如何才能丟得最遠？

徐國誠

臺北市立成淵高級中學

摘要

以投擲者的觀點而言，影響拋體水平射程的因素，包括有拋射仰角、拋射點的高度、空氣阻力、以及投擲者的助跑速度與出手速度等。本文討論了其中拋射點高度與助跑速度這兩個因素對產生最大水平射程所需拋射仰角的影響。由本文得知，投擲者欲投擲最大水平射程，拋射點高度的因素會降低其所需的拋射仰角，而助跑速度卻又會升高其所需的拋射仰角；再者投擲者也可以根據本身的條件，計算出一條獨一無二的水平射程 R－拋射仰角 θ 曲線，而求出自己所能丟的最遠距離和所需要的最佳仰角爲何。

前言

拋體運動（projectile motion）是運動學中討論等加速度二維運動常用的例子。日常生活中處處可見拋體，如籃球的投籃，棒球被打擊成高飛球，或者是高爾夫球在碧綠的草原中劃過一道美麗的弧線等。在討論拋體運動時，我們通常會對某一個特定問題感興趣，那就是如何改變拋射的仰角，才能使拋體的水平射程達到最大，一如學生上體育課作壘球擲遠測驗時，在有限的臂力下，如何投擲才能丟得最遠一般。我們都知道，若拋射點與落地點在同一個高度，以及不考慮空氣阻力的前提之下，這個答案是 45°；但上述的壘球擲遠，因爲投擲者的身高和手臂長度，使得拋射點和落地點的高度不同，以及允許投擲者助跑的情況下，顯然會使拋體運動變得複雜些。因此本文將以投擲者的立場去考慮，就拋射點高度與助跑速度這兩個因素分別討論其對斜向拋射之水平射程的影響，以及投擲者應該以何種拋射仰角，才可以使水平射程達到最大等。

一、拋體運動的一般情形

假設投擲者的臂力可以使得拋體相對於投擲者的初速爲v_0，仰角爲θ，這個仰角是以投擲者的觀點來看。倘若投擲者在投擲前瞬間有一助跑速度v（如圖一），則對地上的觀察者而言，拋射的仰角就會變成 $\tan^{-1}\left(\dfrac{v_0\sin\theta}{v_0\cos\theta+v}\right)$，因此拋體的水平與鉛直方向的初速$v_x$、$v_y$分別爲

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta + v \\ v_y = v_0\sin\theta \end{cases}$$

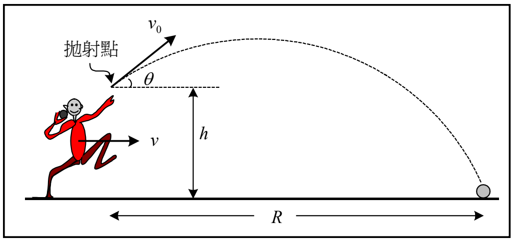
若物體拋射點的高度爲 h，那麼拋體從拋出至落地的時間 T 應爲

$$T = \frac{v_0\sin\theta + \sqrt{(v_0\sin\theta)^2 + 2gh}}{g}$$

而拋體的水平射程 R 即爲 $(v_0\cos\theta + v)\cdot T$，將上述 T 的結果代入後得到

$$R=\frac{1}{g}[\,v_0^{\,2}\sin\theta\cos\theta+v_0v\sin\theta+(v_0\cos\theta+v)\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gh}\,]\cdot\cdot\ (1)$$

一般教科書所提到斜向拋射的水平射程，是從第（1）式中假設 v 和 h 為零，而得到 $R=\frac{v_0^{\,2}\sin 2\theta}{g}$，當仰角 θ ＝ 45°時，$R$ 為最大值， $R(\theta=45°)=R_{\max}=\frac{v_0^{\,2}}{g}$。



圖一　物體拋射點的高度為h，且拋體相對於投擲者的初速為v_0，仰角為θ，而投擲者助跑的速度為v。

二、拋射點高度的影響

這裡先假設投擲者在不助跑的情形下，只考慮拋射點高度的因素，此時投擲者和地上的觀察者所見拋體被拋出時的仰角皆為θ。因為第（1）式中的 $v=0$，所以

$$R=\frac{v_0\cos\theta}{g}[\,v_0\sin\theta+\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gh}\,]\cdot\cdot\ (2)$$

我們將第（2）式對 θ 做一次微分，令 dR / dθ = 0，由此可得 R 的極大值為（Ref. [2], [6], [8], [9], [10]）

$$R_{\max}=R_{\max}(h)=\frac{v_0^{\,2}}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^{\,2}}}\ \cdots\cdot\ (3)$$

這時θ的值為產生最大水平射程的拋射仰角θ_C

$$\theta_C=\theta_C(h)=\tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^{\,2}+2gh}}\right)\cdots\cdot(4)$$

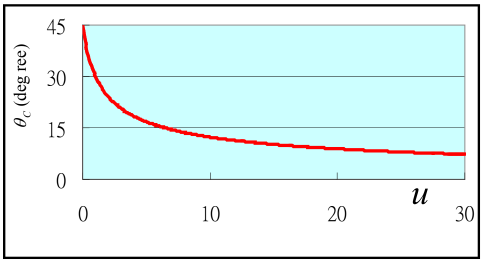
上式中由於 $h\neq 0$，因此 $v_0<\sqrt{v_0^{\,2}+2gh}$，故欲得最大水平射程，投擲者應該採用拋射仰角 θ < 45°才行。若投擲者仍以 45°仰角作拋射，則水平射程會變成

$$R(\theta=45°)=\frac{v_0^{\,2}}{2g}\left(1+\frac{\sqrt{v_0^{\,2}+4gh}}{v_0}\right)$$

此式與第（3）式的$R_{\max}$的差△R為

$$\Delta R=R_{\max}-R(\theta=45°)$$
$$=\frac{v_0}{g}\left[\sqrt{v_0^{\,2}+2gh}-\frac{1}{2}\left(v_0+\sqrt{v_0^{\,2}+4gh}\right)\right]$$

上式當然也可以稍加推導，而得到△$R>0$ 的結果。

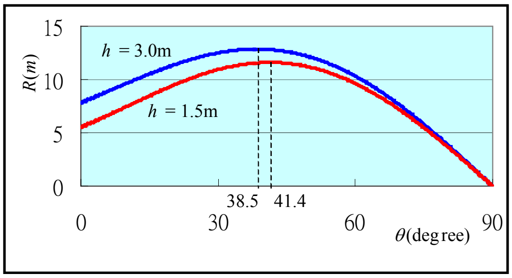


圖二　投擲者助跑速度為零，產生最大水平射程的拋射仰角$\theta_C(u)$的函數圖形，其中橫軸u為gh / v_0^2。

至於第（4）式的$\theta_C(h)$函數，我們可以令一個新的變數 $u=\frac{gh}{v_0^{\,2}}$，將θ_C由h的函數，改變成u的函數

$$\theta_C=\theta_C(u)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2u}}\right)\cdots\cdots(5)$$

圖二為θ_C-u的函數圖形，圖中顯示u愈大（亦即拋射點的高度愈大），拋體達最大水平射程所需的拋射仰角就會愈小。圖三是假設v_0 = 10m/s，h分別為 1.5m、3.0m，g = 9.8m/s^{2}的R-θ曲線，這兩條曲線的最大水平射程分別為11.6m、12.9m，而其所對應的拋射仰角分別為 41.4°、38.5°。



圖三　投擲者助跑速度為零的情形下，假設v_0 = 10m/s，h分別為 1.5m、3.0m，g = 9.8m/s^{2}的R-θ曲線，這兩條曲線的最大水平射程分別為 11.6m、12.9m，而其所對應的拋射仰角分別為 41.4°、38.5°。

三、助跑速度的影響

假若投擲者在投擲前有一助跑速度 v，而不考慮拋射點高度因素的話，從第（1）式中$h = 0$，我們可以得到

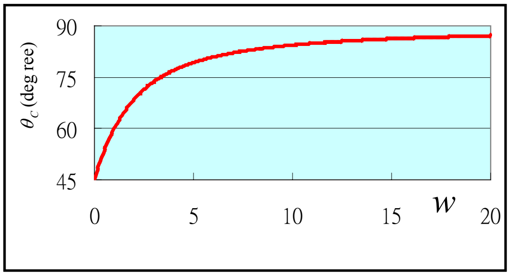
$$R = \frac{2v_0\cos\theta}{g}[\,v_0\sin\theta + v\,] \cdots\cdots\cdots（6）$$

相同的，令dR / dθ = 0，由此可以求出R的極大值R_{max}與產生最大水平射程的拋射仰角θ_C分別為

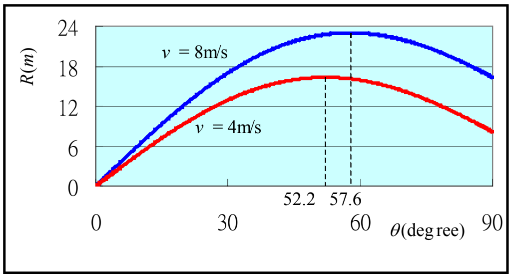
$$R_{max} = R_{max}(v)$$

$$= \frac{1}{8g}\sqrt{8{v_0}^2 - 2v^2 + 2v\sqrt{8{v_0}^2 + v^2}} \times \left(3v + \sqrt{8{v_0}^2 + v^2}\right) \cdots（7）$$

$$\theta_C = \theta_C(v) = \cos^{-1}\left(\frac{-v + \sqrt{8{v_0}^2 + v^2}}{4v_0}\right) \cdots\cdots（8）$$



圖四　拋射點高度為零，產生最大水平射程的拋射仰角$\theta_C(w)$的函數圖形，其中橫軸w為v / v_0。



圖五　拋射點高度為零的情形下，假設v_0 = 10m/s，v分別為 4m/s、8m/s，g = 9.8m/s^{2}的R-θ曲線，這兩條曲線的最大水平射程分別為 16.3m、23.1m，而其所對應的拋射仰角分別為 52.2°、57.6°。

當我們假定一個新的變數 $w = \dfrac{v}{v_0}$ 之後，就可以將第（8）式重新寫成 w 的函數，

$$\theta_C=\theta_C(w)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{w+\sqrt{8+w^2}}\right)\cdots(9)$$

因爲第（9）式中的$w>0$，所以產生最大水平射程所需的拋射仰角θ_C必然會大於45°，而且w值愈大（即投擲者的助跑速度愈大），其拋射仰角也愈大，圖四是$\theta_C(w)$的函數圖形，即顯示這個現象。圖五是假設$v_0=10$m/s，v分別爲 4m/s、8m/s，$g=9.8\text{m/s}^2$的R-θ曲線，這兩條曲線的最大水平射程分別爲 16.3m、23.1m，而其所對應的拋射仰角分別爲 52.2°、57.6°。

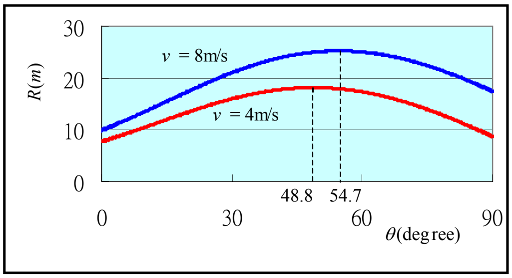
四、助跑速度和拋射點高度同時考慮

如果 h 和 v 都不爲零，而我們直接將第（1）式對 θ 做一次微分，令 dR / dθ = 0，經過一番繁複的計算之後，得出一個 cosθ 的一元三次方程式：

$$2w\cos^3\theta+(w^2+2u+2)\cos^2\theta=2u+1 \quad \cdots\cdots(10)$$

其中的u和w分別爲gh/v_0^2和v/v_0。第（10）式中cosθ的解就是助跑速度和拋射點高度同時不爲零的情形下，水平射程達最大時的拋射仰角的餘弦。數學方程式中有所謂的「卡丹（Cardan）公式」（Ref. [4], pp. 159－164）可以求出一元三次方程式的一般解，不過因爲這一般解的形式並不十分「簡潔」，所以這裡不打算列出其解法，有興趣的讀者可閱讀參考文獻中的資料或相關書籍。

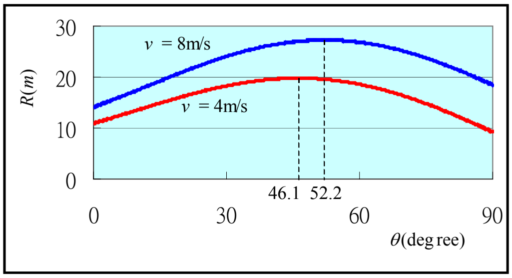
前面我們已經分別討論了助跑速度和拋射點高度對最大水平射程的拋射仰角的影響，也分別各舉了二個例子求出其對應的值。於是我們可以利用電腦將這四個例子交叉組合，分別描繪出水平射程R對仰角θ的軌跡，而求出最大水平射程和對應的拋射仰角的特殊解，如圖六、圖七。圖六是假設$v_0=$ 10m/s，$h=1.5$m，$g=9.8\text{m/s}^2$，投擲者助跑速度v分別爲 4m/s、8m/s的R-θ關係曲線，這兩條曲線的最大水平射程分別爲 18.2m、25.3m，而其所對應的拋射仰角分別爲 48.8°和 54.7°。如果我們將 48.8°或 54.7°的餘弦代入第（10）式，當然也會符合該方程式的解，有興趣的讀者可以自行驗證。由於前面的討論，我們已經知道投擲者欲投擲最大水平射程，拋射點高度的因素會降低其所需的拋射仰角，而助跑速度卻又會升高其所需的拋射仰角。因此圖中v = 4m/s的曲線，其最大水平射程的仰角 48.8°，會大於圖三中的 41.4°，而又小於圖五中的 52.2°；v = 8m/s的曲線，其最大水平射程的仰角 54.7°，也大於圖三中的41.4°，但小於圖五中的 57.6°。圖七中兩條曲線的情形也是如此。



圖六 $v_0=10$m/s，$h=1.5$m，$g=9.8\text{m/s}^2$，v分別為 4m/s、8m/s的R-θ曲線，這兩條曲線的最大水平射程分別為 18.2m、25.3m，而其所對應的拋射仰角分別為 48.8°、54.7°。

五、結論與說明

前言已經說過，本文是以投擲者的立場去考慮所有的因素，而不是地上的觀察者。事實上，若以地上的觀察者而言，應該將投擲者的助跑速度 v 併入物體的初速 v_0，倘若如此，則只需討論本文的第二部分即可。而本文這樣設計，只是讓拋體運動的學習者更有參與感，藉由投擲者的臂力所產生拋體的初速，加上自身的助跑速度，以及身高和手臂長度決定拋射點的高度，如此就能計算出根據投擲者本身條件的一條獨一無二的 R-θ 曲線，而投擲者也可以由此得出自己所能丟的最遠距離和所需要的最佳仰角為何。



圖七　$v_0 = 10$m/s，$h = 3.0$m，$g = 9.8$m/s^2，v分別為 4m/s、8m/s的R-θ曲線，這兩條曲線的最大水平射程分別為19.8m、27.3m，而其所對應的拋射仰角分別為 46.1°、52.2°。

另外，本文並未討論空氣阻力對拋體的影響，因為若將空氣阻力的因素加以考慮的話，那麼計算形式會更加複雜。一些有關體育理論的書籍會有相關曲線可供查詢，例如推鉛球欲得最大的距離，對出手高度 1.7 ~ 2.0m，而出手速度 8 ~ 14m/s 的人來說，出手仰角應為 38° ~ 42°（一如圖三所示），而這角度隨出手速度的增大而增大，而隨出手高度的增大而減小，這是將助跑速度併入物體的初速 v_0 計算而得。至於其他擲類受空氣阻力影響較大，各有不同的最佳仰角，例如擲鐵餅為 30° ~ 35°；標槍為 28° ~ 33°；鏈球為 42° ~ 44°等（Ref. [1], p. 24）。讀者若有興趣，亦可參閱這類的相關書籍。

參考文獻

1.何定樑，生活的物理，1 版，台北，九章出版社，24 頁，民 88。

2.周嘉宜、李端真，利用電腦模擬協助專科學生釐清拋體運動之迷思概念，http://acbe.tku.edu.tw/iccai8/76/76.htm 。

3.國立台灣師範大學科學教育中心主編，高中物理第一冊，台北，國立編譯館，民 87。

4.詹進吉，方程式，2 版，台北，幼獅文化，159-164 頁，民 73。

5.褚德三主編，物質科學物理篇（上），台北，龍騰文化，民 91。

6.C. Inouye and E. Chong, Maximum range of a projectile. The Physics Teacher, 30, 168 –169, 1992.

7.D. Halliday, R. Resnick and J.Walker, *Fundamentals of Physics Extended*, 5th ed., U.S.A., John Wiley & Sons, 1997.

8.J. W. Schnick, Projectile motion details. The Physics Teacher, 32, 266-269, 1994.

9.R. A. Brown, Maximum range of a projectile. The Physics Teacher, 30, 344 –347, 1992.

10.W. S. Porter, The range of a projectile . The Physics Teacher, 15,358, 1997.