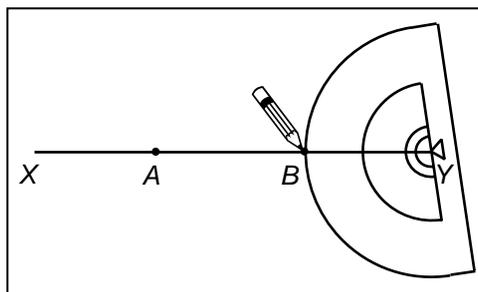
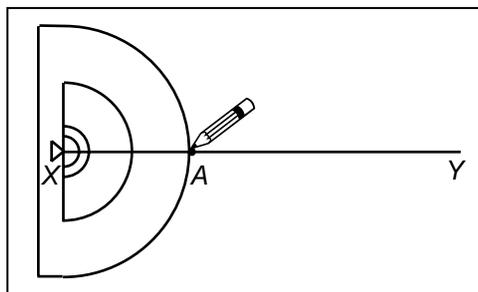


三、請利用垂直平分器，作出下圖中等腰三角形的底邊中垂線。



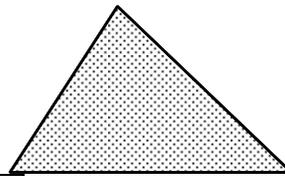
四、某人以如下的操作圖示，在一個較長線段 \overline{XY} 上依序取出 A 和 B 兩點。他說只要再作出 \overline{AB} 的中點，此點就是

\overline{XY} 的中點。你認為他說的話是對還是錯？請說明理由。



理由說明：

五、請利用垂直平分器找出下圖三角形的內心。



自我評量卷

一、如下圖示：將一張等腰三角形的紙，沿著 $\angle A$ 的分角線對摺後再打開的過程。請在以下空格內填入正確的答案：

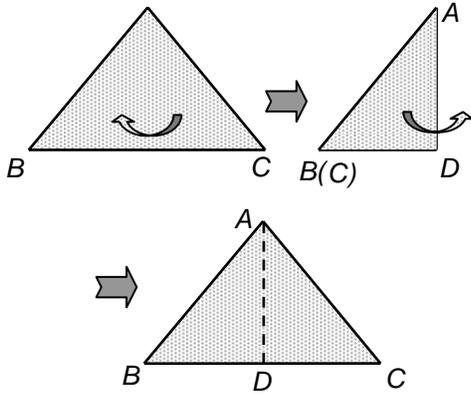
(一) $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(填入哪一個角)

(二) $\angle BAD = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(填入哪一個角)

(三) \overline{AD} 為 \overline{BC} 的 線。

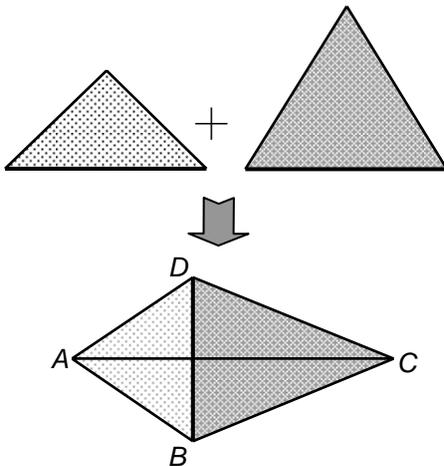
(四) $\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(填入哪一個線段)

(五) $\triangle ADB$ 與 $\triangle ADC$ 皆為_____三
角形，兩者的形狀和大小是否相
同？



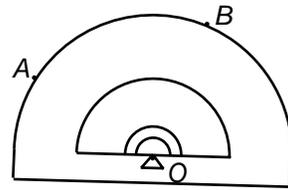
二、如下圖示：將兩個等底的等腰三角形的
底邊密合，再將兩個等腰三角形頂
角的頂點相連。請在以下空格內填入
正確的答案：

- (一) _____ 是 _____ 的中垂
線。(各填入哪一個線段)
(二) \overline{AC} 是否平分 $\angle BAD$? _____。
(三) \overline{AC} 是否平分 $\angle BCD$? _____。

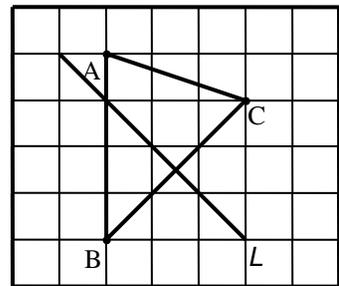


三、在垂直平分器最外圈的弧線上取 A 和 B
兩點，並由心眼點出弧心 O 點。(如下
圖)

- (一)請以筆和直尺，連出 \overline{OA} 、 \overline{OB} 和
 \overline{AB} 。
(二)你認為 $\triangle OAB$ 是何種三角形？為
什麼？
(三)請用自己的垂直平分器作出
 $\angle AOB$ 的分角線。

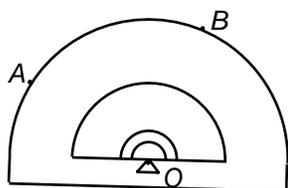


四、(一)下圖的方格紙上有一個 $\triangle ABC$ ，其
中直線 L 為 \overline{BC} 的中垂線，請你畫
出 \overline{AB} 的中垂線。
(二)假設 \overline{AB} 的中垂線與直線 L 相交於
 O 點。你認為 \overline{AC} 的中垂線也會通
過 O 點嗎？為什麼？(可以不用畫
 \overline{AC} 的中垂線)



什麼？

- (三)請用自己的垂直平分器作出 $\angle AOB$ 的分角線。



- 四、(一)下圖的方格紙上有一個 $\triangle ABC$ ，其中直線 L 為 \overline{BC} 的中垂線，請你畫出 \overline{AB} 的中垂線。

- (二)假設 \overline{AB} 的中垂線與直線 L 相交於 O 點。你認為 \overline{AC} 的中垂線也會通過 O 點嗎？為什麼？(可以不用畫 \overline{AC} 的中垂線)

