高中數學課程中有關「邏輯」的教學設計

黃振乾

國立虎尾高級中學

摘　要

根據教育部公布修訂中的高中數學新課程標準草案中，將「邏輯」單元移入附錄中。有關「邏輯」單元的教學，雖然課程計畫更動，但是對於學生邏輯推理能力的培養，卻是不容忽視。筆者認為可以在課程的單元中，適時的引進有關邏輯的教學。本文旨在介紹如何在不同的單元中，引進有關邏輯的教學，筆者分別就有關充分、必要、充要條件之建立，原命題、逆名題與對偶命題的關係等之邏輯概念作說明。

關鍵詞：課程、邏輯、教學活動

壹、前言

最近教育部公布預訂於 94 年開始實施的高中數學新課程標準草案中，將「邏輯」單元移入附錄中。看到這個改變，加上筆者這幾年在高中任教，有一些關於邏輯教學的經驗，想提出一些對邏輯教學的看法。

現正使用的高中數學新課程，是於民國 88 年 7 月開始實施，取代國立編譯館印行的部編本。在此次的課程修訂中將「邏輯」單元又加了進來（62 年版有邏輯單元，而原 72 年實施的部編本並沒有「邏輯」單元)。加進來的「邏輯」單元與集合基本概念、函數基本概念成為第一冊第一章。

「邏輯」這個單元是不是要列入正式課程內，本來就是見仁見智的問題。也因為如此，才會在教材修訂時被移進移出。雖然如此，「邏輯」單元的教與學，卻是一個值得我們去重視的問題，怎麼說呢？因為邏輯推理能力的培養，對於高中生科學基本論證能力，有不小的影響力。誠如項武義教授（引自葉東進，1994）在其執筆的民國 62 年版高中數學實驗教材引言部分，就提到：

「邏輯」乃是討論思考法則的學問。在一般數學或其他學科中，「簡易的邏輯」是一個基本的工具，同學並不需要先熟讀 「邏輯學」，再來學習數學或其他學科如物理、化學、經濟學等等，但是對於邏輯的最簡易基本部分卻一定要弄得清清楚楚，並逐漸熟習其用法。

因此有關「邏輯」教學，並不是列入正式教材時就該教，而不正式列入教材就可以不教。但我們老師對於「邏輯」單元的教學該持何種態度呢？88 年龍騰版教科書的主編余文卿（1999）指出：

新課程（按：指 88 年版）在開頭介紹邏輯、集合與函數三個數學基本概念，為使銜接國中課程能夠順利，特別透過平面幾何知識引出邏輯中的充分與必要條件。因此「邏輯」單元在高中數學裏，應該扮演的是推理工具的角色，而且也是從學生所熟悉的數學

概念引進「邏輯」教學。

因此我們老師應該也要有這樣的體認，而不是像有一些高中其學校月考考題，問學生：「若 $3=-2$ 則 3 是偶數，此命題是否為真？」諸如此類的問題，大玩邏輯遊戲，甚至要求學生背真值表，這樣不僅失去邏輯教學的真義，甚至使學生失去學習的興趣，這應不是作為老師的我們所樂見。葉東進（1994）就指出

數學的性質與定理就彷彿是一部機器，而邏輯推理能力就是連接這些機器零件的螺絲釘，乍看雖不起眼，卻是缺少不了它。

邏輯推理能力並不只應用於數學或是其它科學上，在日常生活有時也常會碰到這類問題，比如說今年四、五月間爆發的 SARS 疫情，衛生署強調「感染 SARS 一定會發燒」，是否我們的學生也能正確推得「若不發燒就代表沒有感染 SARS」，這種在日常生活中應具備的邏輯推理能力？作為老師的我們，是否已經給學生足夠的判斷知識？這是個值得關注的問題。根據林福來（1994）針對我國高二學生所作研究顯示：有 47.8%認為老師說「如果下雨，我就不參加郊遊」與「如果不下雨，就會參加郊遊」意思一樣，顯見我們對於培養學生的邏輯推理能力的教學，還要更加強與努力。而利用數學課程中的邏輯思考訓練，來加強學生邏輯推理能力，使學生具備能在數學上、一般科學上甚至在日常生活中，能使用的邏輯思考論證能力，是一個極重要的管道，也是數學教育在今天應該可以扮演的重要角色。誠如學者（林福來、鄭英豪，1997）指出：

就教育國民使有能力進行論辯的目標而言，瞭解對偶命題等價，以進行邏輯論證，這件事在現今的時空環境中，更具有符合社會發展的教育意義。

但若是於正式教材中，不用一個獨立的單元來介紹邏輯，如何在教學中讓學生了解命題的充分、必要及充要條件呢？又如何讓學生知道原命題、逆命題與對偶命題的邏輯關係？並讓學生學習操作反證法與歸謬證法以論證事件，這些學生應具備的邏輯概念。這應是一個值得我們高中老師去研究的方向，從這幾年的教學經驗中，我深深覺得，其實不管課程是否加入「輯邏」這個單元，邏輯的概念是可以在許多單元中適時的引進，與學生一起討論，而這樣引進的教學方式，更可以讓學生養成隨時檢視她（他）們正進行的學習或者是解題，是否符合邏輯推理程序？最重要的是於解題時避免發生錯誤。以下是筆者在教學過程中，引進邏輯概念在教學上的一些方式及例子。

貳、教學單元中，引進邏輯概念的教學

一、有關充分條件、必要條件、充要條件的教學討論：

例：求 $x^2+4x-5>0$ 之解。

一般而言對於這一題的求解，學生要正確寫出本題的答案為 $x>1$ 或 $x<-5$，應該不是件很難的事。但不妨在學生已經知道這個解之後，可以再進一步與學生討論：

問題 1、試問：若 $x^2+4x-5>0$，則 $x>1$ 或 $x<-5$ 是否成立？

問題 2、試問：若 $x>1$ 或 $x<-5$，則

$x^2+4x-5>0$ 是否成立？

問題 3、試問：若 $x>1$，則 $x>1$ 或 $x<-5$ 是否成立？

問題 4、試問：若 $x>1$ 或 $x<-5$，則 $x>1$ 是否成立？

問題 5、試問：若 $x^2+4x-5>0$，則 $x>1$ 是否成立？

問題 6、試問：若 $x>1$，則 $x^2+4x-5>0$ 是否成立？

(一) 第一階段的討論：有關「若 P 則 Q」真假的討論

為什麼會作這樣延伸的討論？起因於筆者這幾年教學過程中，對學生的觀察發現，以現今教材而言，學生在高一開始學完邏輯的基本概念後，不少學生會有邏輯已經學完了，若在二次不等式的單元中，出現「試問：若 $x^2+4x-5>0$ 則 $x>1$ 是否成立？」這樣的討論，學生往往不知所措，這樣的反應緣自於學生，並沒有將她（他）所學的邏輯概念，轉化為她（他）的邏輯推理能力。正因為如此當我們老師上到這個單元時，若能再跟學生作說明：

1. $x^2+4x-5>0$ 之解為 $x>1$ 或 $x<-5$ 其來源是：

   $\because x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$

   $\therefore x>1$ 或 $x<-5$ 能使 $x^2+4x-5>0$

   所以　$x>1$ 或 $x<-5$

   $\Rightarrow x^2+4x-5>0$………（1）

   又欲使 $x^2+4x-5>0$ 需要

   $x-1>0, x+5>0$ 或是

   $x-1<0, x+5<0$ 成立。所以：

   $x^2+4x-5>0 \Rightarrow x>1$ 或 $x<-5$... (2)

   綜合（1）（2）可得：

   $x^2+4x-5>0 \Leftrightarrow x>1$ 或 $x<-5$

   所以問題 1、問題 2 為

2. 因為 $x>1$ 或 $x<-5$ 只要有一個成立即可成立，所以：

   若已知 $x>1$ 則 $x>1$ 或 $x<-5$ 是成立的。故：

   $x>1 \Rightarrow x>1$ 或 $x<-5$。

   因為 $x>1$ 或 $x<-5$，所以 x 可能在 $x>1$ 的區域，也有可能在 $x<-5$ 之區域，所以：

   $x>1$ 或 $x<-5 \not\Rightarrow x>1$。

3. 結合以上 1.2 的討論我們可以作以下兩個結論：

   (1) $x^2+4x-5>0 \Leftrightarrow x>1$ 或 $x<-5 \not\Rightarrow x>1$。

   故 $x^2+4x-5>0 \not\Rightarrow x>1$

   因此問題 5 為假。

   (2) $x>1 \Rightarrow x>1$ 或 $x<-5 \Leftrightarrow x^2+4x-5>0$。

   故 $x>1 \Rightarrow x^2+4x-5>0$

   因此問題 6 為真。

以上的討論是較仔細的驗證「若 P 則 Q」的真假，其目的是讓學生養成隨時檢視其解題過程中，命題的邏輯關係是否等價？若學生能經由思考直接判斷真假，當然最好。雖然以現在的課程安排方式，學生已經於第一冊第一章上完邏輯概念，但就好像學完開車並已經考過駕照，要上路仍需要再磨練一番，才能輕鬆上路。同樣的，老師也要試著利用不同的情境，讓學生親自利用她（他）

所學的邏輯概念去處理問題，一方面讓學生知道邏輯不是在考邏輯才出現的，而是可以應用在任何單元的，並可藉由實際演練中，體會判斷命題真假的方法，比記下判斷技巧更為重要。若教材修訂後學生沒有上過邏輯概念，以這樣的方式開始「若 P 則 Q」是否為真的教學，反而很顯得不刻意，也讓學生知道要隨時在解題過程中，思考「P $\Rightarrow$ Q」「P $\Leftarrow$ Q」「P $\Leftrightarrow$ Q」是否為真？有了這樣的基礎，即可進行第二階段的討論，有關充分、必要、充要概念的討論。

(二) 第二階段的討論：充分、必要、充要概念的建立

在上一個階段中，已將問題 1 至問題 6 作過直觀的討論，在這個階段裡，我們可以引進充分條件、必要條件、充要條件的討論。經由上一個階段的討論，學生已經知道若 $x>1$，則 $x^2+4x-5>0$，因此我們可以跟學生說明：

因為 $x>1$ 這個條件已經充分到使 $x^2+4x-5>0$ 成立，所以 $x>1$ 為 $x^2+4x-5>0$ 之充分條件。同樣的若 $x>1$ 或 $x<-5$ 成立則 $x^2+4x-5>0$ 成立，我們也可以說 $x>1$ 或 $x<-5$ 為 x^2+4x-5 之充分條件。但是因若 $x^2+4x-5>0$，則 $x>1$ 不一定成立，原因是 $x^2+4x-5>0$ 也有可能 $x<-5$。也就是說 $x^2+4x-5>0$，則 $x>1$ 不必要一定得成立，所以 $x>1$ 不是 $x^2+4x-5>0$ 的必要條件。但 $x^2+4x-5>0$，則 $x<-5$ 或 $x>1$ 必成立，因此 $x<-5$ 或 $x>1$ 為 $x^2+4x-5>0$ 之必要條件。綜合上述我們可知道 $x^2+4x-5>0$ 為 $x>1$ 或 $x<-5$ 之充要條件。

其實命題是否充分、必要？都有其可理解的中文意涵，因此最好能鼓勵學生以理解為主，這樣既輕鬆又能隨時應用。

(三)結論

1、若 P 則 Q 是否為真的探討，比去記住充分條件、必要條件、充要條件這些名詞還重要。當然這些名詞的概念學生一定要具備，但這是要學生能靈活的判斷 P $\Rightarrow$ Q、P $\Leftarrow$ Q、P $\Leftrightarrow$ Q 是否為真之後的後續教學。

2、其實在任何單元，老師都應該可以在教學中提供延伸的討論。若是沒有在特定的單元中教過邏輯，我們也可以在許多單元開始進行有關邏輯的教學。如此，一方面可以使學生完成此單元的學習之外，更重要的是，能使學生更靈活的作邏輯的推理，也讓學生於解題過程中知道隨時去檢視命題間的充分、必要及充要條件，這才是邏輯教學的最主要目的，也才能使學生在解題過程中，避免出現不必要的錯誤。

二、有關原命題、逆命題與對偶命題的教學

如何與學生建立原命題與對偶命題的等價關係？如何引進逆命題的討論？

其實這些概念可以在日常生活中來引進，並不一定要在數學課裏，若是擔任導師的工作，甚至可以在班會中，利用一、兩堂課作有關之教學設計來與學生討論，而使用

的題材應該可以利用日常生活中的例子，而不需直接使用數學的例子，因為這些命題的關係，其實就是在日常生活中就可以應用到的。例如在今年 SARS 時期，報紙常刊有關 SARS 的新聞，我就曾在班會中利用新聞上提到：「得 SARS 的患者，必會發燒」這樣的一個話題，來作為教學的題材，來跟學生談談原命題、逆命題及對偶命題，以這樣的時機、這樣的方式，來進行邏輯教學，一來可以引起學生的學習興趣，二來也可以讓學生體認到邏輯的推理是很生活化的，而且相當重要。以下是我提出的題材，我利用命題一作為原命題，慢慢引入其他三個命題，而這與學生息息相關的常識，往往使她（他）們馬上進入狀況，而且很快的了解了原命題與對偶命題的等價關係，這時我接著引進原命題、逆命題、否命題、對偶命題的這些名詞，並討論之間的關係、與真假。這樣由日常生活中的例子出發，慢慢的即可引進有關數學的例子，並進一步介紹反證法與歸謬證法等，這樣的方式其中一、兩節可以於班會中實施，接著就可以在數學課進行後續的探討。

命題一：得 SARS 的患者，必會發燒
命題二：若患者發燒則一定得 SARS
命題三：不得 SARS，必不發燒
命題四：不發燒則一定不得 SARS

參、 養成學生隨時檢驗邏輯等價關係之必要性

在邏輯單元的考試中，常出現這樣的題目：$x>2$ 則 $x>3$，是否為真？$x>3$ 則 $x>2$，是否為真？當然，大部分學生都了解前一個命題為假，但下一個命題卻是真的。一般而言學生均有這樣的判斷能力，但是在解題過程中卻不時發生錯誤，為什麼會有這樣的情形，我舉一個例子來作說明：

例： 若 $f(x)=ax+b,\ x\in R,\ a,b$ 為常數，已知 $1\le f(1)\le 2$， $3\le f(2)\le 4$，求 $f(3)$ 的最大值與最小值。

以下是不少學生的解法，最後卻發生答案錯誤的情形：

$\because 1\le f(1)\le 2 \quad \therefore 1\le a+b\le 2$………(1)

$\because 3\le f(2)\le 4 \quad \therefore 4\le 2a+b\le 6$…… (2)

由(1)可得 $-2\le -a-b\le -1$…… (3)

(2)＋(3)可得 $2\le a\le 5$ 故 $-5\le -a\le -2$.. …(4)

又 $1\le a+b\le 2$… …(1)

(1)＋(4)可得 $-4\le b\le 0$ 又

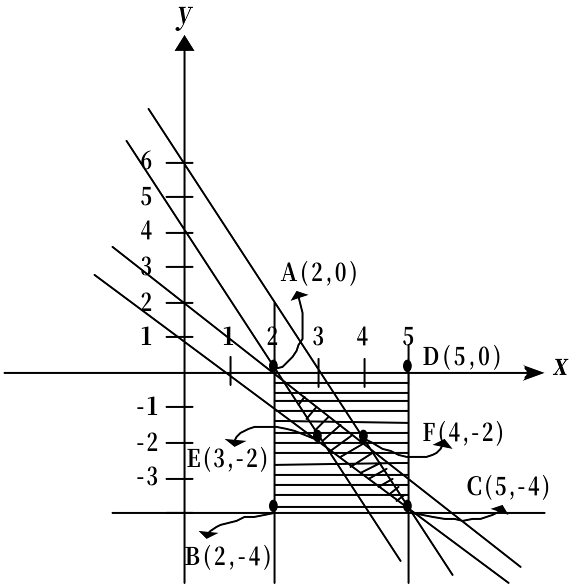
$\because 2\le a\le 5 \therefore 2\le 3a+b\le 15$

故得 $2\le f(3)\le 15$ …即 $f(3)$ 的最大值 15，最小值 2…

但正確答案卻是 $6\le f(3)\le 11$ 即 $f(3)$ 的最大值 11，最小值 6

為什麼會發生這樣的情形？我們仔細作一些探討：滿足 $1\le f(1)\le 2,\ 3\le f(2)\le 4$ 的點（ a , b ），只在 $1\le a+b\le 2$，$4\le 2a+b\le 6$ 的範圍裡，如圖（一）的斜線區域（即平行四邊形 AECF，包含邊），但學生在其運算過程中，卻為了計算需要而不小心得到 $2\le a\le 5$， $-4\le b\le 0$ 這個結果，其範圍如圖（一）的橫線區域（即長方形 ABCD，包含邊）。要得到 $f(3)$ 即要得到 $3a+b$ 的最大值與最小值，我們可以使用的

點（a, b）只能是斜線區域內（包含邊）的點（a, b)，但學生卻誤用了橫線區域內（包含邊）的點（a, b)，當然得到錯誤的結果。



圖（一）

學生於計算過程中常出現這樣的問題卻不自知，最大的徵結在於學生不太考慮她（他）在計算過程中，已經將符合已知條件的命題 P 推到命題 Q，而命題 Q 卻推不回去命題 P，這又回到邏輯的是否等價的問題上了。因此，我們實在有責任隨時以一些例子跟學生介紹這個問題，讓學生在不斷的學習中培養隨時檢視她（他）們的解題過程。

接著我們在來看另一種情形，若 $x^2=4$ 則 $x=2$，是否為真？幾乎大部分學生均能知道這是錯的，因為正確答案應為 $x=+2$ 或 $x=-2$，學生會因為考邏輯而作詳細的判斷，但在解題時卻往往忽略了。我們來看另一個例子：

例：$\vec{a}=(k,1)$，$\vec{b}=(2,3)$ 且 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 向量夾角為 60^0，求 k。

蠻多學生解出答案是 $-8\pm\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

但答案卻只有 $-8+\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

請看一般學生解題過程：

第一步：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^0$

$\therefore 2k+3=\sqrt{k^2+1}\sqrt{13}\times\dfrac{1}{2}$ ……… （1）

第二步：平方 $\therefore$

$(2k+3)^2=\langle k^2+1\rangle\times 13\times\dfrac{1}{4}$ ………（2）.

第三步：解二次方程式得到 $k=-8\pm\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

若是沒有養成在解題過程中，隨時檢視計算過程，即很可能馬上得到 $k=-8\pm\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$ 這樣的答案，但卻不知去檢查。以本題為例，在第二步中學生將第一步的結果加以平方：其結果分析如下

$2k+3=\sqrt{k^2+1}\sqrt{13}\times\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow (2k+3)^2=\langle k^2+1\rangle\times 13\times\dfrac{1}{4}$

但 $(2k+3)^2=\langle k^2+1\rangle\times 13\times\dfrac{1}{4}\not\Rightarrow$

$2k+3=\sqrt{k^2+1}\sqrt{13}\times\dfrac{1}{2}$

因此由 $(2k+3)^2=\langle k^2+1\rangle\times 13\times\dfrac{1}{4}$ 所得到

的 k，當然不是符合原始條件的 k。

雖然學生遇到若 $x^2=4$ 則 $x=2$，是否為真？輕而易舉得到正確答案，但若平常沒有養成檢視邏輯等價的習慣，雖然很認真解題，但最後卻無法得到完全正確的答案。因此老師如能常作這樣的示範，相信學生解題錯誤率必定降低。

肆、結語

數學的教學貴在啟發與聯想，文中所介紹的題目持續作延伸，雖可能會影響為學生補充題目的時間，但筆者認為，若學生只是不斷的解題，一心只想快速得到答案，但是卻不去思考：解題到這裡為止，我用了哪些解題條件？用了多少解題工具？更重要的是，我使用的工具是否與合乎題意？是否跟題目本身的條件依然一樣？這一些判斷能力是我們老師於教學過程中，要讓學生具備的。而有了這些能力，才能讓學生具備更嚴謹的學習態度，與更靈活的自我檢測動力。

利用引進邏輯教學在課程的一些單元中，我們可以給學生一個很好的示範，那就是我們經由學習得到的知識，是可以隨時派的上用場的，而這樣的體認在提昇學生學習興趣上，應該有正面的助益。

伍、參考文獻

1.林福來（1994）。數學證明的了解（Ｉ）國科會專題研究計畫報告。

2.林福來與鄭英豪（1998）。反證法論證原理的探究性教學。科學教育學刊，5（4）557-591。

3.余文卿（1999）。漫談高中數學新課程。數學傳播，23（1），52-56。

4.教育部（2003）。教育部普通高中數學課程綱要總綱草案。台北市：教育部。

5.教育部（1996）。教育部高中數學課程標準（簡稱 88 年版）。台北市：教育部。

6.葉東進（1994）。回頭是案？----談高中的「邏輯」教學。數學傳播，18（2），1-5。

附錄：一些例子

例 1：$G: x^2+cy^2+dx+ey+f=0$，$c,d,e,f\in R$，試問：

1、G 表一圓，則 C = 1，是否為真？

2.、C = 1，則 G 表一圓是否為真？

例 2：$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$，若 a 為 $f(x)=0$ 之根，則下列何者為真？

(A)a = 1(B) a = 2(C) a = 3(D) a > 0

例 3：(1) 若 $P(x,y)$ 在方程式 $\dfrac{y-4}{x-2}=3$ 之圖形上

①試畫出 $\dfrac{y-4}{x-2}=3$ 之圖形

②請問方程式 $\dfrac{y-4}{x-2}=3$ 所表示之圖形與方程式 $y-4=3(x-2)$ 所表示之圖形是否一樣？

(2) 若 $P(x,y)$ 在方程式 $\dfrac{y-4}{x-2}=3$ 之圖形上，則 $P(x,y)$ 在方程式 $y-4=3(x-2)$ 之圖形上是否為真？