

第三十四屆國際物理奧林匹亞競賽理論競賽

林明瑞

國立臺灣師範大學 物理系

請先讀下文：

1. 本理論題共三大題，考試時間五小時。這三大題的配分如下：

第一題 12 分，第二題 10 分，第三題 8 分。

2. 只能用背袋中所提供的筆書寫。

3. 只能在所給紙張的正面作答。有 \times 號的那一面，不准使用。

4. 每一大題開始作答時，必須另起新頁。

5. 每一大題除了有一些「空白頁」(blank sheet)供你書寫外，另有一份「答案紙(Answer Sheet)」，你必須將該大題的結果摘要寫在上面。數值結果必須以與已知數據相稱的最多位數的有效數字表示；不要忘了寫上單位。

6. 在「空白頁」(blank sheet)上寫出任何你認為是回答問題時所必需、且希望被評閱納入計分的資料，但你必須以使用方程式、數字、符號、和圖形為主，文字的說明盡可能少用。

7. 在每一張用過的紙的上方處，你絕對必須在“Country”格內寫上你的國名，在“Student No.”格內寫上你的學生編號。另外，在每一題所使用的「空白頁」(blank sheet)上，你應該在“Question No.”格內寫上該題號碼，在“Page No.”格內寫上頁碼，在“Total No. of Pages”格寫上你所使用過、並希望被計分的空白頁的總頁數。

回答每一小題時，在起始處宜寫出該小題的編號。在你不希望被評分的答案紙上，畫上一個大 \times 符號，且不要編頁碼。

8. 當你作答完畢時，將每一題所有的紙張，按下列順序安排：「答案紙」居先，然後是「用過的紙(按照頁碼順序)」，接著是「不要被評分的紙」，最後是「未曾使用的紙」與印有題目的「試題卷」。把屬於每一題的紙張，依照題號及頁數順序放置，以大會提供的長尾夾子夾好，並將所有的東西留在桌子上。任何紙張一律不准帶出室外。

理論第一題

「一個連有落體的擺」

一架高之水平圓柱剛體，其橫截面的半徑為 R 。如圖 1a 所示，將一質量為 m 的擺錘，以一條長度為 L 、質量可忽略的細繩，懸吊於圓柱體頂端的 A 點。最初拉住擺錘，使細繩張緊，其懸空部分成為水平，然後放開擺錘，使其由靜止狀態開始掉落。細繩的任何伸縮，均可忽略。假設擺錘可視為質點，且只在垂直於圓柱體中心軸的平面內擺動。因此，擺錘有時亦逕以「質點」稱之。重力加速度為 g 。

如圖 1a 所示，以 O 為坐標原點。當質點位於 P 點時，細繩與圓柱體表面相切於繩離開表面的 Q 點，由 Q 到 P 的線段長度，以

s 表示。在 Q 點處沿切線方向的單位向量為 \hat{t} ，而沿半徑方向的單位向量為 \hat{r} 。取沿 OA 鉛直向上的直線為 x 軸，當 OA 沿逆時鐘方向轉至 OQ 時，其角位移 q 為正值。

當時，線段長 s 等於 L ，而質點的重力

位能 U 設為零。由於質點的運動， q 與對時間的瞬時變化率分別為 \dot{q} 與 \ddot{q} 。

除非另外標明，以下問題中所討論的速率與速度都是相對於固定點 O 。

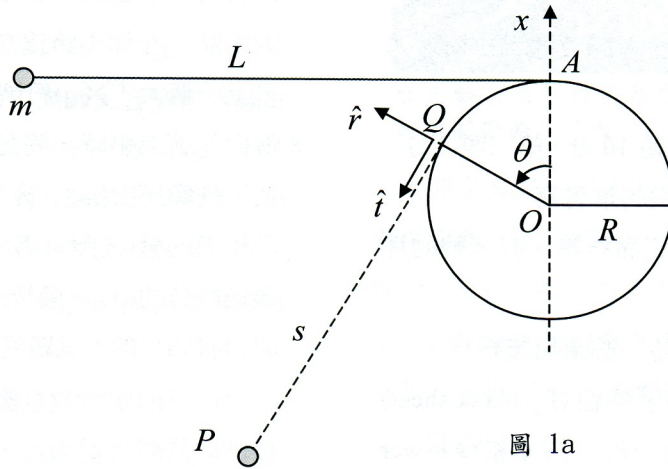


圖 1a

A 部分

在 A 部分中，只考慮細繩處於張緊狀態下的質點運動。試利用以上所給之量，求出：

(a) $\dot{\theta}$ 與 \dot{s} 間的關係。 [0.5 分]

(b) Q 相對於 O 的速度。 [0.5 分]

(c) 在 P 點時，質點相對於 Q 的速度。 [0.7 分]

(d) 在 P 點時，質點相對於 O 的速度。 [0.7 分]

分]

(e) 在 P 點時，質點相對於 O 的加速度在 x 方向的分量。 [0.7 分]

(f) 在 P 點時，質點的重力位能 U 。 [0.5 分]

(g) 質點在軌跡線最低點時的速率。 [0.7 分]

B 部分

在 B 部分中， L 與 R 的比值如下：

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

(h) 由 Q 到 P 的連線為直線，且長度為最短時，質點的速率為何？（以 g 與 R 表示）

[2.4 分]

(i) 質點擺動到圓柱體的另一側、且到達最高點時，其速率為何？（以 g 與 R 表示）

[1.9 分]

C 部分

在 C 部分中，質量為 m 的擺錘並非懸吊於 A 點，而是以細繩繞過圓柱體的頂端，在另一側與一個質量為 M 的較重物體相連，如圖 1b 所示。此重物亦可視為質點。

最初，拉住擺錘使其保持靜止，高度與 A 點相同，另端之重物較 O 點為低，細繩呈張緊狀態，其水平部分之長度為 L 。然後放開擺錘，使其自靜止開始落下。假設擺錘一直是在同一鉛直面內，且擺動到另一側時，能通

過垂直下降之重物或細繩，而不致互相碰觸。

細繩與圓柱體表面間之動摩擦力可以忽略。但除最初擺錘與 A 點同高時之外，可假

設重物的速度一旦變為零後，靜摩擦力足夠大能使其維持不動。

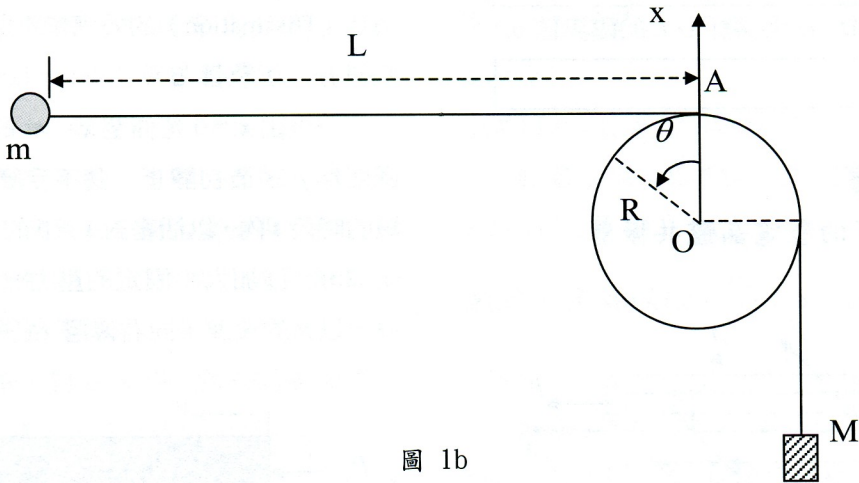


圖 1b

- (j) 假設重物在落下距離 D 後，速度變為零，且。若質點的擺盪，足可繞過圓柱體上方，到達 P ，且懸空的細繩部分都一直保持筆直，則 D 與 L 的比例不能小於一臨界值 αc 。請以質量比 M/m 來估計臨界值 αc ，在此忽略 R/L 的一次方或更高次方項。

[3.4 分]

- (d) 在 P 點時，質點相對於 O 的速度 \vec{v} 為

$$\vec{v} = \boxed{}$$

- (e) 在 P 點時，質點相對於 O 的加速度在 \hat{t} 方向的分量為

$$\boxed{}$$

[答案紙]

理論第一題

「一個連有落體的擺」

- (a) $\dot{\theta}$ 與 \dot{s} 間的關係為

$$\boxed{}$$

- (b) Q 相對於 O 的速度 \vec{v}_Q 為

$$\vec{v}_Q = \boxed{}$$

- (c) 在 P 點時，質點相對於 Q 的速度 \vec{v}' 為

$$\vec{v}' = \boxed{}$$

- (f) 在 P 點時，質點的重力位能 U 為

$$U = \boxed{}$$

- (g) 質點在軌跡線最低點時的速率 v_m 為

$$v_m = $$

- (h) 由 Q 到 P 的連線為直線，且長度為最短時，質點的速率 v_s 為（以 g 與 R 表示）

$$v_s = \boxed{}$$

(i)質點擺動到圓柱體的另一側、且到達最高

點時，其速率 v_H 為 (以 g 與 R 表示)

$$v_H =$$

(j)以質量比 M/m 來估計 D/L 的臨界值 α_c

$$\alpha_c =$$

理論第二題

交流電壓下的壓電晶體共振器

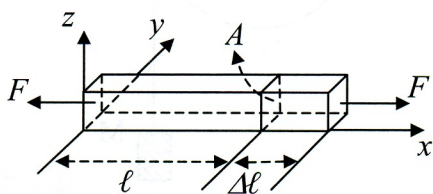


圖 2a

圖 2a 所示為一根自然長度為 l 、截面積為 A 的均勻長棒，當其兩端表面，沿著法線方向受到大小相等、方向相反的縱向作用力 F 時，其長度的變化量為 Dl 。依據定義，此兩端表面所受的應力 T ，即為 F/A ，而此長棒的應變 S ，則為長度變化量與自然長度的比即 Dl/l 。虎克定律可表示為

$$T = YS \text{ 或 } \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

上式中的比例常數 Y 稱為該長棒材料的楊氏係數。注意：壓縮性的應力會使棒的長度縮短，其所對應的縱向作用力為負值(即 $F < 0$)，長度的變化量也為負值(即 $\Delta l < 0$)，故壓縮性的應力 T 與壓力 p 的關係為 $p = -T$ 。

對密度為 ρ 的均勻長棒而言，沿其長軸傳遞的縱波(即聲波)，其波速 u 可由公式(2)求得：

$$u = \sqrt{Y/\rho} \quad (2)$$

在以下問題中，假設阻尼(Damping)及損耗(Dissipation)的效應皆可忽略。

A 部分 力學性質

一根由 $x = 0$ 延伸至 $x = \infty$ 的均勻長棒，密度為 ρ ，最初靜止，且不受應力。在一很短的時段 t 內，以活塞對 $x = 0$ 的左端表面(見圖 2b)，施加大小固定的壓力，使產生壓力波，以 u 的波速，向右傳遞。

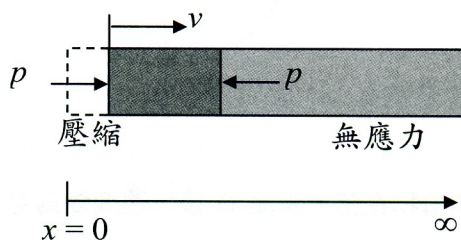


圖 2b

- (a)若在時段 Δt 內，左端表面以等速度 v 運動(圖 2b)，則在棒左端之應變 S 與壓力 p 各為何? 答案只能以 ρ, u, v 表示。 [1.6分]
- (b)考慮在此棒內沿 x 方向行進之縱波。以 x 表示棒內一橫截面無應力下的平衡位置(圖 2c)，

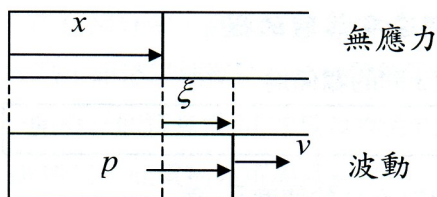


圖 2c

以 $\xi(x, t)$ 代表此橫截面在時刻 t 之位移。若

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut), \quad (3)$$

上式中 ξ_0 及 k 為常數，試求出速度 $v(x,$

t 、應變 $S(x, t)$ 及壓力 $p(x, t)$ 隨 x 與 t 變化的函數。 [2.4 分]

B 部分 電力性質 (包括壓電效應)

考慮一塊均勻的石英晶體薄板，其長度為 b ，寬度為 w ，厚度為 h ，如圖 2d 所示。取此板之長度沿 x 軸，厚度沿 z 軸。薄板的上、下板面各蒸鍍有一層金屬薄膜，作為電極，焊接至電極中心點的兩條引線(見圖 2e)，除可用來與電路連接外，還可提供此石英晶體所需之支撐。對沿 x 軸的縱向振動而言，此二電極中心點可假設為固定不動。

此石英晶體之密度 ρ 為 $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，楊氏係數 Y 為 $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ，薄板的長度 b 為 1.00 cm，而寬度 w 與厚度 h 則有 $h \ll w$ 與 $w \ll b$

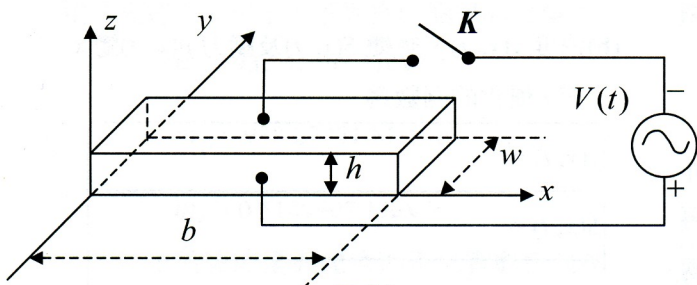


圖 2d

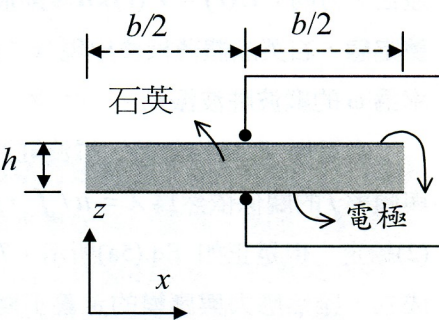


圖 2e

(c) 就此石英晶體薄板的縱波駐波，決定 Eq.(4b) 中常數 B_1 及 B_2 的值。 [1.2 分]

(d) 此石英晶體薄板的縱波駐波中，最低的两个頻率為何？ [1.2 分]

的關係。假設開關 K 未接通，且薄板上受激發後僅能出現只有 x 軸方向的縱波駐波振動。

對於頻率為 $f = \omega/2\pi$ 的駐波，在時間為 t ，平衡位置為 x 的截面，其位移 $\xi(x, t)$ 可以表示為

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4a)$$

此處 ξ_0 為一正常數，且位置函數 $g(x)$ 可表示為下列形式：

$$g(x) = B_1 \sin k(x - \frac{b}{2}) + B_2 \cos k(x - \frac{b}{2}) \quad (4b)$$

$g(x)$ 的最大值為 1， $k = \omega/u$ 。請記住電極的中心是靜止的，薄板的左面與右面是自由的，且應力(或壓力)為零。

「壓電效應」是石英晶體的一種特性。晶體被壓縮或伸張時，分居此晶體兩側的表面之間會出現電壓；反之，若晶體兩側的表面，受到外加電壓，則依據電壓的極性為正或負，此晶體會收縮或伸張。

