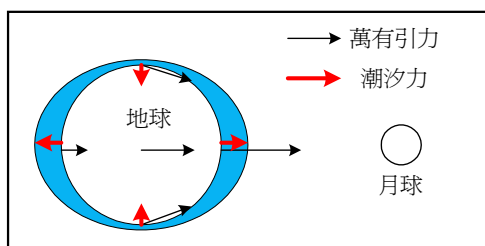


日月的潮汐力

徐國誠

臺北市立成淵高級中學

在牛頓以前，人們隱約知道海洋潮汐與月球之間必定有著某種關係，但是月球到底如何影響潮汐，卻沒有人提出合理的解釋。牛頓認為潮汐的形成，主要是由於月球和地球上任一點與月球和地心之間的引力之差所造成的，這種因為距離差所引起的引力差稱之為潮汐力 (tidal force) 或引潮力 (tide generating force)，而此潮汐力會造成地表上靠近月球的一端和遠離月球的一端這兩處的漲潮，如圖一；因為地球每 24 小時就自轉一次，此種說法可以預測我們一天會看到兩次漲潮和退潮，這和經驗是相符的。



圖一 由於月球在地球上任一點與地心之間的引力差所產生的潮汐力，造成地表上有兩處漲潮。

要計算月球所產生的潮汐力，首先我們令地球上單位質點的水在 P 點受到月球的引力為 $F_1 = \frac{GM}{d^2}$ ，d 為 P 點到月球的距離，M 為月球的質量，如圖二；若將此單位質點的水

水放置在地心 O 點處則受到月球的引力為

$$F_2 = \frac{GM}{D^2}$$

D 為地心 O 點到月球的距離。因此這兩個力的差在垂直方向上的分量 f_v 和平行方向上的分量 f_h 分別為 (Ref. [8], p.36)

此這兩個力的差在垂直方向上的分量 f_v 和平行方向上的分量 f_h 分別為 (Ref. [8], p.36)

$$\begin{cases} f_v = F_1 \cos \beta - F_2 \cos \alpha = \frac{GM}{d^2} \cos \beta - \frac{GM}{D^2} \cos \alpha & (1) \\ f_h = F_1 \sin \beta - F_2 \sin \alpha = \frac{GM}{d^2} \sin \beta - \frac{GM}{D^2} \sin \alpha \end{cases}$$

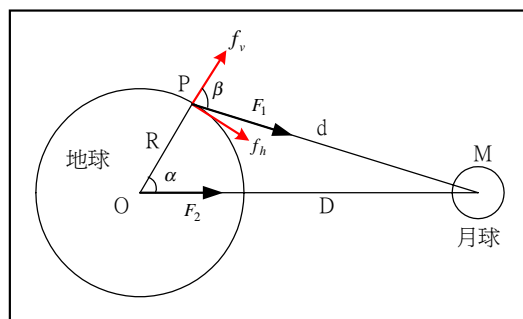
上式中的 f_v 和 f_h 即是作用在單位質點的水的潮汐力或者稱為引潮加速度。由於正

弦定律我們可以知道 $\frac{D}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin \alpha}$ ，因此

$$\sin \beta = \frac{D}{d} \sin \alpha & (2)$$

接著由圖二我們利用餘弦定律可知 $d^2 = D^2 + R^2 - 2DR \cos \alpha$ ，因此

$$\frac{D^2}{d^2} = \frac{1}{1 - 2\frac{R}{D} \cos \alpha + \frac{R^2}{D^2}} & (3)$$



圖二 地球上單位質點的水在 P 點受到月球

的引力為 $F_1 = \frac{GM}{d^2}$ ，此單位質點的水

放置在地心 O 點處受到月球的引力為

$F_2 = \frac{GM}{D^2}$ ，這兩個力的向量差即為潮

汐力，此潮汐力在垂直方向上的分量

為 f_v ，在平行方向上的分量為 f_h 。

由第(2)式以及第(3)式可以求得 $\cos \beta$ 為

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \pm \sqrt{1 - \frac{D^2}{d^2} \sin^2 \alpha} \\ &= \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 - 2\frac{R}{D}\cos\alpha + \frac{R^2}{D^2}}} = \pm \sqrt{\frac{(\cos\alpha - \frac{R}{D})^2}{1 - 2\frac{R}{D}\cos\alpha + \frac{R^2}{D^2}}} \end{aligned}$$

由圖二可以知道若 $\beta < 90^\circ$ ，則

$\cos \beta > 0$ ， $\cos \alpha$ 也會大於 $\frac{R}{D}$ ；若 $\beta > 90^\circ$ ，

那麼 $\cos \beta < 0$ ， $\cos \alpha$ 也會小於 $\frac{R}{D}$ ，因此上

式的 $\cos \beta$ 可以寫成

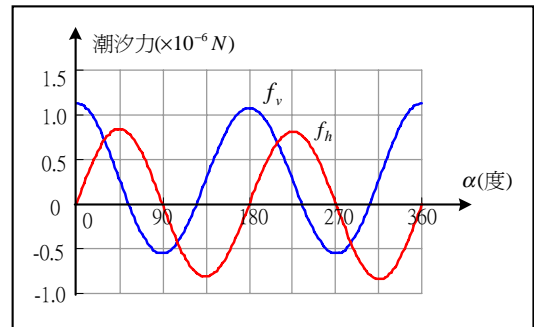
$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha - \frac{R}{D}}{\sqrt{1 - 2\frac{R}{D}\cos\alpha + \frac{R^2}{D^2}}} \quad (4)$$

最後將第(2)、(3)式以及第(4)式代入第(1)式，則

$$f_v = \frac{GM}{D^2} \left(\frac{\cos \alpha - \frac{R}{D}}{\left(1 - 2\frac{R}{D}\cos\alpha + \frac{R^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \cos \alpha \right) \quad (5)$$

$$f_h = \frac{GM}{D^2} \left(\frac{\sin \alpha}{\left(1 - 2\frac{R}{D}\cos\alpha + \frac{R^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \sin \alpha \right) \quad (6)$$

上面二式 f_v 和 f_h 只為 α 的函數，而 α 是地表上任一點與地心的連線和地月連線間的夾角，式中月球的質量 M 為 7.349×10^{22} Kg，地球與月球距離 D 為 3.8418×10^8 m，地球半徑 R 為 6.378×10^6 m。若以 α 為變數，再將各個常數代入第(5)式和第(6)式中，就可以得到月球在地表上各點所產生的潮汐力 f_v 和 f_h ，如圖三。



圖三 月球在地表上各點的潮汐力與 α 的關係曲線。其中 $f_v > 0$ 是屬於漲潮的位置，而 $f_v < 0$ 則屬於退潮的位置；若 $f_h > 0$ ，則表示該處潮汐波移動的方向為順時針，而 $f_h < 0$ 則移動的方向為逆時針。

圖三中由潮汐力的值可以看出漲潮的位置和潮汐波移動的方向。若 $f_v > 0$ 的位置，則該處屬於漲潮，反之 $f_v < 0$ 則屬於退潮的位置，圖中 $f_v = 0$ 的位置大約出現在 α 為 54.35° 與 124.88° 處，所以 α 在 $0 \sim 54.35^\circ$ 之間

是屬於漲潮的位置，而在 $54.35^\circ \sim 124.88^\circ$ 之間是屬於退潮的位置，依此類推。另外若 $f_h > 0$ ，則該處潮汐波移動的方向為順時針，反之 $f_h < 0$ 則移動的方向為逆時針，圖中 $f_h = 0$ 的位置大約出現在 α 為 89.52° 與 180° 處，所以 α 在 $0 \sim 89.52^\circ$ 之間的潮汐波為順時針的方向，而在 $89.52^\circ \sim 180^\circ$ 之間的潮汐波為逆時針的方向，如圖四所示。

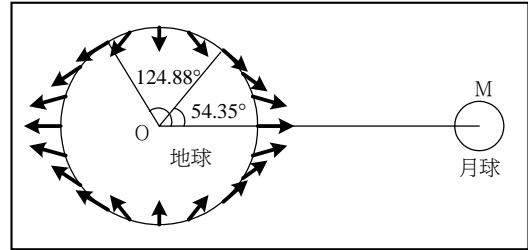
第 (5) 式與第 (6) 式中的 R 約為 D 的 0.0167 倍，假如分母利用二項式定理展開，將 $\frac{1}{D^5}$ 以下各項省略之後，可進一步將 f_v 和 f_h 簡化為 (Ref. [8], p.40)

$$\begin{cases} f_v = \frac{GMR}{D^3} (3\cos^2 \alpha - 1) \\ f_h = \frac{3}{2} \frac{GMR}{D^3} \sin 2\alpha \end{cases}$$

以簡化式計算出月球的潮汐力與第 (5)、(6) 式比較，其平均誤差約為 4% ~ 5%。

漲退潮雖大部分為月球所引起的，不過太陽對地球的潮汐力平均值大約是月球的 0.46 倍，所以太陽的潮汐力對月球的潮汐力而言，時而助長，時而削弱，端看太陽與月球的相對位置。而月球繞地球的軌道面（白道）和地球繞太陽的軌道面（黃道）有 $5^\circ 8.8'$ 的交角，假如我們忽略這個小角度，以圖五的相對位置來看，地月連線和地日連線間的夾角為 θ ，單位質點的水在 P 點與地心的連線和地日連線間的夾角為 α ，所以 P 點與地心的連線和地月連線間的夾角為 $\alpha - \theta$ 。而太陽和月球對地球潮汐力的總和應為

$$\begin{cases} f_v = f_{mv} + f_{sv} \\ f_h = f_{mh} + f_{sh} \end{cases}$$



圖四 α 在 $0 \sim 54.35^\circ$ 之間是屬於漲潮的位置，而在 $54.35^\circ \sim 124.88^\circ$ 之間是屬於退潮的位置； α 在 $0 \sim 89.52^\circ$ 之間的潮汐波為順時針的方向，而在 $89.52^\circ \sim 180^\circ$ 之間的潮汐波為逆時針的方向。

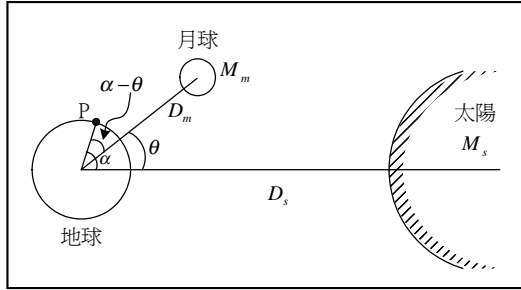
其中 f_{sv} 、 f_{sh} 為太陽潮汐力在垂直方向和平行方向上的分量， f_{mv} 、 f_{mh} 為月球潮汐力在垂直方向和平行方向上的分量。我們從第 (5) 式和第 (6) 式中，可以得出這四個分量分別為

$$f_{sv} = \frac{GM_s}{D_s^2} \left[\frac{\cos \alpha - \frac{R}{D_s}}{\left(1 - 2\frac{R}{D_s} \cos \alpha + \frac{R^2}{D_s^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \cos \alpha \right] \quad (7)$$

$$f_{sh} = \frac{GM_s}{D_s^2} \left[\frac{\sin \alpha}{\left(1 - 2\frac{R}{D_s} \cos \alpha + \frac{R^2}{D_s^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \sin \alpha \right] \quad (8)$$

$$f_{mv} = \frac{GM_m}{D_m^2} \left[\frac{\cos(\alpha - \theta) - \frac{R}{D_m}}{\left(1 - 2\frac{R}{D_m} \cos(\alpha - \theta) + \frac{R^2}{D_m^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \cos(\alpha - \theta) \right] \quad (9)$$

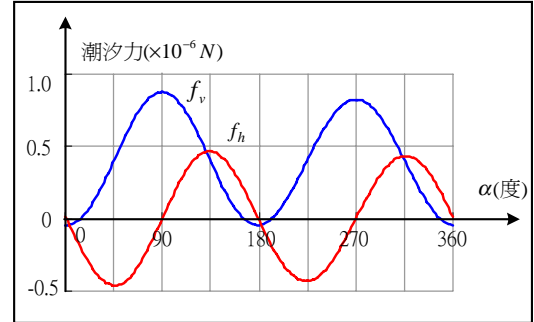
$$f_{mh} = \frac{GM_m}{D_m^2} \left(\frac{\sin(\alpha - \theta)}{\left(1 - 2\frac{R}{D_m} \cos(\alpha - \theta) + \frac{R^2}{D_m^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \sin(\alpha - \theta) \right) \quad (10)$$



圖五 太陽、月球和地球的相對位置圖。其中地月連線和地日連線間的夾角為 θ ，單位質點的水在 P 點與地心連線和地日連線間的夾角為 α 。

其中 D_s 、 D_m 分別為地球和太陽的距離、地球和月球的距離， M_s 、 M_m 分別為太陽和月球的質量。從以上四個式子，我們就可以得出太陽和月球在不同的相對位置時的潮汐力。當 $\theta = 0^\circ$ 或 180° 時就是所謂的大潮 (spring tide)，這時太陽和月球的潮汐力有相加的效果；而 $\theta = 90^\circ$ 或 270° 時就是所謂的小潮 (neap tide)，此時太陽和月球的潮汐力互相牽制，所以潮汐現象較不明顯。圖六是 $\theta = 90^\circ$ 的情況下潮汐力與 α 的關係曲線圖，圖中是將地球和太陽的距離 $D_s = 1.496 \times 10^{11}$ m，和太陽的質量 $M_s = 1.9891 \times 10^{30}$ Kg，以及前述的若干常數代入第 (7) ~ (10) 式所得出的曲線圖。由圖中不難看出不論是 f_v 或 f_h ，都比圖三的曲線圖小很多，就是月球潮汐力受到太陽潮汐

力部分抵消的結果；而月球的潮汐力又大於太陽的潮汐力，因此滿潮的位置也大約出現在 $\alpha = 90^\circ$ 和 270° 的位置。



圖六 $\theta = 90^\circ$ 的情況下潮汐力與 α 的關係曲線圖。由於月球潮汐力受到太陽潮汐力部分抵消的關係，所以 f_v 和 f_h 都比圖三的曲線圖小了很多。

雖然我們做了一些簡化，而計算天體對地球潮汐力的影響，也似乎可以用潮汐力的大小來判斷何時滿潮或何時乾潮，不過實際上在有些地方，當月球出現在正天頂（或反天頂）時發生的卻是乾潮。這個現象在牛頓之後約 100 年，拉普拉斯 (Pierre S. Laplace) 也曾經做過修正說明 (Ref. [6])：假設地球表面為深度平均 4 公里的海水所覆蓋，那麼水波的速度約為每小時 700 公里 ($v = \sqrt{gh}$)，這個波從剛好是乾潮的位置處傳到滿潮的位置處所需的時間約為 14 小時 ($t = (\pi R / 2) / v$)，若以水波來回一次所需的時間為一個週期，那麼地球上水波的自然週期約是 28 小時。但從自轉中地球的觀點來看，月球會對當地的海水施以一個週期約為 12 小時的外加驅動力，也就是說，海水有

一個 28 小時的自然振動週期，但月球是以較快的 12 小時週期在驅動我們的潮汐波。當自然週期比外加驅動力的週期還長時，系統的反應常常會適得其反，這就是為什麼由月球的潮汐力判斷該處應該滿潮時卻觀察到乾潮的原因。不過這種修正，比較適用於面對廣大海洋的位置。比如台灣東部沿岸面對廣大太平洋，因而滿潮的時間與月球出現在正天頂的時間有時相差 1 至 2 小時，有時卻相差 3 至 4 小時，其時間差的變異性相當大；而西部沿岸面對較狹小的台灣海峽，其滿潮的時間與月球出現在正天頂的時間相當。

最後要說明的是，影響潮汐現象的因素非常多，比如海底地形、海底摩擦、海水密度、海流、慣性、氣壓以及地球自轉等因素（其他行星對地球潮汐力與太陽和月球相比，可說是微不足道）。因此，要研究某一個地區的潮汐特性，都必須經過長時間的觀測與記錄，才能蒐集到較完整的潮汐資料。而太陽和月球的潮汐力是潮汐變化的主要來源，月球、太陽和地球之間的相對位置的改變，以及月球、太陽和地球之間距離的變化，都對潮汐力有相當大的影響。

參考文獻

- 1.中央氣象局網站：<http://www.cwb.gov.tw/V4/index.htm>
- 2.王執明主編，高級中學地球科學（上）－教師手冊，台北，龍騰文化，56－58 頁，民 90。
- 3.休伊特（Paul. G. Hewitt，蔡坤憲譯），觀念物理 II－轉動力學·萬有引力，台北，天下文化，107－125 頁，2001。
- 4.建國中學主編，高級中學數理叢書－物理（第二輯），台北，教育部中教司，59－62 頁，民 82。
- 5.陳偉正、林雲海、顏三和、陳憬燕，物理與生活，初版，台北，銀河文化，45－47 頁，1998。
- 6.盛博納，水波物語，科學發展，360 期，62－69 頁，2002。
- 7.褚德三主編，高級中學物質科學物理篇（上）－教師手冊，台北，龍騰文化，246－266 頁，民 92。
- 8.劉文俊，台灣的潮汐，2 版，台灣，劉文俊出版（萬森興業印刷），1999。
- 9.D. Halliday and R. Resnick, *Fundamentals of Physics Extended*, 2nd ed., U.S.A., John Wiley & Sons, 1988.