

# 多狹縫的干涉與繞射

徐國誠

臺北市立成淵高級中學

## 摘要

本篇是以 91 年大學指定科目考試中的物理考題裡面的一道題目作為研究對象，文中主要闡述干涉和繞射對多狹縫干涉主極大的影響。由文中我們知道，當狹縫寬度和相鄰兩狹縫的間隔沒有遠大於波長，而在計算主極大（亮紋）和極小（暗紋）時，都不能以高中物理教材中的近似公式計算。另外狹縫的繞射會造成多狹縫干涉第一主極大的位置產生偏移，而此偏移量會隨著狹縫寬度的增加而增加，但又隨著狹縫數目的增加而減少。

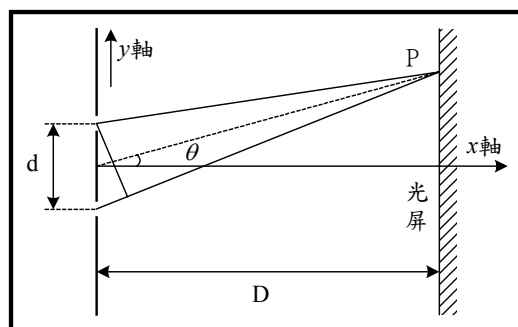
91 年大學指定科目考試中的物理考科出現了這樣一道題目：

在一個雙狹縫干涉實驗中，光波的波長為 550nm，兩狹縫的間隔為 2.20 μm，兩狹縫到屏幕的距離為 50.0cm，則在屏幕上，中央干涉亮紋與第一干涉亮紋的中心，其間隔為何？

題目中兩個狹縫的間隔很短，只有 4 個波長的距離。我們可以利用夫朗和斐繞射（Fraunhofer diffraction）理論，或者稱為遠場繞射（far-field diffraction）理論中的雙狹縫干涉相對強度分布（Ref. [4], p.449），得出這一題的答案：

$$I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad (1)$$

其中  $\beta = (kb/2) \sin \theta$ ， $\alpha = (kd/2) \sin \theta$ ， $k$  為波數， $4I_0$  為中央干涉亮紋的強度， $b$  和  $d$  分別為狹縫本身的寬度和兩狹縫的距離， $\theta$  為繞射角（diffraction angle），如圖一。



圖一 雙狹縫干涉圖。

假設單純只考慮干涉因素的話，此題的答案應該發生在  $\alpha = \pi$  的情況下，也就是

$$\alpha = \frac{kd}{2} \sin \theta = \frac{kd}{2} \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}} = \pi$$

再利用波數  $k = 2\pi/\lambda$ ，可以得到

$$y = \frac{D\lambda}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \quad (2)$$

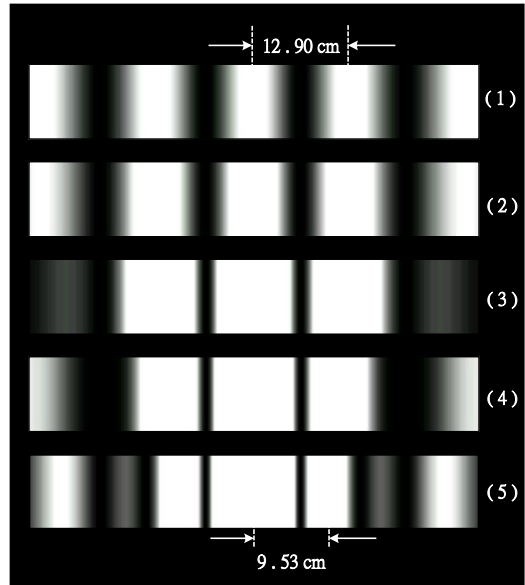
將  $D = 50.0\text{cm}$ ， $\lambda = 550\text{nm}$ ， $d = 2.20\ \mu\text{m}$  代入上式後，可以得出答案為  $12.91\text{cm}$ ，而這個答案與高中物理教材中講授的公式所得出的值並不相同，以高中生熟悉的公式所計算出的答案為

$$y = \frac{D\lambda}{d} = 12.5\text{cm}$$

當然這是因為第 (2) 式中根號裡面的  $d^2 - \lambda^2$  不能近似為  $d^2$  的關係，也就是狹縫間隔與波長的尺度相當時所造成的結果。

事實上這一題的答案是否就是  $12.91\text{cm}$ ，還是有爭議的空間，因為單一狹縫的繞射也會造成干涉亮紋的位置產生偏移，尤其是狹縫的寬度愈寬，其偏移的效果愈明顯。我們就這一道題目，試舉了幾個不同寬度的狹縫，以電腦模擬其干涉第一極大位置偏移的情形，如圖二。由圖二可以很明顯看出，當狹縫的寬度增加時，其干涉第一極大位置就往中央線偏移；當狹縫的寬度為  $0.1\ \mu\text{m}$  時，干涉第一極大位置出現在  $12.90\text{cm}$  處，而寬度達到  $2.0\ \mu\text{m}$  時，其干涉第一極大位置出現在  $9.53\text{cm}$  處，與  $12.91\text{cm}$  差距甚大。

由以上的討論可以知道，影響這一題答案的因素有兩個，那就是狹縫的間隔  $d$  和狹縫本身的寬度  $b$ ，除非「狹縫的間隔遠大於波長」和「狹縫的間隔遠大於狹縫本身的寬度」這兩個條件成立，否則像這樣的雙狹縫干涉問題，都不能以高中物理教材中的公式代入計算。



圖二 不同寬度狹縫的雙狹縫干涉圖形，圖中顯示當狹縫的寬度增加時，其干涉第一極大位置就往中央線偏移。 $b$  為狹縫的寬度，其中 (1)  $b = 0.1\ \mu\text{m}$ ，(2)  $b = 0.5\ \mu\text{m}$ ，(3)  $b = 1.0\ \mu\text{m}$ ，(4)  $b = 1.5\ \mu\text{m}$ ，(5)  $b = 2.0\ \mu\text{m}$ 。(此為電腦模擬繪圖，其中光波波長  $550\text{nm}$ ，兩狹縫間隔  $2.20\ \mu\text{m}$ ，兩狹縫到光屏的距離為  $50.0\text{cm}$ )

類似這樣的影響在多狹縫干涉中也會發生。我們考慮一平行光通過  $N$  個相互平行的狹縫，在遠處光屏上產生的干涉相對強度分布為 (Ref. [4], p.453)：

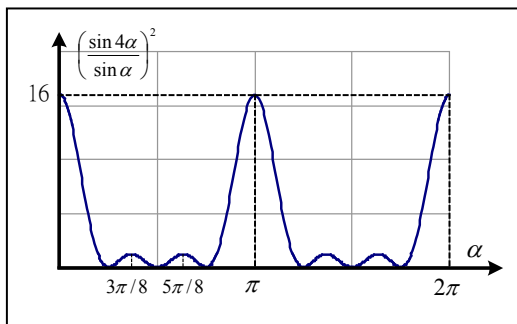
$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (3)$$

其中若  $N = 1$ ，上式即變成  $I(\theta) = I_0 (\sin \beta / \beta)^2$ ，此為單狹縫繞射的形式， $N = 2$  則  $I(\theta) = I_0 (\sin \beta / \beta)^2 \cdot 4 \cos^2 \alpha$ ，即

等於第(2)式的雙狹縫干涉形式；而  $\alpha$ 、 $\beta$  如前面所述。第(3)式中的干涉因素項  $(\sin N\alpha / \sin \alpha)^2$  的曲線圖如圖三所示，其中  $N = 4$ 。由圖三我們知道多狹縫干涉條紋的主極大 (principal maxima) 發生在  $(\sin N\alpha / \sin \alpha)^2 = N^2$  的時候，也就是(取  $\alpha$  為正的情況)

$$\alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

因此第一主極大的位置在  $\alpha = \pi$  時，這個位置與前面雙狹縫干涉的情形相同，與  $N$  的大小無關，所以即使狹縫數目大於 2 個以上，都不太會改變第一主極大的位置，如圖四。



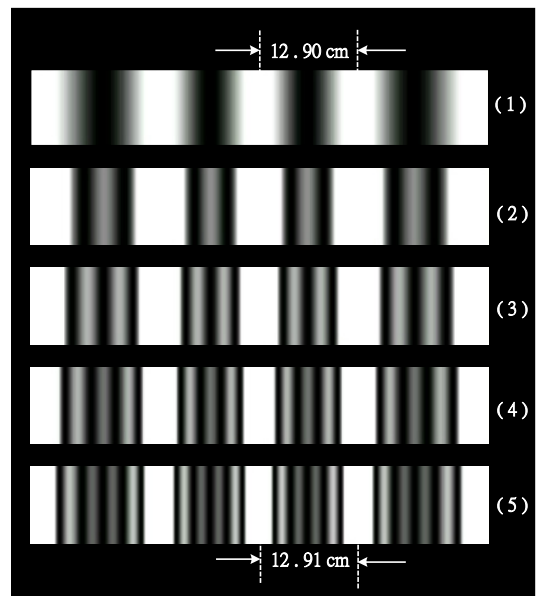
圖三 多狹縫干涉的干涉因素項的曲線圖，其中  $N = 4$ 。圖中主極大的位置發生在  $\alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots$ ，次極大的位置大約發生在  $\alpha = 3\pi / 2N, 5\pi / 2N, \dots$ 。

圖四是不同狹縫數目的電腦模擬多狹縫干涉圖形，每一個狹縫寬度皆為  $0.1 \mu\text{m}$ ，由圖中可以明顯看出， $N$  個狹縫的干涉在相鄰兩個主極大之間共有  $N - 2$  個次極大 (subsidiary maxima)，同時主極大的位置也不會因為狹縫數目的改變而產生變化，圖中

顯示第一主極大的位置，不論狹縫數目為何，大約皆位於  $12.91\text{cm}$  處。至於相鄰兩個主極大之間有  $N - 2$  個次極大，這些次極大的位置「大約」發生在有最大值的時候，即

$$\alpha = 3\pi / 2N, 5\pi / 2N, \dots$$

其中  $\alpha = \pi / 2N$  仍然在中央主極大的範圍內。由圖三中我們可以找到這些主極大和次極大的位置所在。

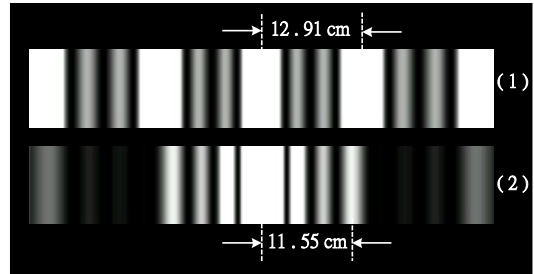


圖四 不同狹縫數目的多狹縫干涉圖形，圖中顯示不論狹縫數目為何，第一主極大的位置大約皆位於  $12.91\text{cm}$  處。每一個狹縫寬度皆為  $0.1 \mu\text{m}$ ， $N$  為狹縫的數目，其中 (1)  $N = 2$ ，(2)  $N = 3$ ，(3)  $N = 4$ ，(4)  $N = 5$ ，(5)  $N = 6$ 。(此為電腦模擬繪圖，其中光波波長  $550\text{nm}$ ，相鄰兩狹縫間隔  $2.20 \mu\text{m}$ ，狹縫到光屏的距離為  $50.0\text{cm}$ )

不過這裡必須要強調的，就是狹縫數目不影響主極大的位置，必須要在狹縫寬度不

改變的前提之下，尤其是狹縫的寬度遠小於相鄰兩狹縫間隔的條件成立時，更容易看見這樣的結果。

前面已經說明了繞射的因素對主極大的位置會產生偏移作用，不過繞射造成的偏移量會因為狹縫數而有所不同，既然繞射對主極大的位置會產生偏移，當然對次極大的位置也會有偏移的效果。我們以這一道題為例，假設  $N = 4$  且不考慮繞射的情況，或者令狹縫的寬度遠小於相鄰兩狹縫的間隔（即  $b \ll d$ ），使得繞射效應的影響降到最低，這樣我們可以計算出在光屏上第一次極大的位置應該在 4.60cm 處（前面提到次極大的位置發生在有最大值的最大地方，那只是一般教科書上大約的說法，實際上次極大應該發生在有最大值的最大地方才對，因此若以  $\alpha = 3\pi/8$  計算第一次極大的位置就會得出 4.71cm 的結果），以及第二次極大和第一主極大的位置分別出現在 8.03cm 處和 12.91cm 處。如果以狹縫寬度為  $2.0 \mu\text{m}$  將繞射因素納入計算，則第一、第二次極大以及第一主極大的位置分別為 4.51cm、7.83cm 和 11.55cm，前面雙狹縫的第一主極大位置在 9.53cm 處，也就是雙狹縫干涉第一主極大的偏移量比四狹縫的干涉第一主極大偏移量多了 2.02cm。圖五是四狹縫的電腦模擬干涉圖形，其中（1）是狹縫寬度為  $0.1 \mu\text{m}$ ，其第一主極大和中央線的距離為 12.91cm，（2）是狹縫寬度為  $2.0 \mu\text{m}$ ，其第一主極大和中央線的距離為 11.55cm。其餘不同寬度狹縫的干涉第一、第二次極大以及第一主極大的位置見表一。



圖五 四狹縫的電腦模擬干涉圖形，其中（1）狹縫寬度為  $0.1 \mu\text{m}$ ，其第一主極大和中央線的距離為 12.91cm，（2）狹縫寬度為  $2.0 \mu\text{m}$ ，其第一主極大和中央線的距離為 11.55cm。（其中光波波長 550nm，相鄰兩狹縫間隔  $2.20 \mu\text{m}$ ，狹縫到光屏的距離為 50.0cm）

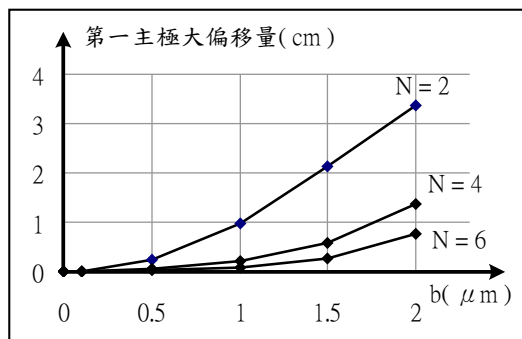
表一 狹縫寬度不同的四狹縫干涉之第一次極大、第二次極大以及第一主極大的位置表。（其中光波波長 550nm，相鄰兩狹縫間隔  $2.20 \mu\text{m}$ ，狹縫到光屏的距離為 50.0cm）

狹縫寬度 ( $\mu\text{m}$ )	第一次極大 (cm)	第二次極大 (cm)	第一主極大 (cm)
$b \ll d$	4.60	8.03	12.91
$b = 0.1$	4.60	8.02	12.91
$b = 0.5$	4.59	8.02	12.86
$b = 1.0$	4.58	7.99	12.69
$b = 1.5$	4.55	7.93	12.32
$b = 2.0$	4.51	7.83	11.55

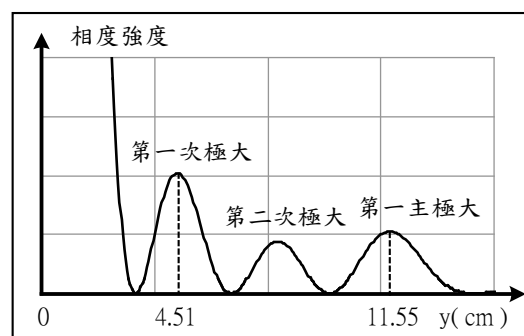
從這裡我們似乎也可以得到一個結論，那就是狹縫數目愈多，繞射對主極大的偏移量也就愈小。那是因為狹縫數目愈多，主極大（亮紋）的寬度就愈狹窄（參見圖四），而第一主極大旁邊靠近中央線的那一條暗紋，會隨著狹縫數目增加而遠離中央線，因此當

狹縫的寬度增大時，雖造成第一主極大往中央線偏移，但是靠近中央線的那一條暗紋卻又抵消掉一些偏移量，所以繞射對主極大的偏移量，會隨著狹縫數目的增加而減少。圖六是第一主極大偏移量對狹縫寬度的關係曲線，由圖中可以看出第一主極大的偏移量，隨著狹縫寬度的增加而增加，但又隨著狹縫數目的增加而減少，當狹縫數目達到六時，狹縫寬度為  $2.0 \mu\text{m}$  的第一主極大偏移量只有  $0.77\text{cm}$ 。

另外狹縫的寬度與相鄰兩狹縫間的距離差不多時，會造成第一主極大的干涉強度迅速降低，如圖五中的(2)，狹縫寬度  $2.0 \mu\text{m}$  與相鄰兩狹縫間隔  $2.20 \mu\text{m}$  相差不大，其第一主極大強度反而比第一次極大強度還小（如圖七）。這是因為繞射產生的第一條暗紋出現在  $\beta = \pi$  時，由此可以得出繞射第一條暗紋大約出現在距中央線  $14.30\text{cm}$  處（繞射第一條暗紋的位置也不能以高中物理課程中的近似公式  $y = D \lambda / b$  計算，因為此時  $\lambda \ll b$  的條件並不成立，如果以這個公式計算會得到  $13.75\text{cm}$  的結果），與第一主極大的位置  $11.55\text{cm}$  很接近，因而使得第一主極大的干涉強度驟降，而小於第一次極大的干涉強度。



圖六 第一主極大偏移量對狹縫寬度的關係曲線，由圖中可以看出第一主極大的偏移量，隨著狹縫寬度的增加而增加，但又隨著狹縫數目的增加而減少。（光波波長  $550\text{nm}$ ，相鄰兩狹縫間隔  $2.20 \mu\text{m}$ ，狹縫到光屏的距離為  $50.0\text{cm}$ ）



圖七 四狹縫的干涉相對強度圖，其中狹縫寬度為  $2.0 \mu\text{m}$ ，光波波長  $550\text{nm}$ ，相鄰兩狹縫間隔  $2.20 \mu\text{m}$ ，狹縫到光屏的距離為  $50.0\text{cm}$ 。圖中顯示第一主極大強度比第一次極大強度還小。

## 參考文獻

1. 李冠卿，近代光學，初版，台北，聯經，民 77。
2. 陳錫桓，光學，近代物理，初版，台北，中央圖書，民 72。
3. D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, *Fundamentals of Physics Extended*, 5th ed., U.S.A., John Wiley & Sons, 1997.
4. E. Hecht, *Optics*, 3rd ed., U.S.A., Addison Wesley Longman, 1998.

（下轉第 40 頁）