多面體重心的幾何作法

鄭元博

國立臺灣師大附中

前言

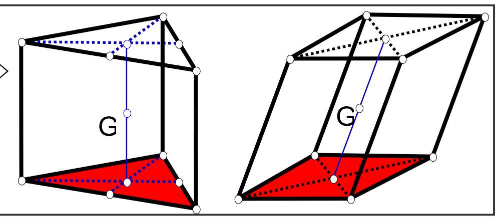
今年初我在蔡老師與鄭老師共同指導下以「滿足 $\sum_{i=1}^{n}\overline{MP}=\vec{0}$ 之 M 點是否為重心之探索」（詳見參考資料【5】）為題參加 2003 台灣國際科展；緣於競爭太過激烈之故，我們的作品未能獲獎。但我們仍然深信，作品內容對高中立體幾何的教學上，應具相當程度的參考價值！因此在鄭老師指導下，先將其中有關多面體重心的幾何作法部分做專題論述，希望能借貴刊一隅發表，提供給更廣大的高中師生們做為教學上的參考；其他部分等以後再伺機發表就教於學界賢達，懇請不吝斧正。

本文

有關平面圖形重心問題的探討，已有許多文獻可供參考，如文後所列之參考資料【1】及【4】即是二則；但對於空間之多面體重心的探討，在數學上則仍甚少見到；偶而一瞥，也多止於三角錐的層次。有關一般多面體重心的探討，在物理上似乎較習慣用懸吊的方式處理：將多面體懸吊起來，則平衡時懸線張力的方向必通過重心；因此，由兩個不同位置所得的兩直線（懸線張力）交點處即重心所在。我們則以幾何作圖觀點著眼，使用數學的方式處理。我們以＜圖二＞所示般看待三角錐的重心，再據以推展至一般多面體上。

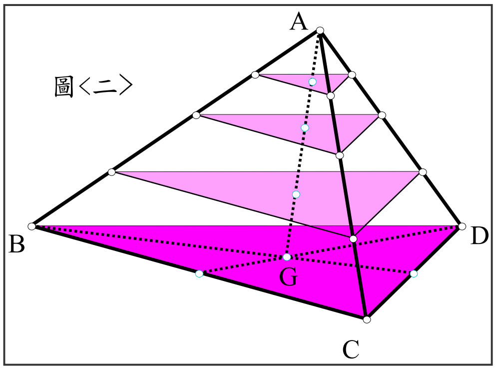
在多面體中，以柱體的重心最為淺顯。參見＜圖一＞所示：圖左為一直三角柱，圖右則為一斜四角柱（平行六面體）；事實上，無論是何種角柱或圓柱，由於其截面都相等，柱體的重心顯然恰在上、下兩底面重心連線的中點處！

圖<一>



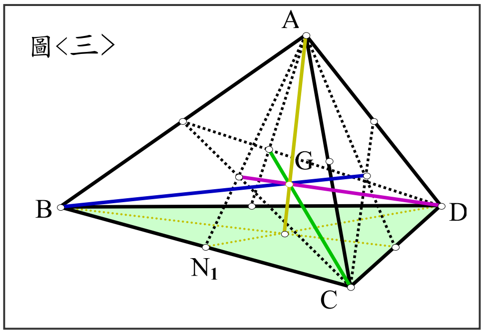
此外，一般多面體重心的尋求則須運用解題策略做原則性處理。由於任意（包含凸及凹）多面體必可被切割成三角錐的組合立體（參見【2】及【3】），如同平面上的多邊形都可切割成三角形的組合圖形般，因此我們從三角錐的重心著手，進而推演至兩個三角錐的組合（六面體），以至三個…到 n 個三角錐的組合（任意多面體）情形。

三角錐的重心如何尋得？我們將它想像成如＜圖二＞所示般，由無限多個平行於底面的橫切面所構成；而每一橫切面都是相似三角形，它們的重心很整齊地排列在一直線上，即頂點到底面的重心連線。這告訴我們：一三角錐的重心應在每一頂點到其對應的底

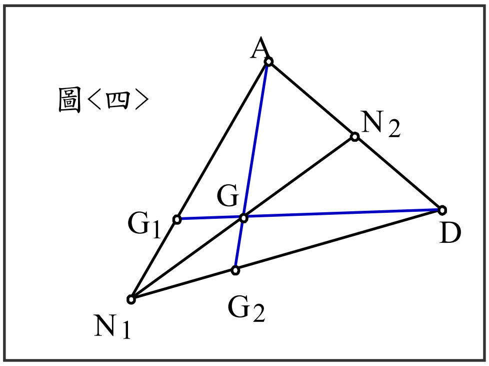


圖<二>

面的重心連線的交點上！進一步說，**一三角錐的四個頂點到其對應的底面的重心連線必共點，而此交點即為此三角錐的重心。**參見<圖三>所示——



圖<三>



圖<四>

我們希望能簡化三角錐重心的尋求過程，於是對<圖三>中G所在的一截面AN_1D進行探索，其中N_1爲BC稜線的中點；對照<圖三>及<圖四>兩圖來看，G_1爲△ABC的重心，G_2爲△BCD的重心，則AG_1：G_1N＝2：1＝DG_2：G_2N；另設AG＝k GG_2，則

$$\overrightarrow{N_1G} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{N_1A} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{N_1G_2}$$

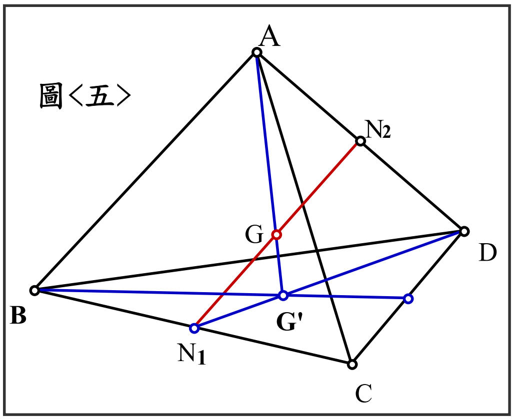
$$= \frac{3}{k+1}\overrightarrow{N_1G_1} + \frac{k}{3(k+1)}\overrightarrow{N_1D}$$

由G_1-G-D三點共線知：$\frac{3}{k+1}+\frac{k}{3(k+1)}=1$，

故得k＝3。

這結果成功地簡化了三角錐重心作法：只要**由三角錐任一頂點到其對應的底面的重心連線段上取 3:1 的內分點位置就是三角錐的重心所在。**

三角錐重心的作法又可以用「**三角錐的任一對歪斜線的中點連線段的中點就是它的重心！**」來替代上述作法，參見<圖五>所示。這從向量觀點最易看透：



圖<五>

$$\overline{OG} = \frac{1}{2}\left(\overline{ON_1} + \overline{ON_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OD}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\overline{OA} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)\right)$$

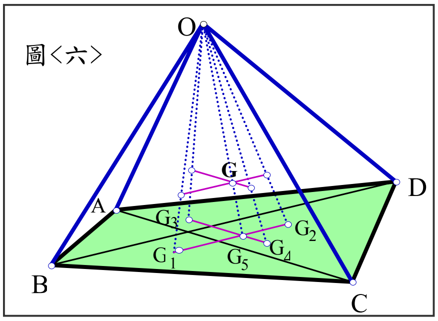
$$= \frac{1}{4}\overline{OA} + \frac{3}{4}\left(\overline{OG'}\right)$$

結果與上文所述完全符合；向量的妙用，著實令人激賞。

使用向量解析只是方法之一，利用 Ceva 定理或 Menelaus 定理亦可獲致相同的結果，在此不予贅述。

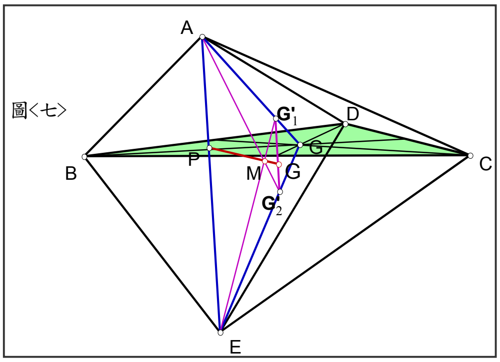
以三角錐 (四面體)的重心爲基礎，進一步探查底面爲多邊形的角錐的重心時，變得極爲輕鬆容易。以四角錐爲例，參見＜圖六＞所示：底面四邊形ABCD被對角線AC分割爲二，而整個四角錐被平面OAC分割爲兩個三角錐，它們的重心分別在OG_1及OG_2的 3：1 的內分點位置；同理，四角錐被平面OBD分割成的兩個三角錐的重心，亦分別在OG_3及OG_4的 3：1 的內分點位置；因此，由上述兩者連線的交點即爲四角錐的重心，其位置同樣也在OG_5的 3：1 的內分點位置！簡單地說：**任意四角錐的重心都在它的頂點到其對應的底面的重心連線段上取 3:1 的內分點位置。**

當角錐的底面爲五邊以上時，上述推理仍舊屹立不搖，這可由＜圖六＞清楚感受到。事實上，**頂點O扮演著伸縮變換的中心：如＜圖六＞把推求底面ABCD上重心G_5的作法向中心點O縮小到原來的 3/4 處(OG：OG_5=3：4)，就得到角錐的重心G了！**



一般多面體除了上述柱體及錐體外，尚缺乏完善的分類；事實上，不管就面數或頂點數加以考量，都相當不易建立起簡明有效的分類體系。因此，我們僅舉例解說六面體（兩個三角錐的組合），以至八面體（三個三角錐的組合），再推廣歸納到 n 個三角錐的組合（一般多面體）之重心的尋求策略。

如＜圖七＞所示，當兩個三角錐A-BCD及E-BCD組合成一個六面體時，△BCD是它們的接合面；先取△BCD的重心G_1，則在AG_1及EG_1上分別取 3：1 的內分點，即得三角錐A-BCD、E-BCD的重心G'_1、G'_2；此六面體的



重心G應在$G'_1G'_2$連線上某處，使得$G\ G'_1$：$G\ G'_2$＝(三角錐E-BCD體積)：(三角錐A-BCD體積)。設AE與接合面BCD的交點爲P，因爲兩個三角錐有相同的底面，所以(三角錐A-BCD體積)：(三角錐E-BCD體積)＝PA：PE。只要連接$A\ G'_2$及$E\ G'_1$，得交點M；再自P點向M引直線與$G'_1G'_2$的交點就是六面體重心G的正確位置。我們簡單證明如下：

【證明】

由AG'_1：G'_1G_1＝3：1＝EG'_2：G'_2G_1

知$AE \parallel G'_1G'_2$

故得$\triangle APM \sim \triangle GG'_2M$、$\triangle EPM \sim \triangle GG'_1M$；

利用對應邊成比例知

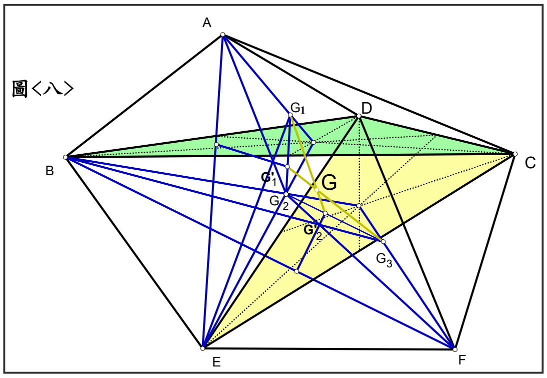
$AP：GG'_2＝PM：MG＝EP：GG'_1$

因此得證（ABCD 體積）:（EBCD 體積）

$＝AP：EP＝GG'_2：GG'_1$

即：G 為六面體 ABCDE 的重心所在！

三個三角錐(A-BCD、E-BCD及F-CDE)組合成一個八面體ABCDEF的情形則如＜圖八＞所示，其中BCD及CDE為兩接合面；延用上述作圖策略，G_1、G_2、G_3分別為三角錐A-BCD、E-BCD及F-CDE的重心，可得六面體ABCDE及BCDEF的重心分別為G'_1、G'_2；由於八面體ABCDEF的重心應同時在$G_1G'_2$及G'_1G_3上，故知$G_1G'_2$及G'_1G_3的交點即為八面體ABCDEF的重心！



圖<八>

當第四個三角錐再加入上述八面體時，設這個三角錐的重心為G_4，而它與三角錐CDEF組合成的六面體的重心為G'_3，則兩連線GG_4與G'_3 G'_1的交點處就是新多面體的重心所在。以此類推，由一被分割為n個三角錐組合的多面體推廣至n+1 個三角錐組合的多面體時，先作出新三角錐的重心及它與相鄰三角錐組合的新六面體的重心，再由【原多面體重心與新三角錐重心連線】與【之前的 n-1 個三角錐組合的重心與新六面體重心連線】兩直線的交點順利求得整個新多面體的重心！有了上述機能，只要將多面體分割為數個三角錐的組合，即可循理求得一般多面體的重心。

結語

多面體重心的一般作法，是建立在三角錐重心的基礎上；由三角錐重心的作法成功推展到一般多面體重心的**關鍵點在於**：如＜圖七＞所示的**兩個三角錐組合**成一個六面體**的重心得以順利求出**；進一步利用＜圖八＞再「舉一反三」時，彷彿已經是順水推舟成功在望的事了！我們同時相信，有朝一日當一般多面體建立妥完善的分類體系後，定能提供將本文之作法進一步特殊化、簡單化的契機。

最後，要感謝學校兩位老師的熱心指導，以及科學教育月刊幾位審查教授的耐心指正，讓我有這個難得的學習與成長的機會，衷心銘謝。

參考資料：

1.王哲麒、翁士傑（1991），尋找多邊形重心。全國第三十一屆科展優勝專輯(國中組)，國立臺灣科學教育館編印

2.李虎雄等六人（2001），高中幾何學教科書下冊。康熙圖書網路股份有限公司

3.李虎雄等六人（2001），高中幾何學教師手冊下冊。康熙圖書網路股份有限公司

4.孫自嘉等五人（1985），平面圖形重心問題之探討。全國第二十一至三十屆科展優勝

（下轉第 54 頁）