

製作數學科展的一些點子

全任重

國立清華大學 數學系

最近，有好幾個朋友問我相同的問題：「我的孩子想做數學科展，該怎麼辦？」我回答如下。

一、電腦的應用

科學展覽會已經舉辦了四十幾年。最近二十餘年，無論在呈現的型態、研究內容、書面及口頭報告方式等，都產生了重大的改變。促使科展改革的主要原因是 1982 年爆發的電腦革命。電腦對於科展產生的影響包括：

(一)工作程序

當預備一份傳統科展時，老師與學生必須經歷作實驗、收集資料、整體策劃、撰寫海報、修改錯誤等層次分明的步驟。自從電腦參與製作科展的行列之後，人們可以脫離線性思考的拘束：開始工作，設定好的草稿及大綱極可能發展成為完稿時海報的一部份；實驗進行了一半，忽然搜尋到資料豐富的網頁，該怎麼辦？將它融入參考資料裡就好了；電腦閒著沒事做？可以指揮它們來進行平行工作，然後綜合各機的輸出天依無縫結合於一紙。總之，電腦帶來的跳躍式思考模式打破了傳統規矩，為科展帶來動態的、新鮮的、活潑的工作衝力。

(二)數學溝通

科展製作提供理想的訓練數學溝通的機會。為了精簡內容，學生必須瞭解如何將三

句話用一句來表達。為了濃縮文字篇幅，學生必須思考有那些數學物件能用符號來取代，有那些文字敘述可用數學式子來取代。口頭報告時要想辦法在五分鐘內講完十五分鐘的話。恰當的使用數學軟體、數學文書處理系統、網頁及簡報軟體往往能夠提升數學溝通的能力。大家都熟悉「一幅畫能取代一千字」的秘訣，動態幾何軟體更能令使用者步入「以一幅動畫取代一千幅靜態圖片」的境界。若干年前，數學排版是昂貴的技術及藝術，全世界只有少數幾家出版商擁有足夠的人才及設備來製作數學文獻。如今同樣的工作得以利用數學文書處理系統來進行。科學時代的考生往往依賴書法取得考官的首肯，現代的業務報告幾乎完全依賴 PowerPoint 的功力促使老闆點頭。雖然只是表面功夫，懂得如何利用 PowerPoint 來壓縮時間乃是科展簡報致勝之道。

(三)數學計算

電腦的基本架構建立於離散、有限的世界。電腦只能代表有限多個浮動點數字。然而，數學主流所探討的問題牽涉到「無窮」或「連續性」的概念。傳統的數值計算往往無法有意義、有效的用來探討這一類的問題。然而，除了傳統的數值計算以外，現代的數學軟體附有符號運算及繪圖功能來實施符號計算及圖形計算。透過符號運算、代數

運算電腦得以嚴謹的進行數學證明。數學科展中幾乎少不了圖片的出現。一般來說，平面圖比較適合在動態幾何的環境下，利用尺規作圖的原理來完成，而立體圖則以參數式子「直接」產生最為輕鬆愉快。抽象數學有能由尺規作圖來呈現視覺計算者，乃是上上等的科展題材。

(四) 網頁製作

現代的噴氣客機在試飛以前必須進行電腦模擬，這是將抽象概念轉變為具體實物之變遷過程。將科展的內涵轉變為海報展示之過程中，網頁製作頗能增強工作效率及連繫。網頁製作之效益包括：

1. 協助資料搜索

凡是「活」的網頁都具有超連結。超連結的任務是將一個概念與另一概念相連接。網際網路可視為一本巨大的百科全書。雖然網路搜尋引擎 Google 無所不知，使用者必須將有意義的資料建立網頁收集相關的超連結以增進搜尋之效率。

2. 協助資料整理

收集到的資料必須重新組織才能被吸收消化。感謝現代通用的電腦作業系統及廉價的硬碟，收藏及整理龐大的資料庫以已經不需要昂貴的設備來維持。

3. 協助口頭簡報

網頁能夠促進跳躍性的思考，PowerPoint 適合配合線性思考。如果口頭簡報偏向非線性的思考，則應該採用網頁當作報告工具。建立網頁的功夫絕對不會消失，再糟糕的狀況下總能夠輕而易舉地把網頁的內容剪貼融入 PowerPoint 中。

4. 促進經驗流傳

透過網際網路，網頁能夠將訊息傳遞到世界的每一個角落，而 Google 的資料倉庫會自動替您保留存檔。科展製作的成果代表某時某地某人對於某科學題材進行的思考及實驗之見證。資料及訊息透過網頁傳播所添增的效益將遠超過科展海報或 PowerPoint 所能達到的。

5. 打知名度

科展的成果代表參與者的思考過程及努力。無論是功勞或苦勞，網路上記載的名次及獎項都能提醒參展者未來的努力目標、研究方向及興趣。

6. 促進學術交流

當其他學校、其他國家的教師或學生極可能因為閱讀到我們的科展網頁而獲得寶貴的靈感。如此建立成的連絡管道及 e-mail 交流將會帶來非筆墨所能形容之驚喜。

7. 申請升學就業之預備

除非身為科展評審，大學教授未必有機會親身接觸過入學申請者。然而，若能提供科展網頁作為申請案件之參考資料，申請者除了提供了具體的科學工作事實以外也大大的減輕評鑑者的工作，也為自己入學或就業申請之事加分！

8. 網頁本身就是科展的成品

科展競賽與網頁設計是兩碼子事。但，若是科展作品就寫明如「xxx 網路資料庫之探討」的標題，主辦單位豈有理由禁止網頁本身當作成品來展示？

二、穿大人衣服？

在挑選國際數學奧林匹亞競賽的題目時，命題小組總會遵守這樣的慣例；任何一道出現在競賽的題目都必須存在完全依賴中學數學作答之解。此外，若學生熟悉高深程度的數學，其解答之品質未必會比使用基礎數學作答來得精彩。

這樣的慣例鼓勵中學生熟練基礎數學的方法。數學競賽的基本理念認為中學生所學習的基礎數學方法足以簡潔的、強而有效的解決許多難題，而熟練基礎數學方法絕對不會降低學生對於高深數學的好奇心或學習之效率。

什麼是理想的數學科展題目？依照上述的理念，理想的數學科展題目應該是利用中學生的數學能力及基礎數學方法即能夠解決的問題。最好能達到：若將相同的題目拿給大學生使用大學數學方法來做，其效果未必顯得比中學生做得更有創意。

「數學成熟度」是個用來評估數學天份的一個抽象的標準。大數學家 Srinivasa Aiyangar Ramanujan 利用基礎數學方法解決了許多超時代的數學問題。除了對於數學具有濃厚的興趣與堅強的毅力以外，Ramanujan 超強的數學成熟度起源於自學期間解答了習題書 George S. Carr: A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics 當中所有的 6165 道題目！

我們不時在科展中見到一些建立於苦勞的作品，而整份作品對於學過大學線性代數的人來說只需三句話就能夠徹底的解決。

我們有必要用培養天才童星的方法來培

養天才數學家嗎？

三、把握科學實驗精神

數學家有很多弱點，最不科學的一點是不公開他的草稿紙。

數學家只公開成功的結果，絕對隱藏失敗的經驗。您可曾經見過數學論文中出現「我嘗試證明某某定理，結果失敗了！」的字眼？

數學家甲花了 n 小時嘗試解決某猜測，得不到任何結論。數學家乙不知道數學家甲曾經白花工夫，也嘗試解決相同的猜測，再次重複數學家甲的虛工。如果數學家乙得知數學家甲曾經採用某方法而進入了死胡同，他自然會避免該方法而轉往其他方向而繼續努力。

現代數學課本也有很多缺點，最普遍的是違背了數學歷史發展的過程，先討論一般性然後進入特殊性。這樣的學習過程往往使得學生下課後產生「見林不見樹」的感覺，使得學生能夠洋洋大觀的背誦偉大定理，卻舉不出單獨的有趣實例。

既然數學是科學的一支，數學的發展與教學當然要符合科學實驗精神。最能夠掌握該精神的活動莫過於數學科展。

透過數學科展學習者辛苦了多日的草稿紙的內容終於得以光明正大經由高科技的電腦排版公諸於世。

數學科展應該忠誠的展示出具體的數學發現的過程，因此合理的探討步驟應該先發現特殊的例子然後進而推導到一般的情況，完全符合歷史演變的心路歷程。

這麼看來，數學科展最忌諱那些讀起來

就像數學論文的作品的出現。

記得，要展示出科學實驗精神。

四、靈感的來源

任何一類的數學活動都珍惜其中具有創意的成份。數學科展評審的下意識裡，極有可能將作品創意的比重由官方規定的百分之三十調高到百分之九十！

創意來自靈感。靈感又由如何醞釀而成呢？

(一)採取最缺乏創意的手段

某明星學校之某名師曾經在網頁裡，展示出整系列的科展題材，然後敲鑼打鼓的尋找學生將這些構想實現成爲科展。這實在是極具創意的做法：學生們受到網頁的挑戰之後立即鼓舞士氣，產生出富有創意的作品。當然，其他教師或學生若不假思索的採用這些題材，雖然獲得靈感的手段缺乏創意，但是並不表示學生們因此而喪失作科展的靈感。總之，凡是具有創意的靈感都具有傳染性。不信的話，可以試試看！

(二)由歷史文獻中挖寶

翻開一本 19 世紀出版的微積分課本與一本 2003 年出版的微積分課本作比較，讀者會發現：19 世紀所寫的對於概念及問題的動機講解得更周到，更明瞭。過去數十載，人們著迷於「數學的證明愈短小則愈美麗」的理念，把數學的邏輯推理愈變愈流線，逐漸逐漸的濃縮甚至隱藏定理證明動機之說明。然而，受到尺寸的限制，數學證明的細節往往無法完整呈出來，但是評審卻會特別留意您對於「爲什麼要如此證明」的解釋。如此

看來，老舊的書本及論文的思路蠻符合科展評審所重視的創意思考。

要到哪裡去尋找歷史文獻？很可惜，圖書館大都缺乏眼光及財力去選購那批頗能激發想像力的舊書。書店呢？要找對老闆才好。要尋找具備高尚數學品味的那家。好在，世界上最好的東西是免費的：

1. JSTOR:

<http://www.jstor.org/cgi-bin/jstor/gensearch>

此過期期刊全文資料庫收錄約 20 種數学期刊全文，其中與基礎數學相關的包括：

American Mathematical Monthly 1894-1997

Mathematics Magazine 1947-1997

National Mathematics Magazine 1934-1945

Mathematics News Letter 1926-1934

College Mathematics Journal 1984-1997

Two-Year College Mathematics Journal
1970-1983

台灣已有 30 間學校得以連線使用此資料庫：

http://www.jstor.org/about/participants_in_tl.html#Taiwan

2. The University of Michigan Historical Mathematics Collection:

<http://www.hti.umich.edu/u/umhistmath/>

此處收藏了大約 200 本出版於 19 世紀至 20 世紀初的基礎數學書本之影像。讀者得以完全免費使用。該網站並且提供多重層次之搜尋服務。警告：20 世紀以前的出版並不十分嚴謹，瀏覽時要特別留意內容極其荒謬的作品。

3. Cornell University Library Historical

Mathematics Monographs:

<http://historical.library.cornell.edu/math/>

此處收藏了 456 本基礎數學書本之影像。完全免費使用。

(三) 工具書，百科全書，數學手冊

正常的數學教學不大使用工具書。工具書對於知識已經略加消化處理，其組織倒可視為創意的範本。

1. 在眾多的數學手冊當中要以 Abramowitz and Stegun: Handbook of Mathematical Functions 一書最具權威，出版已經超過半個世紀。現在讀者得以在網上查詢及閱讀該書：<http://jove.prohosting.com/~skripty/>

現有 Digital Library of Mathematical Functions 一研究計畫進行中為此書補充及更新，預定於 2004 年完稿：<http://dlmf.nist.gov/>

2. Eric Weisstein's World of Mathematics: <http://mathworld.wolfram.com/> 這是一本基礎數學百科全書。由於作者並非專業數學家，內容錯誤頻繁，為讀者帶來許多困擾。正是因為失誤累累，修正該書及網頁所蘊藏的地雷之時極可能啟發異想天開的科展靈感。

(四) 數學遊戲

有許多數學家終身沉迷於數學遊戲。對於他們來說工作與遊戲沒有區別。數學科展當然可以當作數學遊戲去進行以貫徹「工作即娛樂」之理念。老前輩 Martin Gardner 即以數學遊戲為題材出版了數十本優秀的科普著作，成為當今最具數學影響力的非數學家。然而，Gardner 作品的靈感卻挖自跨越 19-20

世紀的「老老前輩」Henry Ernest Dudeney。這許多老前輩曾經風靡一時的「數學魔術」正排隊等待在數學科展中重展雄風！

數學遊戲的資源雖然豐富，但是似乎仍然處於雜亂無章的境界。網際網路所收集的資料當中要以 David Singmaster 之研究得最為深入：

<http://anduin.eldar.org/~problemi/singmaster/material.html>

大家可以由以上的「資料的資料」中找尋靈感。

科展重視動手操作。數學科的作品當中最吸引人的莫過於附有具體玩具的那一類。收集具體數學玩具的地方不多，試試看這裡：<http://ccmp.chiuchang.com.tw/catalog/toy.php>

(五) 電腦模擬

電腦模擬可以用來策劃數學科展。進行電腦模擬需要數學軟體。動態幾何軟體有 Cabri Geometry 及 Geometer's Sketchpad。符號運算軟體有 Maple 及 Mathematica。在任意一台安裝好 Office 之電腦都能作試算表的運算。這是最容易產生數字圖案及作數值運算的工具。歡迎各位參觀：<http://poncelet.math.nthu.edu.tw/>

五、培養良好數學習慣

培養良好數學習慣是任何一門數學學科、任何一個年齡層次的數學教學都要配合實行之事。然而，每當測驗時出現的都是選擇題或填充題時，人們會很自然的發展出一套不良的數學習慣。

良好的數學習慣要做到：

- 1.發音準確，尤其是專有名詞。
- 2.避免濫用符號。
- 3.語氣中肯，不誇大，不武斷。
- 4.避免模稜兩可之名詞或形容詞。
- 5.書寫及口述都採用完整句子。
- 6.避免自創名詞、不靠想像發音。
- 7.注意口頭禪。
- 8.避免簡寫字。

六、數學表達

有創意的靈感可遇而不可求。靈感是無法傳授的。然而，完美的數學表達能力卻可經由訓練而獲得。訓練數學表達能力之要點有：

- 1.思考何時使用符號、何處避免符號。
- 2.注意符號之選取及一致性，相同層次的物件採用同類的符號。
- 3.註碼之使用，思考使用註碼之必要，避免超過兩層的註碼。
- 4.注意文法，注意標點符號之使用是否合乎文法。
- 5.專有名詞之拼法與發音絕對要求正確。
- 6.分辨 each, all 之差異，分辨 contained in 之含糊性。
- 7.避免使用如「明顯的」、「容易得到」等字眼。
- 8.長話短說，避免使用複雜句型，避免使用艱深字眼。

七、數學題材

由過去作品來分析，愈是熱門的題材愈是缺乏創意。在這裡我們介紹三項比較冷門

而具有數學實驗潛力的數學科展題材：

(一)平面曲線：

牛頓與萊布尼茲還沒發明微積分以前，心臟線早已成為熱門的數學研究對象。視覺幾何曾經享有數百年的熱烈的探討。二十世紀以後，這類美妙的具體數學逐漸被人們遺忘。透過動態幾何軟體學習者得以輕易的展示出圓的內、外擺線（如星狀線、心臟線、腎臟線、三角線）彼此之間的幾何關係。

(二)立體模型：

翻開歷史文獻我們不得不佩服數百年前已有書本一打開時會跳出立體幾何圖片來傳播幾何知覺。半世紀前的數學教室的設備雖然簡陋，但是都會擺設五個博拉圖正多面體的模型。如今我們仍然能夠維持傳統，透過數學軟體「親自動手」來製作這些模型。雖然做出來的「實物」只是個虛擬的 VRML 影像，但是透過參數方程式的裁剪及滑鼠的操縱，我們所獲得的幾何知覺與樂趣可超過傳統模型所能給予的。除了博拉圖正多面體以外，透過參數方程式我們還可建立不少書本中無法找到的立體模型。

(三)數字圖案：

凡是具有規律性的幾何圖案都能帶來視覺上的美感。凡是具有規律性的數字圖案都能引發強烈的數學靈感。九九乘法表、Fibonacci 數列、Pascal 三角形、Stirling 數字、Catalan 數列等數字圖案一直存在於數學家的腦海裡。古代的修道士依靠堅強的毅力進行特殊數字圖案的探討。現代學子可以利用試算表與古人一比高下。

八、保持對數學的好奇心

請教數學家，您為什麼要作研究？

回答：因為好奇。

沒錯，數學生命是靠好奇心來維持的。

任何一道定理，無論如何的深奧，總是會導致一些其他未解決的問題。在論文結束時提出 open question 已經成為標準數學傳統。提 open question 的目的在於永無止境的好奇心之維持。

數學科展作品以 open question 結尾並不表示事情做得不完整，而表示目前只是一連串有趣工作告一段落，精彩的還在後頭。

除了 open question 以外，科展也能夠朝向以下各方向使得作品更為有趣：製作相關的圖像及動態模擬、提供第二種甚至第三種證明、由其他領域來看相同的問題、由科學實驗角度來看問題、問題之推廣或特殊例子、探討不容易察覺的退化情況、尋找具體的生活實例。

九、表面功夫

經辛苦了好幾個月，科展成果終於要面對現實，公開給評審、同學、老師及一般大眾鑑賞。科展成果的評分依據三件事：海報之呈現、書面報告及口頭報告。

(一)海報

任何一門科展對於海報的外觀與內涵都要求：遵守論文格式、整齊、美觀、有條理、合乎邏輯、符合規定、書寫工整、合乎文法、杜絕錯字別字、避免使用誇張之字體及配色及遵守安全規則。圖表方面要標示清楚 x 軸 y 軸代表何種數量，何種單位、要留意長寬

之比是否恰當。

每年參加國際科展 ISEF 時，我國代表隊會將參展海報隨身攜帶，進入比賽會場之後隨即張貼於事先預備好的看板上。展覽結束之後，同學們會將看板依照拆積木原理裝入木箱，然後由貨運公司運送到倉庫儲藏以備下一年參展之用。每年傳播媒體熱心報導代表隊為國爭光之點點滴滴。然而，並不是很多人留意到這些看板倒是默默無聞的為國爭光。

不要小看這幾片看來不甚起眼的幾片子，若不是經過一番設計我們不可能享有如此美觀輕巧、符合環保原則、容易安裝及拆除、容易裝運、符合安全規則、符合大會規定尺寸的看板。每當其他隊伍忙碌得一頭大汗敲敲打打之際，見到我隊輕鬆說笑之際一切架設妥當，使得大家感覺到「尚未出戰已經勝利」。

但是，仔細看看隔岸的那隊…乖乖，居然在看板上挖個大洞！原來塞入一片液晶螢幕！安全檢察人員來了…大會並沒有文明禁止液晶螢幕之使用，只要電線不走火就好了…

「科技更改科展」不服也得服！

(二)書面報告

按照科展規定每幅海報的尺寸必須合乎規定，因此科展的完整內容只能夠透過書面報告來呈現。傳統的書面報告需要經過排版、校對、印刷、裝訂等過程。如果內容過份豐富，參賽者需要耗費體力把作品遞送出去，而受文者需要耗費體力接受，整個過程不經濟、不環保。若能將書面報告的內容存

放於光碟，受文者得以輕鬆的去閱讀，甚至得以利用電腦作搜尋及計算等工作。由於光碟製作成本低廉，拿它與他隊選手交換紀念品亦是極有意義之事。

(三) 口頭報告

好像大家都在用 PowerPoint 作簡報。

這是 PowerPoint 之優點：

- 1) 豐富的美工資源。
- 2) 頗能討好一般觀眾。

這是 PowerPoint 之缺點：

- 1) 花枝招展的畫面令人分心。
- 2) 受到線性思考的拘束。
- 3) 學術肢體語言之表現受限制。
- 4) 易學難精。
- 5) 外在美凌駕於內在美之上。
- 6) 強調撰寫減化內涵之標題式文字，冷落書寫完整字句之訓練。
- 7) 意味著廣告式的霸道宣導。
- 8) 缺乏計算功能。
- 9) 無法進行臨場應變。

有必要使用 PowerPoint 嗎？

十、胸有成竹

一位優良數學教師必須花時間備課。爲了作一場完美的數學秀，身爲主角的教師要事先將授課內容消化，融會貫通，思考講解時的邏輯次序，自我管理時間與內容的分配。走火入魔者甚至在上課前設計好在何時轉換面部表情，深呼吸，然後爆出一則笑話。

科展的基本精神在於訓練主動的學習，猶如作數學秀一番，教師要懂得如何牽著學生的手來引導他進入數學實驗的世界。老練

的教師瞭解「不與學生搶先作答」的奧妙。更老練的懂得如何將熟如指掌的數學內容偽裝成「自然產生」的問題來引導學生。一場完美的數學秀會令人感受經歷到精彩的藝術表演一般。科展的訓練也能帶來類似的戲劇性的體驗嗎？當然可以！教師必須要事先做好功課，反覆思考及演練學生的思考模式以夠掌握各式各樣的解答，掌握所提出的問題，事先預計到所需要的工具等。如此，科展活動將帶來主動學習無比的衝勁。

結語

數學科展是一項極有意義的學術交流活動。得獎的名次只是一時之事，再過一、兩年再也沒人記得排名的次序。然而，參賽者的言行談吐反映出學校基本訓練的程度、使用儀器設備之熟悉程度、使用電腦之心態、校風、老師的教學理念以及老師的數學素養等。這些印象絕對不會成爲競賽之評審標準，但會停留在人們的腦海中許久許久。除了得獎之鼓勵以外，學生的最寶貴的收穫乃是有機會與大師們討論問題，學習解決問題之工具及方法。培養小小科學家最理想的過程也不過如此。

參考資料

1. Paul Halmos, I want to be a mathematician: an automathography, Springer-Verlag, New York, 1985
2. Edward Tufte, PowerPoint Is Evil, <http://www.wired.com/wired/archive/11.09/pt2.html>

(下轉第 69 頁)