數學解題中「消與長」的變化

許建銘
高雄市立龍華國民中學

壹、前言

問題甲：

取一張紙撕成 4 片，並將其中一片撕成 4 片，再任取一片撕成 4 片(不管紙片的大小)，重覆這種規則一直撕下去，最後能否撕成 2002 片？

這個問題的想法是：每撕一張紙片，會失去原來 1 張紙片，而變成 4 張紙片。也就是說每撕 1 張紙，紙張數會增加 3，所以紙張數的變化情形是$1+3+3+3\cdots\cdots$當撕紙的動作結束時，紙張總數是 3 的倍數多 1。而$2002\div 3=667$餘 1，所以理論上是可以撕成 2002 片。

問題乙：

表演者請參與者想好一個二位數，然後要對方將此數先乘以 167 後再加 2500。表演者待對方報出答案，就能正確說出原二位數的大小。

這聽來有點不可思議，其實只要稍微說明就會了解。假設原二位數為x，對方報出的答案將是$167x+2500$。表演者只要將此答案的末二位數乘以 3，所得結果的末二位數就是x了。

這是因為$(167x+2500)\times 3=$

$$501x+7500=500x+\underline{\underline{x}}+7500,$$

所以算值的末二位數就是原二位數。

問題丙：

將$\dfrac{1}{\dfrac{1}{1991}+\dfrac{1}{1992}+\dfrac{1}{1993}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2000}}$

表示成小數時，其整數部分是多少？

解答：

令

$$m=\frac{1}{1991}+\frac{1}{1992}+\frac{1}{1993}+\cdots\cdots+\frac{1}{2000}$$

因為

$$m<\underbrace{\frac{1}{1991}+\frac{1}{1991}+\cdots\cdots+\frac{1}{1991}}_{10個}$$

$$\Rightarrow m<\frac{10}{1991}<\frac{1}{199}$$

又$m>\underbrace{\dfrac{1}{2000}+\dfrac{1}{2000}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2000}}_{10個}$

$$\Rightarrow m>\frac{10}{2000}=\frac{1}{200}$$

由$\dfrac{1}{200}<m<\dfrac{1}{199}$可推得$\dfrac{1}{m}$的整數部分為 199。

問題丁：

允許將數字 1，2，3，4，5，6，7，8，9 依序合併為幾個數，也可添上加法運算符

號，請問在此規定下，共有多少種方法可以將它們組合爲 144 的等式？

解答：

一個二位數 $10a+b$ 與其數字和 $(a+b)$ 相差 $(10a+b)-(a+b)=9a$。

由 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

而 $144-45=99=9\times11$，也就是說合併的十位數字總和要等於 11，由此推得組合的方式有下列四種：

(1) $1+2+34+5+6+7+89=144$

(2) $1+2+3+45+6+78+9=144$

(3) $12+34+5+6+78+9=144$

(4) $12+3+45+67+8+9=144$

問題戊：

求 1、2、3……999、1000，這 1000 個數的數字總和？

解 1：

我們先求 1 至 999 的數字和，並轉換成數碼 000、001、002……999 的數字和，這 1000 個數碼(含有 3000 個數字)，其中 0 至 9 的 10 個阿拉伯數字各出現 300 次，所以問題的答案爲

$(0+1+2+\cdots\cdots+9)\times300+1=13501$。

解 2：

一個二位數 $10a+b$ 與其數字和 $(a+b)$ 相差 $9a$；一個三位數 $100c+10d+e$ 與其數字和 $(c+d+e)$ 相差 $99c+9d$。

由 1 加至 999 的和 $\dfrac{(1+999)\times999}{2}=499500$

若將這些數拆成數字再求和，將少掉 $(99+9)\times(1+2+3\cdots\cdots+9)\times100=486000$，所以問題的答案爲

$499500-486000+1=13501$。

解 2 的觀念雖然承襲問題丁的解法，而且也比解 1 麻煩，但是同時用來作爲解題教學的題材，不只可以強化學生的位值觀念，也可以藉此考驗學生的思考細膩度。「消與長」的變化，是數學解題者經常要面對的問題。本文除了解答幾個迷思概念外，也舉出一些靈活運用消長變化的問題解法，如同簡單的拼圖片設計（如圖 1-1），在每一個摹想與微動間，或許感應得出解題思維的背後，潛藏著多姿又和諧的圖相。

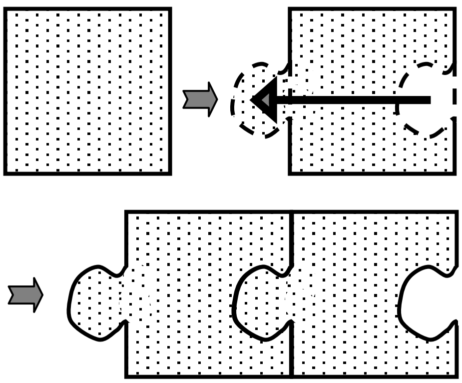

圖 1-1：「一消一長」的兩張紙片，是變化多端的拼圖基本原理。

二、本文：

(一)問題 1：

有一個分數的分子爲 y，且分子比分母的 4 倍多 3，求原分數？

解：

由題意推得原分數的分母爲 $\dfrac{y-3}{4}$

$\therefore$ 原分數爲 $\dfrac{y}{\frac{y-3}{4}}$。

有些數學參考書籍會將答案擴分成 $\frac{4y}{y-3}$，其實當我們將分子、分母都乘以 4 倍後，新分數的分子將比分母的 4 倍多 12。例如分子 $y=11$ 時，原分數爲 $\frac{11}{2}$，但 $\frac{11\times 4}{2\times 4}=\frac{44}{8}$，此分數的分子比分母的 4 倍多了 12。

(二)問題 2：

(1)一物品現值 A 元，則先漲 $a\%$ 再跌 $a\%$ 與先跌 $a\%$ 再漲 $a\%$，請問哪一種情況下，物品的價值較高？

(2)一個矩形的面積爲 P，若將長增加 $k\%$，寬減少 $k\%$，則與長減少 $k\%$，寬增加 $k\%$，此兩種情況，何者的面積會增減較多？

解答：

(1) $[A(1+a\%)](1-a\%)$

$$=[A(1-a\%)](1+a\%)=A(1-\frac{a^2}{10000})$$

所以先漲後跌與先跌後漲都一樣，而物品價值都較原來少 $\frac{a^2A}{10000}$ 元。

(2)設原矩形的長與寬分別爲 a 與 b，由

$$\left[a(1+k\%)\right]\times\left[b(1-k\%)\right]$$
$$=\left[a(1-k\%)\right]\times\left[b(1+k\%)\right]$$
$$=ab(1-\frac{k^2}{10000})=P(1-\frac{k^2}{10000})$$

由此可推得將長增加 $k\%$，寬減少 $k\%$；與長減少 $k\%$，寬增加 $k\%$，此兩種情況皆使得原矩形面積減少 $\frac{k^2}{10000}$ 倍。

圖 2-1 是長增加 $k\%$，寬減少 $k\%$ 的「消長變化」結果：

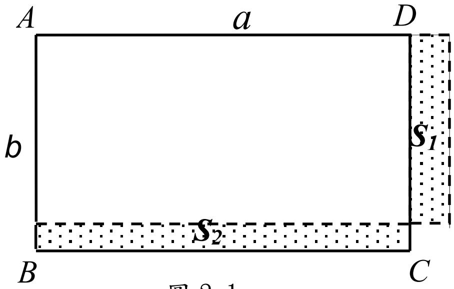

圖 2-1

圖 2-2 是長減少 $k\%$，寬增加 $k\%$ 的「消長變化」結果：

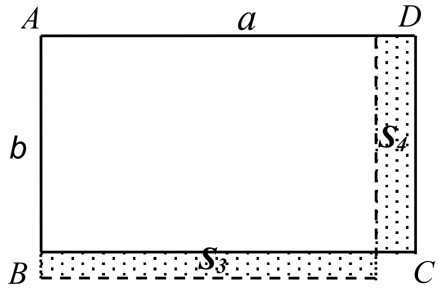

圖 2-2

$$S_1=(a\times k\%)[b\times(1-k\%)]=abk\%-ab(k\%)^2$$
$$S_2=a\times(b\times k\%)=abk\%$$
$$\therefore S_1-S_2=-ab(k\%)^2=-\frac{k^2P}{10000}$$

$$S_3=[a\times(1-k\%)](b\times k\%)=abk\%-ab(k\%)^2$$

$$S_4=(a\times k\%)\times b=abk\%$$

$$\therefore S_3-S_4=-ab(k\%)^2=-\frac{k^2P}{10000}$$

(其實 $S_1=S_3$，$S_2=S_4$)

(三)問題 3：

某君最初有 64 元，和人打賭六次，結果贏三次、輸三次，但是輸贏的次序隨意。若贏與輸的機會相等，且每次賭金是賭時餘錢

的一半，則最後的結果是輸或贏多少錢？

解答：

令 R_0 表開始時的所有賭款，假設第一次賭的結果是贏，則第一次賭後之餘款為 $R_0+\frac{1}{2}R_0=\frac{3}{2}R_0$。令 $R_1=\frac{3}{2}R_0$，假設第二次又賭贏，結果賭後的餘款為 $R_1+\frac{1}{2}R_1=\frac{3}{2}R_1=\frac{3}{2}(\frac{3}{2}R_0)=(\frac{3}{2})^2R_0$，故每贏一次後總餘款為賭時手中錢數的 $\frac{3}{2}$ 倍。

若第一次賭輸，結果手中餘錢剩 $\frac{1}{2}R_0$；假設第二次又賭輸，結果剩 $(\frac{1}{2})^2R_0$，所以每賭輸一次，手中的餘錢為賭時手中錢數的 $\frac{1}{2}$ 倍。三贏三輸，不論其次序，餘錢總數為 $(\frac{3}{2})^3(\frac{1}{2})^3R_0=\frac{27}{64}R_0$，即輸掉 $R_0-(\frac{27}{64})R_0=\frac{37}{64}R_0$。因為 $R_0=64$ 元，故輸了 37 元。

(四)問題 4：

有一列火車通過長 250 公尺的鐵橋，前後歷時 25 秒；又通過長 1070 公尺的隧道，車身完全在隧道內的時間是 35 秒，求火車行進的速率？

解 1：

設火車的行進速率每秒 x 公尺，而車身長為 y 公尺

$$\begin{cases}25x=250+y\cdots\cdots\ ①\\35x=1070-y\cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

$$①+②\Rightarrow 60x=1320\Rightarrow x=22$$

所以火車的行進速率每秒 22 公尺。

解 2：

將車身「完全通過鐵橋」與「完全在隧道內」這兩件事完全「拼圖」(或想成連續事件)，就可以知道火車在 $(25+35)$ 秒內，共行進 $(250+1070)$ 公尺，所以行進速率為每秒 $1320/60=22$ 公尺。

(五)問題 5：

某人攔了一部計程車欲追趕已經出發的遊覽車，計程車司機告訴他：「若以時速 80 公里追趕，要 90 分鐘才能追上；若以時速 90 公里追趕，只需要 40 分鐘就追上了。」假設遊覽車的行駛速率固定，試問計程車司機估算遊覽車的時速是多少公里？

解 1：

設計程車於追趕前與遊覽車相距 a 公里，而遊覽車時速為 x 公里

$$\begin{cases}a+\frac{3}{2}x=80\times\frac{3}{2}=120\\a+\frac{2}{3}x=90\times\frac{2}{3}=60\end{cases}\Rightarrow\frac{5}{6}x=60\Rightarrow x=72$$

此解法著重計程車如何逐步抵消與遊覽車的距離。

解 2：

設遊覽車時速為 x 公里

$$(80-x)\times\frac{3}{2}=(90-x)\times\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow 720-9x=360-4x \Rightarrow x=72$

此解法著重於兩車共同抵消原先的距離。

(六)問題 6：

這是一個錯誤的等式：

$1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11=12$

請加上一個括號，使等式成立。

解 1：

採用試驗法：因為

$1-2-3-4-(5-6-7-8-9-10)-11=16$

而 $16-12=4$，且 2(6+7-11)=4

所以必須調整括號位置如下：

$1-2-3-4-5-6-(7-8-9-10-11)=12$

解 2：

假設原式等號左邊加上一個括號後，將使部分運算結果由原先的 x 變成 $-x$，而運算值仍保持與原來相等的結果令為 y，將可列得如下二元一次方程組：

$$\begin{cases} x+y=-64 \cdots\cdots ① \\ -x+y=12 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①+② $\Rightarrow 2x=-76 \Rightarrow x=-38$

又 $8+9+10+11=38$

所以必須調整括號位置如下：

$1-2-3-4-5-6-(7-8-9-10-11)=12$

(七)問題 7：

(1)若一元二次方程式 $x^2+3x-1=0$ 的兩根為 α、β，求 $|\alpha|+|\beta|$。

(2)若一元二次方程式 $x^2+3x+1=0$ 的兩根為 α、β，求 $|\alpha|+|\beta|$。

解答：

我們應用一元二次方程式之根與係數的關係，以及 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 之兩根和為 $-\dfrac{b}{a}$，兩根差為 $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$。

(1)由 $\alpha\beta=\dfrac{-1}{1}=-1 \Rightarrow \alpha$ 與 β 異號

$$\therefore |\alpha|+|\beta|=|\alpha-\beta|=$$

$$\frac{\sqrt{3^2-4\times 1\times(-1)}}{|1|}=\sqrt{13}$$

(2)由 $\alpha\beta=\dfrac{1}{1}=1 \Rightarrow \alpha$ 與 β 同號

$$\therefore |\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|=\left|-\frac{3}{1}\right|=3$$

(八)問題 8：

兄對弟說：「我在你這個年紀的時候，你只有 5 歲；等你到我這個年紀的時候，我已經 41 歲了。」求兄弟兩人現年各幾歲？

解 1：

設兄弟兩人現年各 x 與 y 歲

由題意可完成下表

	過去	現在	未來
兄	y	x	41
弟	5	y	x

再由兄弟二人的年齡差不會改變，可推得

$$\begin{cases} y-5=x-y \\ 41-x=x-y \end{cases}$$

解此聯立方程式可得 $x=29$，$y=17$

解 2：

設兄弟兩人年紀相差 a 歲。由「我在你這個年紀的時候，你只有 5 歲」，可知 a 年前，弟弟 5 歲；由「你到我這個年紀的時候，我已經 41 歲」，可知 a 年後，哥哥 41 歲。

如果一個人 a 年前 5 歲，a 年後 41 歲，則 $a=(41-5)\div 2=18$

但兄弟兩人現在已相差 a 歲，所以 $a=(41-5)\div 3=12$

可解得兄現年 $41-12=29$ 歲；弟現年 $29-12=17$ 歲(或 $5+12=17$ 歲)。

(九)問題 9：

因式分解 $(a^2-b^2)^2-2c^2(a^2+b^2)+c^4$

解 1：

利用「十字交乘法」：

原式

$$=(a+b)^2(a-b)^2-2c^2(a^2+b^2)+c^4$$
$$=[(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2]$$
$$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

解 2：

原式

$$=(a^2-b^2)^2-2c^2(a^2-b^2)+c^4-4b^2c^2$$
$$=[(a^2-b^2)-c^2]^2-(2bc)^2$$
$$=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)$$
$$=[a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2]$$
$$=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)$$

(十)問題 10：

計算

$$(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41})\times(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51})$$
$$-(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51})\times(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41})$$

的值。

解 1：令 $a=\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}$

$\Rightarrow$ 求值式

$$=(a-\frac{1}{51})\times(a-\frac{1}{11})-a\times(a-\frac{1}{11}-\frac{1}{51})$$
$$=\frac{1}{51}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{561}$$

解 2：只考慮互有消長的部分：

$$(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41})\times(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\boxed{\frac{1}{51}})$$
$$-(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\boxed{\frac{1}{51}})\times(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41})$$
$$=(\boxed{\frac{1}{11}}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41})\times\frac{1}{51}-\frac{1}{51}\times(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41})$$
$$=\frac{1}{51}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{561}$$

(十一)問題 11：

已知 $x^2-4x+1=0$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 之值。

解 1：

解得 $x=2\pm\sqrt{3}$ 代入

$$x^4+\frac{1}{x^4}\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=(2\pm\sqrt{3})^4+\frac{1}{(2\pm\sqrt{3})^4}$$
$$=97\pm 56\sqrt{3}+\frac{1}{97\pm 56\sqrt{3}}=97\pm 56\sqrt{3}+$$

$$\frac{97\pm 56\sqrt{3}}{(97\pm 56\sqrt{3})(97\pm 56\sqrt{3})}$$

$$=97\pm 56\sqrt{3}+97\mp 56\sqrt{3}=194$$

解 2：

令 $x^4+\frac{1}{x^4}=A$ 等號兩邊同乘以 x^4

$\Rightarrow x^8-A\cdot x^4+1=0\cdots\cdots(*)$

原方程式改寫成 $x^2+1=4x$ 兩邊平方後整理 $\Rightarrow x^4+1=14x^2$

再平方整理 $\Rightarrow x^8-194x^4+1=0$

與 $(*)$ 式比較後解得 $A=194$

解 3：

$\because$ 原方程式的 $x\neq 0$

$\therefore$ 方程式兩邊同除以 $x \Rightarrow x+\frac{1}{x}=4$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=$$

$$\left[(x+\frac{1}{x})^2-2\right]^2-2=(16-2)^2-2=194$$

三、結論：

台灣有句俗諺:「有聽到聲，沒看到影。」我常將它比喻爲一個充滿神秘感的環境。相信不少人在很小的時候有過這種經驗，就是一件東西突然從自己的視線逃開時，會懷疑它是不是消失了。就像媽媽躲在物體的後面，小女孩會急著想哭；媽媽喊了幾聲小女孩的名字，小女孩開始引頸張望期盼；等到媽媽再度現身，小女孩轉而破涕爲笑。小孩子常對一些東西的消失與重現感到又驚又喜。

皮亞傑(Piaget)在觀察一個四個月大的嬰兒時發現，嬰兒在吃奶時偶然捉到媽媽的手指頭，就開始觸發他捕捉媽媽手指頭的樂趣，媽媽如果將手指頭移開，嬰兒便開始追捕，捉到就展露笑容。慢慢長大，才發覺捉迷藏是一件多麼有趣的事。

一個從事教育的人如果能夠體悟萬物消長的變化常理，進而認清生命的本質與學習的意義，就可以更加了解並隨時實踐教育的使命，以幫助人類探索與解釋那個曾經消失或已經出現或未來可能發生的真相。如果生活與學習的經驗，能夠適時融入「困惑的誘惑」;如果課堂上能夠偶然激起一絲又驚又喜的情意和趣味，相信學生會更珍惜即使短暫卻無限美好的學習際會，也唯有學生真心歡喜的努力付出過，有朝一日他才會盡其所學所能做出對社會的正面回饋，我們的社會才會充滿永續的愛與關懷。