輔助三角形的妙用

許介彥

大葉大學　電信工程學系

前言

相信所有學過幾何的人都瞭解輔助線的功用；經由適當地添加輔助線，原本困難的問題有可能在轉眼間變成簡單的問題。

除了輔助線外，「輔助三角形」在某些情況下也扮演著重要的角色；在本文中，讀者將看到輔助三角形的幾個美妙的應用。

例題

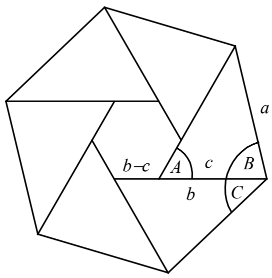
問題一：

對任意三角形 ABC 而言，假設$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊分別爲 a、b、c。試證：若$\angle A = 60°$，則ΔABC 的面積 S 爲

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b-c)^2).$$

解：

由$\angle A = 60°$可知$\angle B + \angle C = 120°$；利用六個與$\Delta ABC$全等的三角形可圍成如下圖案：



由圖中很明顯可看出，$6S$ 就等於邊長爲 a 的正六邊形面積與邊長爲 $(b-c)$ 的正六邊形面積之差，因此 S 就等於邊長爲 a 的正三角形面積與邊長爲 $(b-c)$ 的正三角形面積之差，由此可知

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b-c)^2).$$

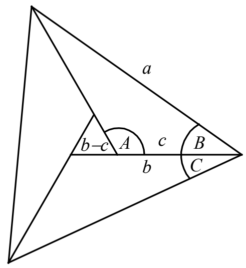
問題二：

對任意三角形 ABC 而言，假設$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊分別爲 a、b、c。試證：若$\angle A = 120°$，則ΔABC 的面積 S 爲

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - (b-c)^2).$$

解：

由$\angle A = 120°$可知$\angle B + \angle C = 60°$；利用三個與$\Delta ABC$ 全等的三角形可圍成如下圖案：

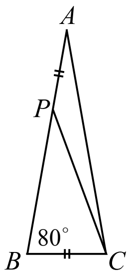


由圖中很明顯可看出，$3S$ 就等於邊長爲 a 的正三角形面積與邊長爲 $(b-c)$ 的正三角形面積之差，因此

$$S = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b-c)^2).$$

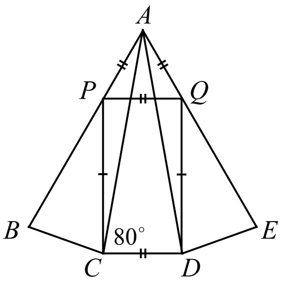
問題三：

下圖的等腰三角形 ABC 中，$\overline{AB} = \overline{AC}$，$\angle BAC = 20°$；$P$ 爲 $\overline{AB}$ 上的一點且 $\overline{AP} = \overline{BC}$。請問：$\angle ACP$ 是幾度？



解：

由三角形 ABC 複製出另外兩個三角形 ACD 與 ADE，如下圖所示：



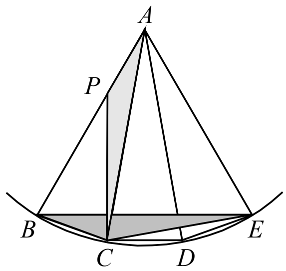
在 $\overline{AE}$ 上取一點 Q 使得$\angle APQ = 60°$。由於$\angle PAQ = 3 \cdot 20° = 60°$，因此$\Delta APQ$爲正三角形，$\overline{PQ} = \overline{AP} = \overline{BC} = \overline{CD}$ 。

由於 $\overline{AP} = \overline{AQ}$ ，$\overline{AC} = \overline{AD}$ ，$\angle PAC = \angle QAD = 20°$，因此$\Delta PAC$ 與ΔQAD 全等，$\overline{PC} = \overline{QD}$ 。

由於 $\overline{PQ} = \overline{CD}$ 且 $\overline{PC} = \overline{QD}$ ，四邊形 $PCDQ$ 爲平行四邊形；又由圖形的左右對稱可知實際上 $PCDQ$ 爲一矩形，它的每個內角皆爲 90°，因此$\angle ACP = 90° - 80° = 10°$。

另解：

首先，如同上個解法，由三角形 ABC 複製出另外兩個三角形 ACD 與 ADE。由於 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE}$ ，因此 B、C、D、E 等四點必定全都落在以 A 爲圓心且半徑爲 $\overline{AB}$ 的圓上，如下圖所示：



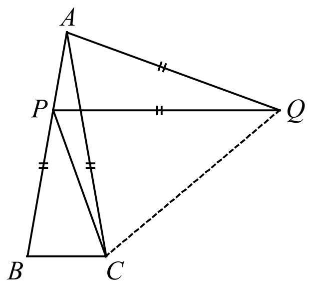
由於$\angle BAE = 3 \cdot 20° = 60°$且 $\overline{AB} = \overline{AE}$ ，因此ΔABE 爲正三角形，$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BE}$ 。又由於 $\overline{CE}$ 所對應的圓心角$\angle CAE = 2 \cdot 20° = 40°$，因此圓周角$\angle CBE = 20°$。

ΔAPC 與ΔBCE 中，$\overline{AP} = \overline{BC}$ ，$\overline{AC} = \overline{BE}$ ，$\angle PAC = \angle CBE = 20°$，因此$\Delta APC$與$\Delta BCE$ 全等，$\angle ACP = \angle BEC$。

由於 $\overline{BC}$ 所對應的圓心角$\angle BAC = 20°$，因此圓周角$\angle BEC = 10°$，所以$\angle ACP$ 亦爲 10°。

另解：

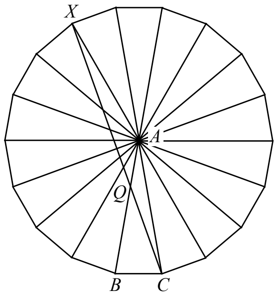
由三角形 ABC 複製出另外一個三角形 QAP，如下圖所示：



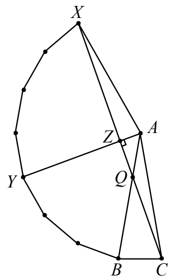
由於$\angle PAQ = 80°$且$\angle PAC = 20°$，因此$\angle CAQ = 60°$，又由於 $\overline{AC} = \overline{AQ}$ ，因此ΔACQ爲正三角形。由於 $\overline{QA} = \overline{QP} = \overline{QC}$ ，因此 A、P、C 等三點全都落在以 Q 爲圓心且半徑爲 $\overline{QA}$ 的圓上。由於 $\overline{AP}$ 所對應的圓心角$\angle AQP = 20°$，因此圓周角$\angle ACP = 10°$。

另解：

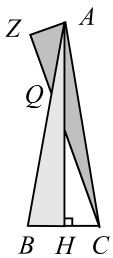
由於$\angle BAC = 20°$，因此由十八個與ΔABC 全等的三角形正好可以圍成一圈，組成一個正十八邊形，如下圖所示：



上圖中，$\overline{CX}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 Q。等腰三角形 AXC 中，由於$\angle XAC = 8 \cdot 20° = 160°$，因此$\angle ACQ = 10°$;以下我們証明 Q 與 P 其實是同一點，也就是說，$\overline{AQ} = \overline{BC}$ 。



上圖的ΔACZ 中，由於$\angle ZAC = 4 \cdot 20° = 80°$且$\angle ACQ = \angle ACZ = 10°$，因此$\angle AZC$ 爲直角；又由於$\angle YAB = 3 \cdot 20° = 60°$，因此$\Delta AQZ$ 爲一個 30°-60°-90°的三角形，$\overline{AQ} = 2\overline{AZ}$ ；我們接下來只須証明$\overline{BC} = 2\overline{AZ}$ 就行了。

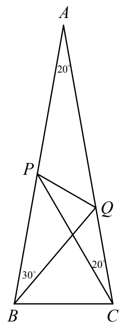


上圖中，H 爲 $\overline{BC}$ 上的一點且 $\overline{AH}$ 垂直於 $\overline{BC}$；由於ΔABC 爲等腰三角形，因此 $\overline{BH} = \overline{HC}$ 。

ΔAZC 與ΔBHA 都是直角三角形，$\angle BAH = \angle ACZ = 10°$，$\overline{AB} = \overline{AC}$ ，因此ΔAZC 與ΔBHA 全等，由此我們推知 $\overline{BC} = 2\overline{BH} = 2\overline{AZ} = \overline{AQ}$ ，因此 Q 與 P 確實是同一點，所以題目中的$\angle ACP$ 等於 10°。

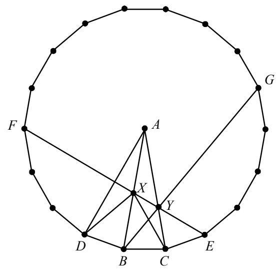
問題四：

下圖的等腰三角形 ABC 中，$\overline{AB} = \overline{AC}$ ，$\angle BAC = 20°$；P 與 Q 分別爲 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上的點，$\angle PBQ = 30°$，$\angle PCQ = 20°$。請問：$\angle QPC$ 是幾度？



解：

由十八個與ΔABC 全等的三角形正好可以圍成一圈，組成一個正十八邊形：



上圖中，$\overline{EF}$ 分別交 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 於 X 及 Y。以下我們將証明 X 與 Y 其實分別就是題目中的 P 與 Q，也就是說，$\angle XBY = 30°$，$\angle XCY = 20°$ 。

由上圖可知 $\overline{EF}$ 與 $\overline{BG}$ 對稱於 $\overline{AC}$，既然

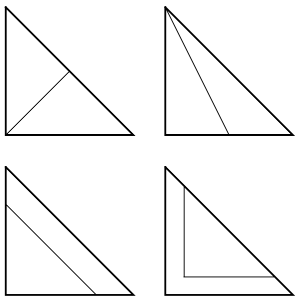
$\overline{EF}$ 與 $\overline{AC}$ 交於 Y，$\overline{BG}$ 與 $\overline{AC}$ 也必交於 Y。等腰三角形 BAG 中，$\angle BAG = 6 \cdot 20° = 120°$，因此 $\angle ABG = \angle XBY = 30°$，$Q$ 與 Y 確實是同一點。

由於 $\overline{AF} = \overline{AD}$ 且 $\angle FAD = 3 \cdot 20° = 60°$，因此 ΔFAD 為正三角形，F 位於 $\overline{AD}$ 的垂直平分線上。同理可知 E 亦位於 $\overline{AD}$ 的垂直平分線上，因此直線 FE 為 $\overline{AD}$ 的垂直平分線。由於 X 位於 $\overline{FE}$ 上，因此 $\overline{XA} = \overline{XD}$；又由於 $\overline{XC}$ 與 $\overline{XD}$ 對稱於 $\overline{AB}$，因此 $\overline{XC} = \overline{XD} = \overline{XA}$，所以 ΔAXC 為等腰三角形，$\angle XAC = \angle XCA = \angle XCY = 20°$，$P$ 與 X 確實是同一點。

剩下的工作就簡單了，我們只須求出上圖中的 $\angle YXC$ 即可。首先，由 $\angle ACE = 80°$ 及 $\angle YCX = 20°$ 可知 $\angle ECX = 80° + 20° = 100°$，而 $\overline{FC}$ 所對應的圓心角 $\angle FAC = 5 \cdot 20° = 100°$，因此圓周角 $\angle FEC = 50°$。三角形 EXC 中，$\angle EXC = 180° - 100° - 50° = 30°$，因此 $\angle YXC = \angle QPC = 30°$。

問題五：

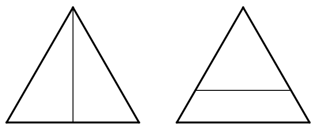
利用一根鋸子將一個等腰直角三角形鋸成面積相等的兩半的鋸法有很多種；下面的四種鋸法中，很明顯以左上方的鋸法切割線最短。



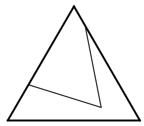
請問：要將一個正三角形鋸成面積相等的兩半，怎麼鋸可使得切割線最短？

解：

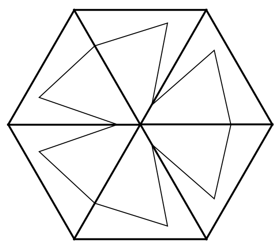
由題目中的四種鋸法讀者可能會覺得讓鋸子沿著三角形的一條高來鋸似乎是不錯的方法，不過只要多做一點嘗試，不難察覺應該還有更好的鋸法。舉例來說，如果某個正三角形的邊長為 1，則它的高為 $\sqrt{3}/2 = 0.866...$（下圖左），但是如果我們讓切割線與正三角形的某一邊平行，則切割線的長度只有 $1/\sqrt{2} = 0.707...$（下圖右）。



以下讓我們考慮一個較具一般性的情形；假設某條切割線的起點與終點分別位於正三角形的兩條不同的邊上，如下圖：



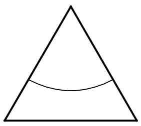
經由適當的旋轉與鏡射，我們可以用六個這樣的正三角形圍成一個正六邊形，而且所有六個正三角形中的切割線可以連成一條封閉曲線：



如果每個正三角形中的切割線都將正三角形切成面積相等的兩半，那麼正六邊形中由所有切割線圍成的封閉區域的面積必定是正六邊形面積的一半。至此讀者不難看出，不管正三角形中的切割線是什麼形狀，只要

它是由正三角形的某一邊連至另一邊而且將正三角形切成兩等分，那麼在由六個正三角形組成的正六邊形中，所有切割線一定可以連成一條封閉曲線，而且所圍成的封閉區域的面積是固定的，其大小一定是正六邊形面積的一半。

既然我們希望正三角形中的切割線越短越好，當然希望正六邊形中由切割線圍成的封閉區域的周長越短越好；既然此封閉區域的面積是固定的，很明顯我們應該讓封閉曲線的形狀為一個圓，此時正三角形中的切割線為一個圓的六分之一：

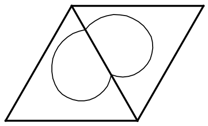


如果正三角形的邊長為 1，那麼正六邊形中的圓的面積為 $3\sqrt{3}/4$，由此可求得每個正三角形中的切割線長度為

$$\frac{2\pi}{6}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} = 0.673...$$

這個數值比前面讓切割線與正三角形的某一邊平行的作法又小了許多。

如果切割線的起點與終點位於正三角形的同一邊呢？此時兩個這樣的正三角形中的切割線就足夠圍出一個封閉區域：



此封閉區域的面積一定是平行四邊形面積的一半；為了讓封閉區域的周長儘量短，很明顯還是應該讓切割線連成一個圓。如果正三角形的邊長為 1，則圓面積為 $\sqrt{3}/4$，由此可求得每個正三角形中的切割線（形狀為半圓）的長度為

$$\frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4\pi}} = 1.166...$$

此值比前述作法要大得多；因此前述作法才是讓切割線最短的作法。

最後，讀者不妨回頭想想，如果要將腰長為 1 的等腰直角三角形切成兩等分，應該怎麼切？切割線最短是多少？（請注意：由四個及八個相同大小的等腰直角三角形可分別組合出不同大小的兩個正方形。）

參考資料

1.H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1961.

2.R. Honsberger, *Mathematical Gems II*, MAA, 1976.