數學解題中「因和果」的安排

許建銘

高雄市立龍華國民中學

一、前言：

【問題】如何將 21 個蘋果裝入 4 個籃子，使得每個籃子裡都裝有奇數個蘋果？請以數字表示蘋果的數量，然後畫出蘋果與籃子的配置圖。

【圖解】圖 1-1 是兩種參考解答：

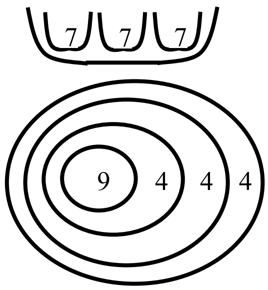


圖 1-1

【問題】地板上總共鋪有 62 個大小相同的正方形磁磚(如圖 1-2)。如同平面坐標一樣，每個方格磁磚都標上一個坐標，能否從任何一塊開始，每次只能採到相鄰一塊磁磚上，使每塊磁磚恰被踩過一次，然後踩遍全部的磁磚？

	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(8,7)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)	(8,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	

圖 1-2

【解法】考慮每一個方格內的橫坐標與縱坐標的和，就會發現相鄰兩個方格內必然有一個奇數與一個偶數。因此無論從那一塊磁磚開始出發，一定都是一奇一偶或一偶一奇相間而行。也就是說想要踩遍 62 格，就一定要有 31 個奇數格與 31 個偶數格。圖中有 32 個偶數格，而奇數格只有 30 個，所以無法做到。

【問題】圖 1-3 中，地板上總共鋪有 62 個大小相同的正方形磁磚，能否從任一塊開始，每次皆以西洋棋(國際象棋)的「馬步」走法，踩至下一塊磁磚上(走至 2×3 或 3×2 之矩形的對角方格內，且無「拐馬腳」問題)，使每塊磁磚只被踩過一次，然後踩遍全部的磁磚？

【解法】如圖 1-4 中，可將部分方格塗黑，使得任何兩個相鄰的方格有一個塗黑，一個沒有塗黑(就以白色看待)。無論從那一塊磁磚開始出發，一定都是一黑一白或一白一黑相間而行。也就是 62 格當中一定是有 31 個黑格與 31 個白格才能全部被踩完。但圖中有 32 個黑格與 30 個白格，所以無法做到。

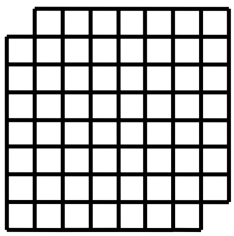


圖 1-3

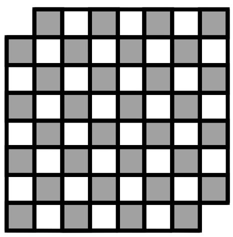


圖 1-4

【問題】如圖 1-5 中，14 個圓圈表示 14 個城市的位置，而圓圈之間的連線段表示兩城市間的聯絡道路。請說明是否有一條路恰好通過每個城市一次？

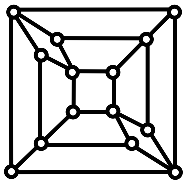


圖 1-5

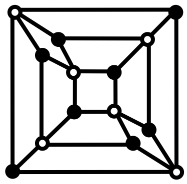


圖 1-6

【解一】如圖 1-6 中，我們恰可將某些城市塗成黑色，而使所有相鄰的兩城市恰好一個塗上黑色，一個沒塗上黑色(就以白色看待)。所以如果有一條路恰可通過所有城市一次，則必定黑白黑白……或白黑白黑……而且黑與白的數目剛好都是七個。但由我們所塗的黑色城市有 8 個，而白色城市有 6 個，確定沒有一條路可以正好通過每個城市一次。

【解二】我們可以由圖 1-7 中發現，有 6 個城市(塗成灰色的圓圈)它們向外的聯絡道路都有 4 條。但是如果選擇的道路只能通過每個城市一次，則這 4 條道路當中至少有 2 條是不能走的，也就是說圖中至少有 $2\times6=12$ 條不能走，而全部的聯絡道路有 24 條，所以最多只剩 12 條道路可走。經由 12 條道路要通過 14 個城市正好一次是不可能的，所以確定沒有一條路可通過每個城市正好一次。

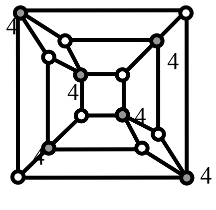


圖 1-7

以上共安排了四個問題，首先從有趣的奇偶數問題引起學習動機，然後引導學生察覺奇偶數與磁磚的配置關係，再進一步轉化爲基本圖論的塗色模型，藉以啓發學生的多元思考。至於城市的道路問題，除了延伸圖論的解法外，也提出不同思維的解題模式，讓學生感受數形樣式的密切關連與豐富多變。

數學的解題世界，可以算是一個「因果輪迴」的世界，而解題思想就在這個來去更迭的時空裡流轉，有時我們可以發現因是果，有時又可發現果也是因；有時可以感覺因還有前因(例如某人以塗色模型解磁磚問題，可能是被制約的結果；但對某人而言，塗色模型可能是平面坐標與奇偶數的學習產物。)，有時可以斷言果還有後果(例如由磁磚問題的塗色解法聯想到城市問題的解法，甚至引發察覺到圖 1-6 中，白色城市向外的聯絡道路都是 4 條，進而找到城市問題的第二種解法。)。筆者認爲一個「務本」的解題內涵，絕對不只爲了達成「做對答案」的目標而已，對於思考的起源與流向、策略的運用與調整、知識的整建與創造，教學者或解題者，皆可爲這些或因或果，做出靈活與妥適的安排。

二、本文：

【問題一】圖 2-1 是由火柴棒拼成的一些正方形，若全部有 n 個正方形($n>0$)，則火柴棒共有多少支？

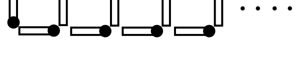
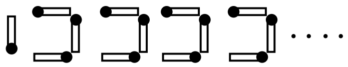
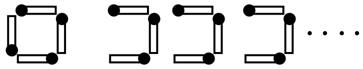


圖 2-1

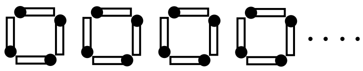
【解答】以下是透過不同的察覺方式與計算過程得出的結果：

(1) 

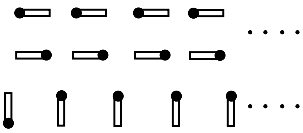
$\Rightarrow 1+3n$

(2) 

$\Rightarrow 4+3(n-1)=3n+1$

(3) 

$\Rightarrow 4\times n-(n-1)=3n+1$

(4) 

$\Rightarrow 2\times n+(n+1)=3n+1$

教師在講解第(1)種解法時，與其說：「一個正方形需要$1+3$根火柴棒，兩個正方形需要$1+3\times 2$根火柴棒……」不如這樣說：「有人一次拿走三根火柴棒後，察覺到正方形數目少了一個；如果他一次三根三根拿走，最後火柴棒只會剩下一根，於是他發現如果要拼成 5 個正方形，需要$1+3\times 5=16$根火柴棒。由這樣的一個察覺中，我們可以推得 n 個正方形需要$1+3n$根火柴棒……」或許有人會問，何必這麼囉唆呢？因爲我們是要培養學生具備良好的察覺習慣，而不是灌輸「老子說了就算」的制約樣式，而且沒有合乎常理的建構學習，除了削弱結論的說服力外，也無法提升學生的察覺與推理能力。

【問題二】如圖 2-2，由 A 地到 B 地被一條等寬的河流橫阻其間，爲了兩地的交通便利，計劃在河面建造一座與河岸(分別爲直線 L 與 M)垂直的橋。請問這座橋該造於何處，才能使 A、B 兩地的居民有一條最短的捷徑？

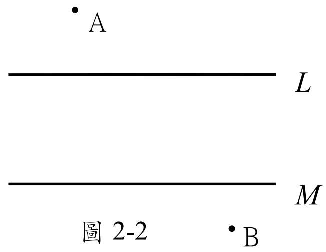


圖 2-2

【作法一與想法】

如圖 2-3，設想河寬爲零，則 A 與 B 的捷徑爲 $\overline{AB'}$ (圖中 $\overline{BB'}$ 長等於原河寬)，所以此問題的捷徑長應爲 $\overline{AB'}$ 長再加上河寬。

(1)作 $\overline{BB'}\perp M$，且使 $\overline{BB'}$ 長等於河寬。

(2)連 $\overline{AB'}$，並交直線 L 於 P 點。

(3)過 P 作 $\overline{PQ}\perp M$，並交直線 M 於 Q 點。

(4)連 $\overline{QB}$。則 $\overline{PQ}$ 爲橋的建造位置，A 與 B 的捷徑 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$。

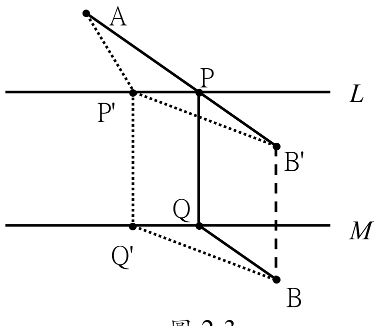


圖 2-3

【說明】在 L 上任取異於 P 點的 P' 點，並作 $\overline{P'Q'}$ 垂直於直線 L，且交直線 M 於 Q'。則 $\overline{AP'}+\overline{Q'B}+\overline{P'Q'}=\overline{AP'}+\overline{P'B'}+\overline{PQ}<\overline{AB'}+\overline{PQ}$，所以作法合於所求。

【作法二與想法】如圖 2-4，設想 A 是

在河岸邊的 A'，則捷徑易推證爲 $\overline{A'C}+\overline{CB}$ ($\overline{A'C}$ 的長等於河寬)。現多了一段 $\overline{AA'}$，所以可作平行四邊形 $A'CBD$，使 $\overline{BC}$ 沿 $\overrightarrow{CA}$ 平移至 $\overline{A'D}$，則此問題的捷徑長應爲 $\overline{AD}$ 長再加上河寬。

(1)作 $\overline{AC}$ 垂直於直線 M，且分別交 L 和 M 於 A' 和 C。

(2)連 $\overline{BC}$，並作平行四邊形 $A'CBD$。

(3)連 $\overline{AD}$ 交直線 L 於 P 點。

(4)過 P 作 $\overline{PQ}\perp M$，並交直線 M 於 Q 點。

(5)連 $\overline{QB}$。則 $\overline{PQ}$ 爲橋的建造位置，A 與 B 的捷徑爲 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$。

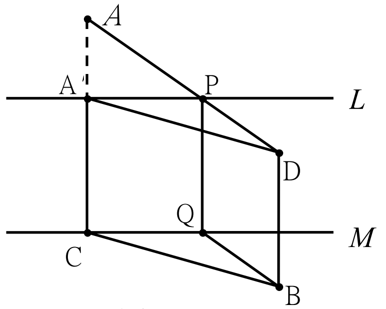


圖 2-4

作法二的步驟的確比作法一稍多，但老師不能跟學生說：那是多餘的！

下面這道問題是給國一學生作爲「三角形數」與「正方形數」的學後評量：

【問題三】求下列三個問題的值：

(1) $20+21+22+\cdots+49+50$

(2) $1+2+3+\cdots+24+25+24+\cdots+2+1$

(3) $10+11+\cdots+29+30+29+\cdots+11+10$

【解法與想法】

(1)學生還記得小學老師教過的「梯形公式」，於是這樣算的：

$(20+50)\times(50-20+1)\div 2=70\times 31\div 2=1085$

也有學生應用「三角形數」的樣式計算：

$(1+2+\cdots+49+50)-(1+2+\cdots+18+19)$

$=\dfrac{50\times 51}{2}-\dfrac{19\times 20}{2}=1275-190=1085$

(2)學生直接應用「正方形數」的樣式計算：

$25^2=625$

有的學生以「三角形數」的樣式計算：

$2\times(1+2+\cdots+24)+25=24\times 25+25$
$=600+25=625$

也有學生很明顯還是以「梯形公式」計算：

$(1+24)\times 24\div 2=300$，$300\times 2+25=625$

(3)學生直接應用「正方形數」的樣式計算：

$(1+2+\cdots+29+30+29+\cdots+2+1)$
$-(1+2+\cdots+8+9+8+\cdots+2+1)-9$

$=30^2-9^2-9=900-81-9=810$

也有學生應用「正方形數」與「三角形數」的樣式計算如下：

$(1+2+\cdots+29+30+29+\cdots+2+1)$
$-2\times(1+2+\cdots+8+9)=30^2-9\times 10=810$

仍有學生鍾愛小學時使用的「梯形公式」：

$10+11+\cdots+28+29=(10+29)\times(29-10+1)$

$\div 2=39\times 20\div 2=390$

$390\times 2+30=780+30=810$

以上每種解法的結果都對。如果由您來評分，您會給相同的分數嗎？(問題三並不是出成「選擇」或「填充」的題型。)

【問題四】

(1)如圖 2-5 中，兩同心圓的圓心爲 O，大小兩圓的半徑分別爲 7 和 4，求畫斜線處的環狀面積？

(2)如圖 2-6 中，兩同心圓的圓心爲 O'，大圓 O' 的弦 $\overline{AB}$ 爲小圓 O' 的切線，P 爲切點，

$\overline{AB}=12$，求畫斜線處的環狀面積？

(3)如圖 2-8 中，兩同心圓的圓心為 O''，大圓 O'' 的弦 $\overline{CD}$ 交小圓 O'' 於 E、F，$\overline{CD}=16$，$\overline{EF}=10$，求畫斜線處的環狀面積？

【解法與想法】

(1)環狀面積等於大小兩圓面積相減

$=\pi\cdot 7^2-\pi\cdot 4^2=49\pi-16\pi=33\pi$

(2)連 $\overline{O'A}$ 和 $\overline{O'P}$ (如圖 2-7)，應用①圓心與切點連線垂直於切線②弦心距垂直平分弦③勾股定理，可推算出環狀面積為

$$\pi(\overline{O'A}^2-\overline{O'P}^2)=\pi\cdot\overline{AP}^2=\pi\cdot 6^2=36\pi$$

(3)有些學生會「如法泡製」，運用第(1)和(2)小題的解法續解這個小題(如圖 2-9)：

連 $\overline{O''C}$ 和 $\overline{O''E}$，並作 $\overline{O''P}\perp\overline{CD}$

所以環狀面積 $=\pi(\overline{O''C}^2-\overline{O''E}^2)$

$$=\pi[(\overline{O''P}^2+\overline{CP}^2)-(\overline{O''P}^2+\overline{EP}^2)]$$

$$=\pi(\overline{CP}^2-\overline{EP}^2)=\pi(8^2-5^2)=39\pi$$

也有學生會運用第(2)小題的「圖樣」與「結果：環狀面積 $=\pi\cdot\overline{AP}^2$」解題(如圖 2-10)：

作圓 O'' 切 $\overline{CD}$ 於 P，所以環狀面積

$=\pi\cdot\overline{CP}^2-\pi\cdot\overline{EP}^2=\pi\cdot 8^2-\pi\cdot 5^2=39\pi$

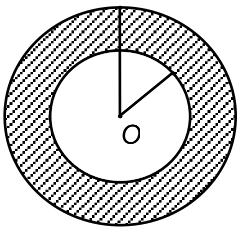


圖 2-5

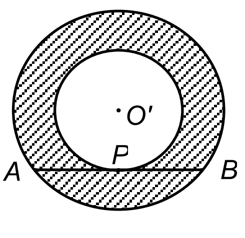


圖 2-6

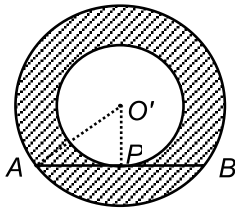


圖 2-7

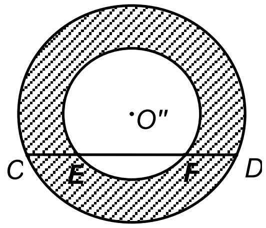


圖 2-8

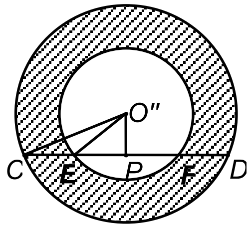


圖 2-9

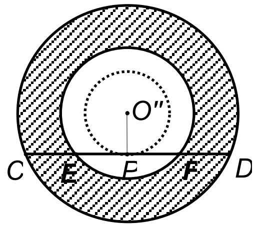


圖 2-10

【問題五】

(1)如圖 2-11 是一個降落傘的圖形，其中三個圓弧的半徑都是 2，且弧度皆為 90 度，求點狀區域的面積？

(2)如圖 2-13 是一支花瓶的圖形，其中圓與弧的半徑皆為 2，三個小弧的度數皆為 90 度，求點狀區域的面積？

(3)如圖 2-17 中有四片葉子的圖形，其中四個圓的半徑皆為 2，求點狀區域的面積？

(4)如圖 2-19 中也有四片葉子的圖形，其中圓與弧的半徑皆為 2，四個小弧的度數皆為 90 度，求點狀區域的面積？

(5)如圖 2-20 中有一個風箏圖形，其中正方形的邊長為 4，兩個半圓弧的半徑為 2，求點狀區域的面積？

(6)如圖 2-22 又是一個降落傘的圖形，其中三個圓弧的度數皆為 90 度，兩個小弧的半徑為 2，求點狀區域的面積？

(為了減少藉由圖形間的外觀大小比較，而輕易看出或猜對答案的情形，所以各小題

的圖形刻意以不同的單位比例畫出。)

【解法與想法】

(1)只要如圖 2-12 切拼成矩形，即可計算得點狀區域面積爲 $4\times 2=8$ 。

(2)有些學生會像圖 2-14 切拼成邊長 $2\sqrt{2}$ 的兩正方形，點狀區域面積爲
$(2\sqrt{2})^2\times 2=16$ 。
有些學生會像圖 2-15 切拼成邊長爲 4 的正方形，所以點狀區域面積爲 $4^2=16$ 。
也有學生會如圖 2-16 切拼成兩個如圖 2-11 的降落傘，所以點狀區域面積爲 $8\times 2=16$。

(3)如圖 2-18，有學生先算一個 90 度弓形(半片葉子)的面積爲 $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot 2^2=\pi-2$ ，所以點狀區域面積爲 $8(\pi-2)=8\pi-16$ 。
也有學生看得出圖 2-16 中有四個如圖 2-11 的降落傘圖形，所以兩片葉子的面積爲 $\pi\times 2^2-8=4\pi-8$ ，所以點狀區域面積爲 $2(4\pi-8)=8\pi-16$ 。

(4)點狀區域面積與第(3)題相等(也是 $8\pi-16$)，只要將圖 2-17 上面兩片葉子與下面兩片葉子位置互換，就會像圖 2-16 一樣。
還是有學生看出圖 2-19 中有降落傘的圖形，於是先計算出兩片葉子的面積爲 $\pi\times 2^2-8=4\pi-8$，所以點狀區域面積爲 $2(4\pi-8)=8\pi-16$ 。

(5)有的學生將圖 2-20 割補成圖 2-21，於是算得點狀區域面積爲 $\frac{1}{2}\times 4^2=8$，也有學生發現圖 2-20 正方形內的空白區域恰可組成一個如圖 2-11 的降落傘圖形，所以點狀區域面積爲 $4^2-8=8$ 。

(6)這個降落傘圖形的尖部可以一個 4×2 的矩形面積扣除兩個四分之一的圓面積(有學生由圖 2-11 的結果或圖 2-23 觀察出)，求得爲 $8-2\pi$ ，而頭部的弓形面積可由圖 2-23 求得爲 $\pi(2\sqrt{2})^2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2=2\pi-4$
所以點狀區域面積 $(8-2\pi)+(2\pi-4)=4$ 。
當然也有學生善於應用勾股定理：圖 2-24 中，降落傘的頭部 90° 弓形面積等於兩個半徑爲 2 的 90° 弓形的面積和，所以點狀區域面積爲 $\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2=4$ 。

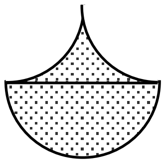


圖 2-11

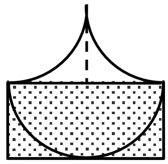


圖 2-12

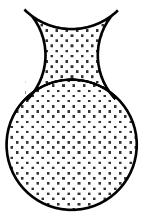


圖 2-13

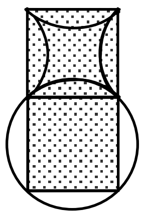


圖 2-14

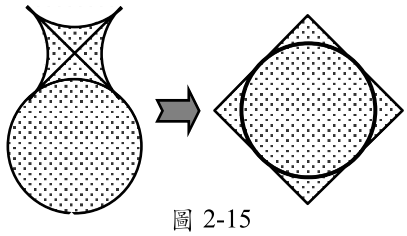


圖 2-15

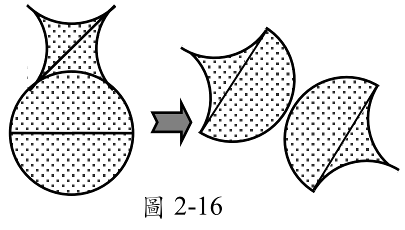


圖 2-16

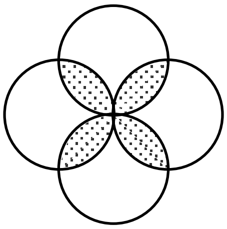


圖 2-17

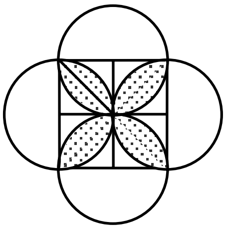


圖 2-18

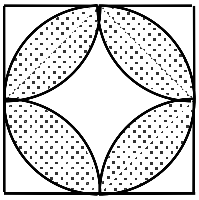


圖 2-19

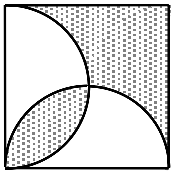


圖 2-20

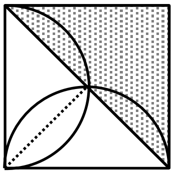


圖 2-21

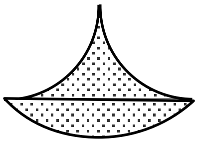


圖 2-22

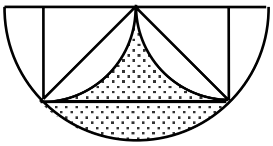


圖 2-23

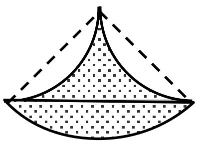


圖 2-24

【問題六】

(1)如圖 2-25 之 ΔABC 中，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=7$，且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，試求 $\overline{AD}$。

(2)如圖 2-26 之梯形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=20$，$\overline{CD}=8$，$\overline{AD}=10$，且 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，試求梯形 $ABCD$ 面積。

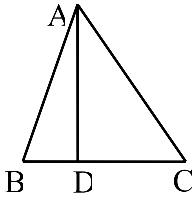


圖 2-25

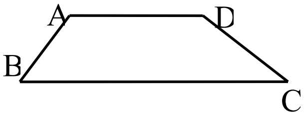


圖 2-26

【解法與想法】

(1)假設 $\overline{BD}=x$，則 $\overline{CD}=6-x$

由勾股定理可得 $5^2-x^2=7^2-(6-x)^2$

解得 $x=1 \Rightarrow \overline{AD}=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$。

若應用海龍公式：先求 $\frac{1}{2}(5+6+7)=9$

ΔABC 面積 $=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$

所以 $\overline{AD}=\dfrac{2\Delta ABC}{\overline{BC}}=\dfrac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$。

(2)如圖 2-27、2-28、2-29、2-30 的作法(作某個腰的平行線段，或作底邊的垂直線段，先找出斜線三角形(三邊為 6，8，10)，再利用此三角形求出梯形的高(有些人察覺到斜線三角形為直角三角形，直接以兩股長乘積除以斜邊長求得高；有些人因受到第(1)小題的問題或圖形影響，仍以(1)的解法求高)。

但有人特立獨行(可能受到 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ 的影響)，先算 $\Delta A'BC$ (如圖 2-31 是三邊為 12，16，20 的直角 Δ)面積為 $\frac{1}{2}\times 12\times 16=96$，所以梯形 $ABCD$ 面積 $=96\times\frac{3}{4}=72$。

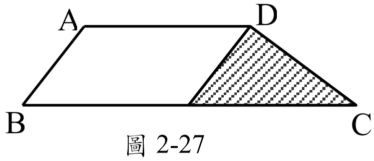


圖 2-27

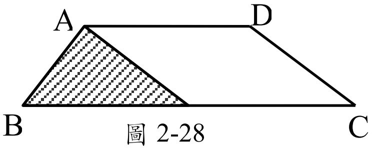


圖 2-28

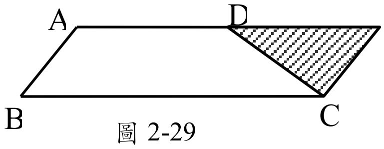


圖 2-29

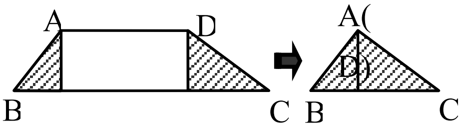


圖 2-30

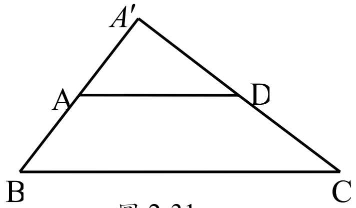


圖 2-31

【問題七】某人在 3 點 x 分看錶出門，8 點 y 分一回到家馬上看錶，他發現了出門與入門錶上的兩次時刻，時針與分針恰在相反的位置，請問此人出門及入門的時刻各是幾時幾分？

【解法與想法】如圖 2-32，依題意可得

$$\begin{cases} x = 5\times 8 + \dfrac{1}{12}y \\ y = 5\times 3 + \dfrac{1}{12}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - y = 480 \\ x - 12y = -180 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 41\frac{7}{13}\text{，}\ y = 18\frac{6}{13}$$

此人在 3 點 $41\frac{7}{13}$ 出門，8 點 $18\frac{6}{13}$ 分入門。

有位學生因爲在整理上面的聯立方程式時，發現了 $x + y = 60$，於是改變解法：也就是說兩次時刻的分針(或時針)會落在錶面 12 時之中心線兩側的對稱位置，當然出門或入門的時、分針指向圓周上的點也是一樣。

以 3 點 x 分而言：$60 - x = 15 + \dfrac{1}{12}x$

$$\Rightarrow \frac{13}{12}x = 45 \Rightarrow x = \frac{540}{13} = 41\frac{7}{13} \Rightarrow y = 18\frac{6}{13}$$

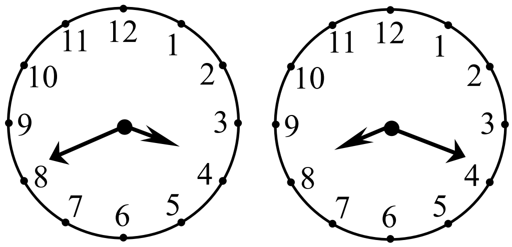


圖 2-32：出門與入門時刻

【問題八】如果走樓梯時，每步只能跨一階或二階，問當階梯數有 10 階與 20 階時，各有多少種走樓梯的方法？

【解法與想法】

設一階的跨了 a 次，二階的跨了 b 次。

依題意知 $a + 2b = 10$，a、$b \in N \cup \{0\}$

$\Rightarrow a = 10 - 2b$

(a,b) 有 $(10,0)$、$(8,1)$、$(6,2)$、$(4,3)$、$(2,4)$、$(0,5)$ 共 6 組解。

故走樓梯的方法共有

$$\frac{10!}{10!} + \frac{9!}{8!} + \frac{8!}{6!2!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{5!}{5!} = 89\ (\text{種})。$$

但是當階梯數爲 20 時，上面的算法似乎有點麻煩！於是做了重新的考量：

①若階梯數只有一階，方法有 1 種：(1)。

②若階梯數共有兩階，方法有 2 種：(1,1)、(2)。

③若階梯數共有三階，方法有 3 種：

(1,1,1)、(1,2)、(2,1)。

④若階梯數共有四階，方法有 5 種：(1,1,1,1)、(1,1,2)、(2,1,1)、(1,2,1)、(2,2)。

⑤若階梯數共有五階，方法有多少種呢？我們可以這麼想：

若第一步跨一階，則後四階有 5 種方法；若第一步跨二階，則後三階有 3 種方法，所以方法共有 $5+3=8$ 種。

⑥依⑤的討論，可以確認：如果階梯數共有 n $(n>2)$ 階時，方法有 a_n 種，則 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$。

因此當階梯數爲 1 階、2 階、3 階……時，走樓梯的方法各有 1，2，3，5，8，13，21，34，55，89……(Fibonacci 數列的部分項)所以走 10 階樓梯共有 89 種方法。

不過若要累加算到 20 階，好像也不是一件輕鬆的事。於是可以考慮採用「剖半」的方法：既然前 10 階有 89 種方法，後 10 階當然也有 89 種方法，但是方法並不是只有 89^2 種，而是還要加上走到第 9 階再跨至第 11 階這種走法的 55^2 種。

所以 20 階樓梯的走法共有 89^2+55^2 $=13946$ 種。

最後筆者爲呼應本文所提有關類化與察覺的一些觀念，稍加改變了我的學生在國三復習考考過的一個問題，也藉此給讀者們動動腦：「如果以問題八的走樓梯方式走 100 階，那麼走法共有奇數種還是偶數種呢？而這個數除以 4 的餘數爲多少？」

三、結論：

專研數學方法論的鄭毓信教授，打過一個有趣的比喻：給你一個水壺，一盒火柴，請利用水龍頭和煤氣爐燒一壺開水？一般人可能會這樣做：

(1)打開水龍頭，將水壺裝滿水；

(2)點燃煤氣爐；

(3)將水壺放在煤氣爐上。

如果水壺已經裝滿了水，那又要怎麼做呢？有人會說：那不就更簡單！只要照著(2)和(3)做，兩步就可完成了。

但數學家會說：如果倒掉水壺內的水，問題就又回到了原來的條件，既然原來的問題已經被解決，那麼這個問題也就得到解決了。

的確這是數學家考慮解題合理性與延展性常用的「濃縮」思考法，也是一般人用來驗證理論真僞的檢核參考。但是理論上已經燒好了十壺水，實際上可能看不到半壺開水！譬如甲和尙給乙和尙準備了幾壺水，無奈乙和尙縱使堅信「水可燒成」的道理，卻偏偏做了「覆水難收」的舉動，這還真的應驗俗諺裏和尙一多就沒水喝的道理呀！理論歸理論，要真把整套理論搬上活生生的現實舞台，有些做法反倒不可理喻了。

同樣的理由，漠視蹲馬步的基本功法、摒棄慢半拍的解程，像這種只顧速效近利的解題教學或解題方法，到頭來學生可能不只不會煮水，還白白把水浪費掉，那就可惜了！