柯西不等式的推廣

梁順豪

國立政治大學 應用數學系

我們先回憶一下高中學過的柯西不等式：

1.1 定理

設a_i、$b_i \in R$，$\forall i = 1$、2、$\cdots$、n，則我們有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

特別地，當等號成立時，

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}\ ,$$

其中$b_i \ne 0$，$\forall i = 1$、2、$\cdots$、n

要證這個不等式並不難，我們可以分別利用幾何(1.2)與代數(1.3)的觀點去證明它：

1.2 證明

令 $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

爲 R^n 裡的兩非零向量(如其中有一爲零向量則原式顯然成立)

由高中內積定義：$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中$\theta$爲$\vec{a}$、$\vec{b}$夾角且$0 \le \theta \le \pi$

及高中內積定理: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}}\cos\theta$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| = \left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}}\right| |\cos\theta| \le \left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}}\right|$$

（$\because |\cos\theta| \le 1$）

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right)$$

等號成立時 $\Rightarrow \cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0°$ 或 $180° \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$

故 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ ，

$b_i \ne 0$，$\forall i = 1$、2、$\cdots$、n

1.3 證明

首先，我們引入一個新的變數$t \in R$

顯然我們有$\sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 \ge 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{\,2} t^2 + 2a_i b_i t + b_i^{\,2}\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right) t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2} \ge 0$$

若a_i或b_i爲0，$\forall i = 1$、2、$\cdots$、n，則顯然成立。

故可設$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} > 0$，則可知判別式$D \le 0$

即

$$D = \left(2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right) \le 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right)$$

等號成立時$\Rightarrow$存在一個$t \in R$且$t \ne 0$，

使得 $a_i t+b_i=0$，$\forall i=1$、2、$\cdots$、n

即 $\dfrac{a_i}{b_i}=-\dfrac{1}{t}$，$\forall i=1$、$2$、$\cdots$、$n$

$\Rightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$，

$b_i \neq 0$，$\forall i=1$、2、$\cdots$、n

證明完後，來看看幾個應用的例子：

1.4 例題

設 x、y、$z\in R$，則 $\dfrac{2x+y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 之最大、最小值爲何？

解：由於在題目中出現了平方和與一次項和，故可試著從柯西不等式著手：

$$\because \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(2^2+1^2+3^2\right)\geq\left(2x+y+3z\right)^2$$

$$\therefore 14\geq\frac{\left(2x+y+3z\right)^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{14}\geq\frac{2x+y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\geq-\sqrt{14}$$

故可得最大値爲 $\sqrt{14}$、最小値爲 $-\sqrt{14}$

1.5 例題

ΔABC 三邊長爲 6、5、3，P 爲其內部一點，且 P 點到三邊距離分別爲 x、y、z，則 $x^2+y^2+z^2$ 之最小値爲何？

解：給定三邊長 6、5、3，可由海龍公式算出其面積：

令 $s=\dfrac{6+5+3}{2}=7$，則

$$\Delta ABC=\sqrt{s(s-6)(s-5)(s-3)}$$

$$=\sqrt{7\cdot1\cdot2\cdot4}=2\sqrt{14}$$

又 ΔABC 可被 P 點分成 ΔPAB、ΔPBC、ΔPCA 三塊小三角形，

且 ΔABC 面積爲三塊小三角形的面積和，

故 $2\sqrt{14}=\dfrac{1}{2}\cdot6x+\dfrac{1}{2}\cdot5y+\dfrac{1}{2}\cdot3z$

$$\Rightarrow 6x+5y+3z=4\sqrt{14}$$

有了一次項和，所求又爲平方和，

故可利用柯西不等式：

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(6^2+5^2+3^2\right)\geq\left(6x+5y+3z\right)^2$$

$$=\left(4\sqrt{14}\right)^2=224$$

即 $x^2+y^2+z^2\geq\dfrac{224}{70}=\dfrac{16}{5}$

故所求最小爲 $\dfrac{16}{5}$

1.6 例題

已知 a、b、c、$d>0$，求證

$$\sqrt{a+b+c+d}\geq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}{2}$$

證：本題雖無出現平方和，但出現了二次方根和與一次項和，

還是可以改變一下題目的形式，套用柯西不等式：

$\because a$、b、c、$d>0$

$$\therefore \left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{d}\right)^2\right]\left(1^2+1^2+1^2+1^2\right)$$

$$\geq\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2$$

$$\Rightarrow a+b+c+d\geq\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b+c+d}\geq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}{2}$$

現在，讓我們來試著將柯西不等式做個推

廣，先看幾個簡單的情況：

1.7 引理

設 a_i、b_i、c_i、$d_i \ge 0$，$\forall i = 1$、2、⋯、n，則我們有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,4}\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i\right)^4$$

證：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,4}\right)$$

$$\ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} b_i^{\,2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,2} d_i^{\,2}\right)^2 \text{(柯西不等式)}$$

$$\ge \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i\right)^2\right]^2 \text{(柯西不等式)}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i\right)^4$$

這是四個的情況，再來看看三個的情形：

1.8 引理

設 a_i、b_i、$c_i \ge 0$，$\forall i = 1$、2、⋯、n，則我們有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,3}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,3}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,3}\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3$$

證：由 **1.7**，令 $d_i = (a_i b_i c_i)^{\frac{1}{3}}$ 代入，則

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i c_i)^{\frac{4}{3}}\right) \ge \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i c_i)^{\frac{4}{3}}\right]^4$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,4}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,4}\right) \ge \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i c_i)^{\frac{4}{3}}\right]^3$$

令 $a_i' = a_i^{\frac{4}{3}}$、$b_i' = b_i^{\frac{4}{3}}$、$c_i' = c_i^{\frac{4}{3}}$

則 $\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i')^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (b_i')^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (c_i')^3\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i' b_i' c_i'\right)^3$

有了 1.7、1.8 這兩個簡單的 Lemma 後，我們發現三個和四個的情形都是對的，因此更有信心能將其推廣至 p 個的情形。眼尖的讀者或許會發現，我們在 1.7 和 1.8 中，要求所給定的數須爲正數，這是因爲在 1.8 中，

$a_i^{\,4}$、$b_i^{\,4}$、$c_i^{\,4} \ge 0$

$\Rightarrow (a_i')^3$、$(b_i')^3$、$(c_i')^3 \ge 0$

$\Rightarrow a_i'$、b_i'、$c_i' \ge 0$

故爲了避免不必要的困擾，我們在此只討論正數的情況，另外，有興趣的讀者也可自行驗證一下等號成立的條件。

以下是 p 個的情況，也就是推廣柯西不等式：

1.9 定理

設 $a_{ij} \ge 0$，$\forall i = 1$、2、⋯、p、

$j = 1$、2、⋯、n，則我們有

$$\prod_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\ p} \ge \left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{p} a_{ij}\right)^p$$

$\forall p \in N$ 且 $p \ge 2$

注意到右式中的每一項乘積其實是左式中

相對應位置的 $a_{ij}^{\ p}$，$\forall i = 1$、2、⋯、p，

j 固定，相乘開 p 次方後所得到的。

在此，我們將分別利用數學歸納法(1.10)與算幾不等式(1.11)來證明：

1.10 證明

(1)首先，我們證明 $p = 2^m$，$\forall m \in N$ 的情

況，由數學歸納法，

當 $m=1$ 時，$p=2$ 爲一般柯西不等式，原式成立；

設 $m=k$ 成立，即 $p=2^k$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{2^k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{2^k} \ge \left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2^k} a_{ij}\right)^{2^k}$$

則 $m=k+1$ 時，即 $p=2^{k+1}$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{2^{k+1}} = \left[\prod_{i=1}^{2^k}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}{}^2\right)^{2^k}\right]\cdot\left[\prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}{}^2\right)^{2^k}\right]$$

$$\ge \left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2^k} a_{ij}{}^2\right)^{2^k}\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{ij}{}^2\right)^{2^k}$$

$$= \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2^k} a_{ij}{}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{ij}{}^2\right)\right]^{2^k}$$

$$\ge \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2^{k+1}} a_{ij}\right)^2\right]^{2^k} = \left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2^{k+1}} a_{ij}\right)^{2^{k+1}}$$

故原式亦成立，由數學歸納法得證。

(2)接下來，考慮 $2^{m-1}<p<2^m$，

$\forall m=2$、3、…，則

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}{}^p\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}{}^p\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n} a_{pj}{}^p\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{p} a_{ij}\right)^{2^m-p}$$

$$\ge \left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j}{}^{\frac{p}{2m}} a_{2j}{}^{\frac{p}{2m}}\cdots a_{pj}{}^{\frac{p}{2m}}\cdot\prod_{i=1}^{p} a_{ij}{}^{\frac{2^m-p}{2^m}}\right)\right]^{2^m}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{p} a_{ij}\right)^{2^m}$$

即 $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^p \ge \left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{p} a_{ij}\right)^p$

由(1)(2)，我們完成了整個的證明

1.11 證明

首先，我們令

$$A_1^p=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^p,\ A_2^p=\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^p,\ \cdots,\ A_p^p=\sum_{j=1}^{n} a_{pj}^p$$

於是僅需證明

$$\prod_{i=1}^{p} A_i \ge \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{p} a_{ij}$$

即 $\displaystyle\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{i1}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}+\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{i2}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}+\cdots+\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{in}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}\le 1$

由算幾不等式知

$$\frac{\frac{a_{11}^p}{A_1^p}+\frac{a_{21}^p}{A_2^p}+\cdots+\frac{a_{p1}^p}{A_p^p}}{p}\ge\sqrt[p]{\frac{a_{11}^p}{A_1^p}\cdot\frac{a_{21}^p}{A_2^p}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{p1}^p}{A_p^p}}=\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{i1}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}$$

$$\frac{\frac{a_{12}^p}{A_1^p}+\frac{a_{22}^p}{A_2^p}+\cdots+\frac{a_{p2}^p}{A_p^p}}{p}\ge\sqrt[p]{\frac{a_{12}^p}{A_1^p}\cdot\frac{a_{22}^p}{A_2^p}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{p2}^p}{A_p^p}}=\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{i2}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\frac{a_{1n}^p}{A_1^p}+\frac{a_{2n}^p}{A_2^p}+\cdots+\frac{a_{pn}^p}{A_p^p}}{p}\ge\sqrt[p]{\frac{a_{1n}^p}{A_1^p}\cdot\frac{a_{2n}^p}{A_2^p}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{pn}^p}{A_p^p}}=\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{in}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}$$

將以上每個式子加起來，可得

$$\frac{\frac{a_{11}^p+a_{12}^p+\cdots+a_{1n}^p}{A_1^p}+\frac{a_{21}^p+a_{22}^p+\cdots+a_{2n}^p}{A_2^p}+\cdots+\frac{a_{p1}^p+a_{p2}^p+\cdots+a_{pn}^p}{A_p^p}}{p}$$

$$\ge\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{i1}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}+\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{i2}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}+\cdots+\frac{\prod_{i=1}^{p} a_{in}}{\prod_{i=1}^{p} A_i}$$

即

$$\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{p個}}{p}=\frac{p}{p}=1\geq\frac{\prod_{i=1}^{p}a_{i1}}{\prod_{i=1}^{p}A_i}+\frac{\prod_{i=1}^{p}a_{i2}}{\prod_{i=1}^{p}A_i}+\cdots+\frac{\prod_{i=1}^{p}a_{in}}{\prod_{i=1}^{p}A_i}$$

故得證

一樣，有興趣的讀者可以更進一步檢驗等號成立的條件，在此就不再多作討論。

現在，讓我們來看看它的應用：

1.12 例題

設$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則$\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}$之最小值爲何?

解：這是多年前的一道大學聯考考題，傳統的解法是利用微分求極值，或利用兩次的算幾不等式，當然，如果有了推廣柯西不等式，那這題解起來就顯得迅速多了，現在我們將這三種解法分別列出如下，讀者們可以自己體會一下其中的巧妙之處。

(法一)：

設 $f(\theta)=\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}=2\csc\theta+3\sec\theta$，

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

令 $f'(\theta)=-2\csc\theta\cot\theta+3\sec\theta\tan\theta=0$

$$\Rightarrow\frac{-2\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{3\sin\theta}{\cos^2\theta}=0\Rightarrow 2\cos^3\theta=3\sin^3\theta$$

$$\Rightarrow\tan^3\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}，\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

故 $\sin\theta=\frac{\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{1}{2}}}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{1}{2}}}$

又

$$f''(\theta)=-2\cdot\frac{-\sin\theta\cdot\sin^2\theta-\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta}$$

$$+3\cdot\frac{\cos^3\theta-\sin\theta\cdot 2\cos\theta(-\sin\theta)}{\cos^4\theta}$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}+\frac{4\cos^2\theta}{\sin^3\theta}+\frac{2}{\cos\theta}+\frac{6\sin^2\theta}{\cos^3\theta}>0，$$

$$\forall 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

故

$$f(\theta)=\frac{2}{\frac{\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{1}{2}}}}+\frac{1}{\frac{\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{1}{2}}}}=\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2}}$$

爲最小值

(法二)：$\because\ \frac{2}{\sin\theta}、\frac{3}{\cos\theta}>0\quad\forall 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

我們可仿照 1.11 中的證明手法寫出以下兩個算幾不等式：

$$\frac{\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}}+\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{4}{\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{\frac{3}{\cos\theta}}{\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}}+\frac{\frac{3}{\cos\theta}}{\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{9}{\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)^2}}$$

兩式相加得

$$\frac{3}{3}=1\geq\frac{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)}{\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\geq\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2}}$$

注意到上述兩式中，兩次的等號會同時成立

(法三)：

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 均為正

$\therefore$ 由推廣柯西不等式

$$\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\geq\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^3$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)^2\geq\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^3$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\geq\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2}}$$

故最小值為 $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

1.13 例題

已知過定點 (1,8) 的某一直線交 x 軸於 $P(a,0)$ 、交 y 軸於 $Q(0,b)$ ， a 、 $b>0$ ，則 $\overline{PQ}$ 之最小值為何？

解：一樣，此題有不只一種的解法，但可能都相當繁雜，有興趣的讀者不妨自己動手試一試。讓我們利用推廣柯西不等式來解決這一題：

由截距式可知 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}=1$，且 a、$b>0$

欲求 $\overline{PQ}=\sqrt{a^2+b^2}$ 之最小值，

由推廣柯西不等式：

$$\left(a^2+b^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right)\geq(1+4)^3$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\geq5\sqrt{5}$$

故最小值為 $5\sqrt{5}$

瞧，利用推廣柯西不等式是不是很快呢？

1.14 例題

已知 x_1、x_2、…、$x_n\geq0$，$\forall n\in N$，試證：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,p}}{n}\geq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^p\qquad\forall p\geq2\quad p\in N$$

證：本題其實可由 $f(x)=x^p$，$\forall p\geq2$，為一凸函數直接看出其結果，但從推廣柯西不等式的角度來看，卻提供了另一個簡潔又漂亮的證明。

$\because x_1$ 、 x_2 、…、 $x_n\geq0$

由推廣柯西不等式

$$\left(\left(\frac{x_1}{n}\right)^p+\left(\frac{x_2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{x_n}{n}\right)^p\right)\times$$

$$\underbrace{\overbrace{\left(1^p+1^p+\cdots+1^p\right)}^{n\text{ 個}}\overbrace{\left(1^p+1^p+\cdots+1^p\right)}^{n\text{ 個}}\cdots\overbrace{\left(1^p+1^p+\cdots+1^p\right)}^{n\text{ 個}}}_{p-1\text{ 個}}$$

$$\geq\left(\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right)^p$$

$$\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,p}}{n^p}\cdot n^{p-1}\geq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^p$$

$$\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,p}}{n}\geq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^p$$

看完了以上三個例子，我相信讀者對推廣柯西不等式能有更深刻的體會，還有更多的例子就留給讀者去親身體驗了。文末最後要感謝台大數學系的陳志明、徐祥峻，以及中正數研所的趙世偉，共同協助這篇文章的誕生，也希望這篇文章能夠讓讀過的人都能夠略有所得，祝福大家！