中學生通訊解題第二十七期題目

參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912701

數列 $t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots$ 以如右的規則定義：

$t_1=2$, $t_{n+1}=\dfrac{t_n-1}{t_n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$

試求t_{2003}的值。

參考解答：

$t_1=2$,

$$t_2=\frac{t_1-1}{t_1+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3} ,$$

$$t_3=\frac{t_2-1}{t_2+1}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=-\frac{1}{2} ,$$

$$t_4=\frac{t_3-1}{t_3+1}=\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}=-3 ,$$

$$t_5=\frac{t_4-1}{t_4+1}=\frac{-3-1}{-3+1}=2 , \cdots$$

觀察其規律：$2 , \frac{1}{3} , -\frac{1}{2} , -3 , 2 , \frac{1}{3} , -\frac{1}{2} , -3 ,$

$2 ,\cdots$

可猜測此為一循環數列(4 個一循環)

$\Rightarrow 2003\div 4=500$ 餘 3

$\Rightarrow t_{2003}=-\frac{1}{2}$

證明：

t_1 ,

$$t_2=\frac{t_1-1}{t_1+1} ,$$

$$t_3=\frac{t_2-1}{t_2+1}=\frac{\frac{t_1-1}{t_1+1}-1}{\frac{t_1-1}{t_1+1}+1}=\frac{\frac{t_1-1-t_1-1}{t_1+1}}{\frac{t_1-1+t_1+1}{t_1+1}}$$

$$=\frac{-2}{2t_1}=-\frac{1}{t_1} ,$$

$$t_4=\frac{t_3-1}{t_3+1}=\frac{-\frac{1}{t_1}-1}{-\frac{1}{t_1}+1}=\frac{\frac{-1-t_1}{t_1}}{\frac{-1+t_1}{t_1}}=\frac{1+t_1}{1-t_1} ,$$

$$t_5=\frac{t_4-1}{t_4+1}=\frac{\frac{1+t_1}{1-t_1}-1}{\frac{1+t_1}{1-t_1}+1}=\frac{\frac{1+t_1-1+t_1}{1-t_1}}{\frac{1+t_1+1-t_1}{1-t_1}}$$

$$=\frac{2t_1}{2}=t_1 ,$$

$\cdots$

$\Rightarrow t_{2003}=t_{(2000+3)}=t_3=-\frac{1}{t_1}=-\frac{1}{2}$ ，得證。

解題重點： 觀察規則並找出數之間的相關性，大膽猜測並論證。

評析： 本題徵答人數共有 114 人，答對者共 109 人，如徵答情形所列。平均得分為 6.66 分。有猜測卻無證明是本次同學

們共同的疏忽。其中答題優良或解法富參考價值者有桃園市青溪國中簡伯宇同學。

問題編號 912702

二鏡面M_1,M_2夾 30^0角(如圖一)，一光線從S點出發、平行於鏡面M_2、入射至鏡面M_1於A點，然後在二鏡面間反射(此反射遵守反射定律)。經過若干次反射後，光線又回到S點，若 $\overline{SA}=\overline{AV}=1$ ，試問：光線從S出發後一直到回到S爲止所走的距離總和。

參考解答：

設光線從S點出發後依序在M_1，M_2兩鏡面中反射的點分別爲A、B、C、…

$\because$ 光線從S點出發且平行於鏡面M_2，

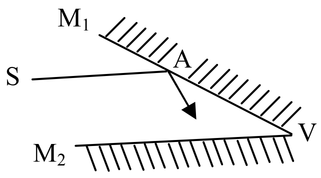
$\therefore \angle SAX=\angle YVX=30^\circ$

$\because$反射角=入射角，$\therefore \angle BAC=30^\circ$

$\Rightarrow \angle ABY=180^\circ-\angle SAB=180^\circ-120^\circ=60^\circ=\angle CBV$

由△CBV可得知：$\angle BCV=90^\circ=\angle ACB$

$\Rightarrow$光線第二次到達鏡面M_1 (即C點)時，則回頭走相同的路徑回到S點，所以光線從S出發後一直到回到S爲止所走的距離總和



圖一

參考解答：

設光線從S點出發後依序在M_1，M_2兩鏡面中反射的點分別爲A、B、C、…

$\because$ 光線從S點出發且平行於鏡面M_2，

$\therefore \angle SAX=\angle YVX=30^\circ$

$\because$反射角=入射角，$\therefore \angle BAC=30^\circ$

$\Rightarrow \angle ABY=180^\circ-\angle SAB=180^\circ-120^\circ=60^\circ=\angle CBV$

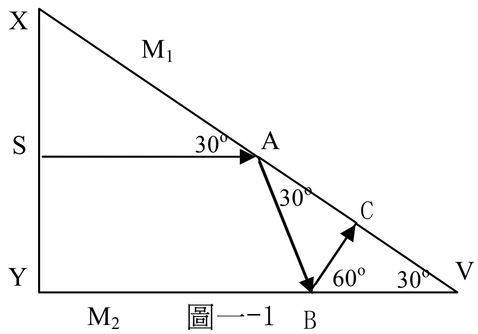
由△CBV可得知：$\angle BCV=90^\circ=\angle ACB$

$\Rightarrow$光線第二次到達鏡面 M1 (即 C 點)時，則回頭走相同的路徑回到 S 點，所以光線從 S 出發後一直到回到 S 爲止所走的距離總和爲 $2\times(\overline{SA}+\overline{AB}+\overline{BC})$

$\overline{SA}=\overline{AV}=1 \Rightarrow \overline{AC}=\frac{1}{2}$

△ABC爲30°-60°-90°△ $\Rightarrow \overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$2\times(\overline{SA}+\overline{AB}+\overline{BC})=2\times(1+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6})=2+\sqrt{3}$



圖一−1

解題重點：應用對光學原理(入射角與反射角相等)的了解，配合特殊三角形的三邊比例長度，來推導出欲求路徑總合。

評析：本題徵答人數共有 71 人，答對者共 63 人，如徵答情形所列。平均得分為 6.13 分。其中答題優良或解法富參考價值者有台北縣光仁國中巫鎮和同學、桃園市青溪國中簡伯宇同學。

問題編號
912703

設 a,b 是整數，且 $10a+b$ 是 7 的倍數，試證：$a-2b$ 也是 7 的倍數。

設 a,b 是整數，且 $5a+4b$ 是 7 的倍數，試證：$4a-b$ 也是 7 的倍數。

參考解答：

(1)

令 $10a+b = 7t$，t 為整數

$\Rightarrow b = 7t-10a$，代入 $a-2b$

$\Rightarrow a-2b = a-2\times(7t-10a) = a-14t+20a = 21a-14t = 7\times(3a-2t)$

$\because$ a 與 t 皆為整數，$\therefore (3a-2t)$為整數

$\Rightarrow$ $a-2b$ 為 7 的倍數。

(2)

令 $5a+4b = 7k$，k 為整數

$\because (4,7)=1$，$\therefore$乘上 4 不影響此數是否為 7 的倍數

$\Rightarrow 4b = 7k-5a$，代入$[4\times(4a-b)]$

$\Rightarrow 4\times(4a-b) = 16a-4b = 16a-7k+5a = 21a-7k = 7\times(3a-k)$

$\because$ a 與 k 皆為整數，$\therefore (3a-k)$為整數

$\Rightarrow 4a-b$ 為 7 的倍數。

解題重點：以變數變換及代入消去的方式來論證倍數的問題。部分同學以反證法亦可。

評析：本題徵答人數共有 96 人，答對者共 84 人，如徵答情形所列。平均得分為 5.85 分。其中答題優良或解法富參考價值者有彰化市民生國小王建詒同學、台北縣江翠國中呂亞軒同學。

問題編號
912704

碗中有 n 顆彈珠，甲乙丙三人一起玩遊戲，遊戲規則如下：

甲乙丙每人依序輪流從碗中拿走 1 或 2 顆彈珠(順序即為：甲乙丙甲乙丙甲乙丙…)，拿到最後一顆彈珠的人就是輸家。

請問：(1)如果一開始有 5 顆彈珠(即 n=5)，請問乙和丙能否合作迫使甲成為輸家？

(2)請求出所有能讓乙丙合作而迫使甲成為輸家的 n 值。

參考解答：

(1)可以。

方法如下：

n=5	甲	乙	丙	結果
拿走的彈珠數	1	1	2	甲輸
拿走的彈珠數	1	2	1	甲輸
拿走的彈珠數	2	1	1	甲輸

(2)將乙丙視做一人，可拿 2~4 顆彈珠，所以甲+乙丙一次共可拿 3~6 顆。以 n 值來討論甲輸/**贏**的情形：

n=1：因為甲先拿→輸

n=2：因為甲可先拿 1 顆→**贏**

n=3、4：因為乙丙至少需拿 2 顆→**贏**

n=5：因為乙丙可控制拿 2 或 3 顆→輸

n=6：因為乙丙可控制拿 3 或 4 顆→輸

n=7：甲第一次拿 1 顆即可拿到第 5 或 6 顆→**贏**

n=8：甲第一次拿 2 顆即可拿到第 6 或 7 顆即可→**贏**

n=9：乙丙合作拿成 4 的倍數即可，如甲 1 乙 2 丙 1 或甲 2 乙 1 丙 1 的方式→輸

n=10：同 n=9，只要第一次乙或丙多拿 1 顆(即其中一次拿成 5 的倍數)即可→輸

n=11：乙丙合作拿成 5 的倍數即可→輸

n=12：乙丙只要使彈珠顆數剩 6 或 9 顆(即避開甲勝的情形)，所以若甲 1 則乙 1 丙 1(剩 9 顆，同 n=9 的情形)，若甲 2 乙 2 丙 2(剩 6 顆，同 n=6 的情形)→輸

由後往前依甲乙丙之序拿走 3 或 6 顆

↓ ↓

$\boxed{01}\boxed{02}\boxed{03}\boxed{04}\boxed{05}\boxed{06}$ $\boxed{07}\boxed{08}\boxed{09}$ $\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}$

L L L L L L

甲會輸的情形

(框中的數字 $\boxed{t}$ 代表第 t 顆)

n=13：甲+乙丙可拿 3~6 顆彈珠，從 $\boxed{13}$ 依甲乙丙之序開始拿彈珠，若要甲輸只要使拿完一輪後剩 9 顆即可，因爲第 13 顆到第 9 顆間差 4 顆，所以乙丙可合作使甲拿到 $\boxed{09}$，→輸

n=14：同 n=13，因爲 $\boxed{14}$ 到 $\boxed{09}$ 間差 5 顆，所以乙丙可合作使甲拿到 $\boxed{09}$ 或 $\boxed{10}$ →輸

因爲 $\boxed{09}$、$\boxed{10}$、$\boxed{11}$、$\boxed{12}$、$\boxed{13}$、$\boxed{14}$ 都是甲輸，且乙丙可拿 2~4 顆彈珠，甲+乙丙一次共可拿 3~6 顆，從 $\boxed{15}$ 開始，與 $\boxed{09}$ 之間的差會多於 6 顆，所以之後的 n 值，乙丙皆可使甲停留在會輸的顆數上，因此之後皆爲甲輸。

n 值	1	2	3	4	5
甲輸/贏	輸	**贏**	**贏**	**贏**	輸
n 值	6	7	8	9	10
甲輸/贏	輸	**贏**	**贏**	輸	輸
n 值	11	12	13	14	…
甲輸/贏	輸	輸	輸	輸	輸

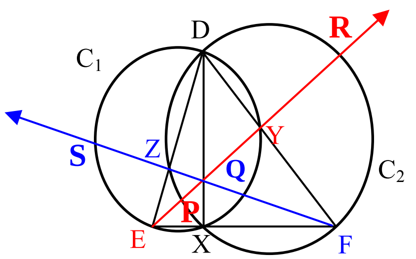
除了 n=2、3、4、7、8 是甲贏之外，其餘的 n 值皆可讓乙丙合作使甲輸。

解題重點：觀察乙丙可控制的顆數對遊戲的影響並以實做去做測試，推論可能的 n 值並以歸納方式論證。

評析：本題徵答人數共有 64 人，答對者共 2 人，如徵答情形所列。平均得分爲 2.02 分。其中答題優良或解法富參考價值者有台北市建成國中江衡同學、東湖國中李光宇同學。

問題編號
912705

△DEF是銳角三角形，$\overline{DX}$ 爲高，圓C_1,C_2分別爲△DXE、△DXF的外接圓，圓C_1交 $\overline{DF}$ 於Y點，圓C_2交 $\overline{DE}$ 於Z點，連接FZ射線依次交圓C_1於Q、S兩點，連接EY射線依次交圓C_2於P、R兩點，如圖二。試證：PQRS四點在同一圓上。



圖二

參考解答一：

由題目可知：△DEF 是銳角三角形，$\overline{DX}$ 為高，

$$\Rightarrow \angle DXE=90^{o}=\angle DXF$$

由圓C_1來看，∵∠DYE與∠DXE對到同一個弧(DSE弧)，∴∠DYE=90°=∠DXE

由圓C_2來看，∵∠DZF與∠DXF對到同一個弧(DRF弧)，∴∠DZF=90°=∠DXF

∵在△DEF中，∠DXE=∠DYE=∠DZF=90°，

∴$\overline{DX}$ 與射線 FZ 和射線 EY 交於同一點(即垂心)，令此點為 H

由圓C_1來看，$\overline{DH}\times\overline{HX}=\overline{SH}\times\overline{HQ}$ ------①(相交弦定理)

由圓C_2來看，$\overline{DH}\times\overline{HX}=\overline{PH}\times\overline{HR}$ ------②(相交弦定理)

由①②可得 $\overline{SH}\times\overline{HQ}=\overline{PH}\times\overline{HR}$，故 P,Q,R,S 四點共圓。

參考解答二：

連接$\overline{DS}$,$\overline{DP}$,$\overline{DQ}$,$\overline{DR}$

$\overline{DX}$ 為△DEF的高，⇒∠DXE=90°=∠DXF

⇒ $\overline{DE}$ 為圓C_1的直徑，$\overline{DF}$ 為圓C_2的直徑 ------①

由圓C_1來看，∵∠DYE與∠DXE對到同一個弧(DSE弧)，∴∠DYE=90°=∠DXE

由圓C_2來看，∵∠DZF與∠DXF對到同一個弧(DRF弧)，∴∠DZF=90°=∠DXF

⇒ $\overline{DE}$ ⊥射線 FZ，$\overline{DF}$ ⊥射線 EY------②

⇒ 由①②得知，$\overline{DS}=\overline{DQ}$，$\overline{DP}=\overline{DR}$ ------③

在圓C_1內，連接$\overline{SE}$

∵$\overline{DE}$ 為直徑，∴∠DSE=90°

⇒ △DSE~△DZS(AA 相似)

$$\Rightarrow \frac{\overline{DS}}{\overline{DZ}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DS}} \Rightarrow \overline{DS}^{2}=\overline{DZ}\times\overline{DE}$$ ------④

同理，在圓C_2內，連接$\overline{PF}$

∵$\overline{DF}$ 為直徑，∴∠DPF=90°

⇒ △DPF~△DYP(AA 相似)

$$\Rightarrow \frac{\overline{DP}}{\overline{DY}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DP}} \Rightarrow \overline{DP}^{2}=\overline{DY}\times\overline{DF}$$ ------⑤

在△DEF 中，△DEY~△DFZ(AA 相似)

$$\Rightarrow \frac{\overline{DY}}{\overline{DZ}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \Rightarrow \overline{DY}\times\overline{DF}=\overline{DZ}\times\overline{DE}$$ ------⑥

由④⑤⑥得知，$\overline{DS}=\overline{DP}$

代回③ ⇒ $\overline{DS}=\overline{DP}=\overline{DQ}=\overline{DR}$

（下轉第 25 頁）