完美的數

許介彥

大葉大學 電信工程學系

在全部無窮多個整數中，有沒有哪些數算得上是「完美」(perfect) 的數？您可能會覺得這個問題的答案見仁見智，要看每個人對「完美」如何定義而定，不過對數學家而言，哪些數堪稱「完美」卻有公認的標準，一點也不含糊。

完美數

大約與歐幾里得同一個時代（西元前三世紀左右）的希臘數學家發現在全部無窮多個整數中，有極少數整數具有以下特性：將一個數除了本身以外的所有因數相加的結果等於該數本身；他們認爲這是一個相當美妙的性質，因此將符合此性質的數稱爲「完美數」(perfect numbers)。

最小的完美數是 6，因爲 6 的因數有 1、2、3、6 等四個（本文只考慮正整數），而 1 + 2 + 3 = 6；下一個完美數是 28，它的真因數有 1、2、4、7、14 等，而$1+2+4+7+14=28$。

下一個完美數是多少呢？除了將正整數由小而大一個一個嘗試之外，有沒有什麼方法可以較有效率地找出更多的完美數呢？

因數的和

讓我們看看一個質數有沒有可能同時也是一個完美數。假設 p 是任意一個質數，那麼 p 的因數只有 1 與 p 兩個，除了 p 以外的因數就只有 1，而 1 顯然不等於 p，因此任何一個質數都不可能是完美數。

數學上通常將一個正整數 N 的所有因數（包括本身）的和記作 $\sigma(N)$，因數的個數則記作 $\tau(N)$，因此 $\sigma(6)=12$，$\tau(6)=4$，而 $\sigma(28)=56$，$\tau(28)=6$；當 N 爲質數時，$\sigma(N)=1+N$，$\tau(N)=2$。如果 N 是完美數，$\sigma(N)$ 很顯然會等於 $2N$；反過來說也成立：如果 $\sigma(N)=2N$，N 一定是完美數。

一個完美數有沒有可能是某個質數的平方，或三次方，或任意整數次方呢？如果 p 是質數，那麼一個形如 p^a 的數除了本身以外還有

$$1, p, \; p^2, \; \cdots\cdots, \; p^{a-1}$$

等 a 個因數，由等比級數的求和公式可知這些因數的和爲

$$1+p+p^2+\cdots+p^{a-1}=\frac{p^a-1}{p-1}$$

由於 p 至少爲 2（最小的質數），因此分母的 $(p-1)$ 至少爲 1，上式等號右邊的分式的值顯然一定小於 p^a，因此一個完美數不可能是某個質數的整數次方（也就是不可能只有一個質因數）。

讓我們試試更複雜一點的數。一個形如 $p^a q^b$（p 與 q 爲相異質數）的數有沒有可能是完美數呢？以 p^2q^3 爲例，下表列出了它所有的因數：

$$\begin{array}{llll} 1, & q, & q^2, & q^3, \\ p, & pq, & pq^2, & pq^3, \\ p^2, & p^2q, & p^2q^2, & p^2q^3 \end{array}$$

上表的每個數都可寫爲 $p^{\alpha}q^{\beta}$ 的形式，其中 $0 \le \alpha \le 2$ 且 $0 \le \beta \le 3$，因此 p^2q^3 總共有 $(2+1)(3+1)=12$ 個因數。上表的第二列是將第一列的各數乘以 p 而得，第三列是將第二列的各數乘以 p（也相當於將第一列的各數乘以 p^2）而得。當我們要將 p^2q^3 的所有因數相加時，由於第一列的四個數的和爲 $(1+q+q^2+q^3)$，第二列的和爲第一列的 p 倍，第三列的和爲第一列的 p^2 倍，因此 $N=p^2q^3$ 的所有因數（包括本身）的和爲

$$\sigma(N)=(1+p+p^2)(1+q+q^2+q^3).$$

請注意此時 $\sigma(N)=\sigma(p^2)\sigma(q^3)$。

一般而言，如果某數 $N=p^aq^b$（p 與 q 爲相異質數），那麼它的所有因數的和 $\sigma(N)$ 等於

$$(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)$$
$$=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}$$

而且 $\sigma(N)=\sigma(p^a)\sigma(q^b)$。

如果 $N=p^aq^br^c$ 呢？此時前面的表中的數全都是 N 的因數，表中所有的數的 r 倍、r^2 倍、……、r^c 倍也全都是 N 的因數；因此 N 的所有因數（包括本身）的和爲表中的數的和的 $(1+r+r^2+\cdots+r^c)$ 倍。

一般而言，如果某數 N 經質因數分解得 $N=p^aq^br^c\cdots$，那麼 N 的所有因數（包括本身）的和 $\sigma(N)$ 爲

$$(1+p+p^2+\cdots p^a)\cdot(1+q+q^2+\cdots+q^b)\cdot$$
$$(1+r+r^2+\cdots+r^c)\cdots$$
$$=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{c+1}-1}{r-1}\cdots.$$

而且 $\sigma(N)=\sigma(p^a)\sigma(q^b)\sigma(r^c)\cdots$；$N$ 的因數個數 $\tau(N)$ 則等於 $(a+1)(b+1)(c+1)\cdots$。

具特定形式的完美數

考慮具以下形式的數：$N=p\cdot 2^a$，其中的 p 爲大於 2 的質數。有了上述討論，我們立即知道 N 的所有因數（包括本身）的和爲

$$\sigma(N)=\frac{p^2-1}{p-1}\cdot\frac{2^{a+1}-1}{2-1}$$

如果 N 是完美數，$\sigma(N)$ 一定等於 $2N$，此時

$$\sigma(N)=(p+1)(2^{a+1}-1)=2(p\cdot 2^a)=2^{a+1}p$$
$$p(2^{a+1}-1)+(2^{a+1}-1)=2^{a+1}p$$
$$p=2^{a+1}-1.$$

所以如果 $(2^{a+1}-1)$ 是質數，$(2^{a+1}-1)2^a$ 必爲完美數。當然，這並不表示如果 $(2^{a+1}-1)$ 不是質數，$(2^{a+1}-1)2^a$ 就一定不是完美數。

形如 $(2^{n+1}-1)$ 的數有可能是質數，也有可能不是。從幾個較小的 n 來看：

$n=1$：$2^{1+1}-1=3$

$N=3\cdot 2^1=6$ 一定是完美數；

$n=2$：$2^{2+1}-1=7$

$N=7\cdot 2^2=28$ 一定是完美數；

$n=3$：$2^{3+1}-1=15$ 不是質數

$n=4$：$2^{4+1}-1=31$

$N=31\cdot 2^4=496$ 一定是完美數；

$n=5$：$2^{5+1}-1=63$ 不是質數

$n=6$：$2^{6+1}-1=127$

$N=127\cdot 2^6=8128$ 一定是完美數。

利用這個方法，我們的確可以找出一些

完美數，不過一個一個嘗試畢竟不方便；所幸對某些 n 而言，我們其實一眼就能看出 $(2^{n+1}-1)$ 不是質數。基本上，如果 $n+1$ 不是質數（例如 $n+1=st$ ，s 與 t 皆大於 1），那麼

$$2^{n+1}-1=2^{st}-1=(2^s)^t-1$$

由因式分解得

$$(2^s)^t-1=(2^s-1)((2^s)^{t-1}+\cdots+(2^s)+1)$$

此數顯然不是質數。因此只有當 $n+1$ 爲質數時，$(2^{n+1}-1)$ 才有可能是質數；我們如果要利用上述方式繼續找出更多完美數，並不需要嘗試 $n=7, 8, 9$ 的情形（因爲 $n+1=8$, 9, 10 都不是質數）；$n=6$ 之後下一個值得一試的 n 是 10（因爲 $n+1=11$ 爲質數），再下一個是 12，再下一個是 16 等。另外，形如 $(2^{n+1}-1)2^n$ 的完美數顯然全都是偶數（都是「偶完美數」)。

隨著n的增大，$(2^{n+1}-1)$ 的大小增加得非常快（注意n是位於指數），因此即使我們只針對會使得 $n+1$ 爲質數的n來判斷 $(2^{n+1}-1)$ 是否爲質數，這項工作所涉及的計算還是很快就會趨於複雜，形如 $(2^{n+1}-1)2^n$ 的完美數其實只有最前面幾個較容易被找到，這是爲什麼在歐幾里得的時代所知的完美數只有 6, 28, 496, 8128 等四個，而儘管又過了兩千多年，在廿世紀電腦發明之前已知的完美數才又增加了 8 個而已（這讓這少數幾個完美數顯得彌足珍貴而益發「完美」)。

形如 $(2^{n+1}-1)2^n$ 的完美數是否有無窮多個？這個問題的答案到目前爲止還沒有人知道；另一個尙待解決的難題是「有沒有任何一個完美數是奇數？」目前已知的完美數全爲偶數，而且全都具有上述 $(2^{n+1}-1)2^n$ 的形式。下面這個問題很早就有答案了：「是否所有的偶完美數一定具有 $(2^{n+1}-1)2^n$ 的形式？」答案出人意料地竟然是肯定的！以下我們介紹大數學家尤拉（Leonhard Euler, 1707–1783）對這個問題的証明。

尤拉的証明

假設 N 是任意一個偶數，N 必可寫爲 $2^n u$ 的形式，其中的 u 爲奇數且 $n\geq 1$ 。N 的所有因數的和爲

$$\sigma(N)=\sigma(2^n)\sigma(u)=(2^{n+1}-1)\sigma(u)$$

如果 N 爲完美數，$\sigma(N)$ 一定會等於 $2N$ ，也就是說，

$$\begin{aligned}(2^{n+1}-1)\sigma(u)&=2\cdot 2^n u=2^{n+1}u\\&=2^{n+1}u-u+u\\&=(2^{n+1}-1)u+u\end{aligned}$$

$$(2^{n+1}-1)(\sigma(u)-u)=u$$

由上式可知等號左邊的 $(\sigma(u)-u)$ 一定是右邊的 u 的因數，但 $(\sigma(u)-u)$ 同時也是 u 除了本身以外的所有因數的和，唯一的可能是 u 除了本身以外的因數只有一個，也就是 1（任何整數一定有一個因數爲 1），此時 u 爲質數而且 $u=(2^{n+1}-1)$。因此任何偶完美數一定具有 $(2^{n+1}-1)2^n$ 的形式，而且其中的 $(2^{n+1}-1)$ 一定是質數。

上述証明在尤拉去世後才發表出來，晚年的尤拉很可能不靠紙跟筆，閉著眼睛就想出來了（尤拉去世前雙眼失明長達十餘年）。

幾個有趣的性質

以下是幾個與完美數有關的性質。

性質一：

除了最小的 6 之外，其他每個偶完美數都滿足以下性質：將一個偶完美數的各個位數相加，再將結果的各個位數相加，如此重覆直到剩下一個阿拉伯數字爲止，此數字必爲 1。舉例來說，496 爲偶完美數，而 $4+9+6=19$，$1+9=10$，$1+0=1$。

要說明原因，首先注意由於 4（$=2^2$）除以 3 的餘數爲 1，因此 4 的任意正整數次方（也就是 2 的任意正偶數次方）除以 3 的餘數必定是 1。

每個偶完美數都具有 $(2^{n+1}-1)2^n$ 的形式，其中的 $(n+1)$ 爲質數，因此 $(n+1)$ 可能的値除了 2 之外全爲奇數。當 $(n+1)$ 爲奇數時，n 爲偶數，因此存在某個整數 k 使得

$$2^n=3k+1$$

等號兩邊同時乘以 2，得

$$2^{n+1}=6k+2$$
$$2^{n+1}-1=6k+1$$

因此

$$\begin{aligned}(2^{n+1}-1)2^n&=(6k+1)(3k+1)\\&=18k^2+9k+1\end{aligned}$$

所以 $(2^{n+1}-1)2^n$ 除以 9 的餘數爲 1。由於任何數除以 9 的餘數必定會等於原數的各個位數的和除以 9 的餘數（見本刊第 246 期「神奇的數字 9」），因此上述除了 6 以外的偶完美數都滿足的性質成立的原因就很明顯了。

爲什麼第一個偶完美數 6 較特殊呢？因爲 $6=(2^{1+1}-1)2^1$，此時的 $(n+1)$ 爲 2，是唯一不是奇數的質數。

性質二：

每個偶完美數的個位數必爲 6 或 8。

原因同樣不難理解。每個偶完美數都具有 $(2^{n+1}-1)2^n$ 的形式，其中的 $(n+1)$ 爲質數；我們先考慮 $(n+1)>2$ 的情形，此時 $(n+1)$ 爲奇數，一定可以寫爲 $4k+1$ 或 $4k+3$ 的形式。

如果 $n+1=4k+1$（$k\geq 1$），那麼

$$\begin{aligned}N=(2^{n+1}-1)2^n&=(2^{4k+1}-1)2^{4k}\\&=(2\cdot 16^k-1)\cdot 16^k\end{aligned}$$

由於 16^k 的個位數一定是 6（很明顯），因此 $(2\cdot 16^k-1)$ 的個位數一定是 1，此時完美數 N 的個位數爲 6。

如果 $n+1=4k+3$（$k\geq 0$），那麼

$$\begin{aligned}N=(2^{n+1}-1)2^n&=(2^{4k+3}-1)2^{4k+2}\\&=(8\cdot 16^k-1)\cdot 4\cdot 16^k\end{aligned}$$

其中 $(8\cdot 16^k-1)$ 的個位數一定是 7，$4\cdot 16^k$ 的個位數一定是 4，因此 N 的個位數爲 8。

當 $(n+1)=2$ 時對應到最小的完美數 6，同樣滿足此性質；因此每個偶完美數的個位數必爲 6 或 8。

性質三：

每個偶完美數的所有因數的倒數之和必定等於 2。例如 6 與 28 爲偶完美數，而

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2.$$

性質四：

每個偶完美數 $(2^{n+1}-1)2^n$ 都是由 1 開始的連續 $(2^{n+1}-1)$ 個正整數的和。由此可知每

個偶完美數都是所謂的「三角數」(triangular number)。例如：

$$6=1+2+3$$

$$28=1+2+3+4+5+6+7\,.$$

性質五：

除了 6 之外的每個偶完美數 $(2^{n+1}-1)2^n$ 都是由 1 開始的連續 $2^{n/2}$ 個正奇數的三次方的和。例如：

$n=2$： $28=1^3+3^3$

$n=4$： $496=1^3+3^3+5^3+7^3$

$n=6$： $8128=1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3$

以上三個性質不難由讀者自行加以證明。最後我們來看一個與 $\sigma(N)$ 及 $\tau(N)$ 有關的性質。

性質六：

對任意正整數 N 而言，如果 $\sigma(N)$ 是質數，則 $\tau(N)$ 必為質數。

我們前面已經看過，如果 N 可質因數分解為 $N=p^a q^b r^c\cdots$，則

$$\sigma(N)=\sigma(p^a)\sigma(q^b)\sigma(r^c)\cdots$$

因此如果 $\sigma(N)$ 是質數，N 一定只有一個質因數，也就是說，N 一定是形如 p^a 的數；這樣的 N 的所有因數之和為

$$\sigma(N)=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}$$

N 的因數個數則是 $\tau(N)=a+1$。

要証明性質六，我們接下來只須証明「若 $(p^{a+1}-1)/(p-1)$ 為質數，則 $(a+1)$ 為質數」即可，這又相當於証明「若 $(a+1)$ 不是質數，則 $(p^{a+1}-1)/(p-1)$ 必不是質數」。

如果 $(a+1)$ 不是質數，那麼必定存在正整數 s 與 t（皆大於 1）使得 $a+1=st$，此時

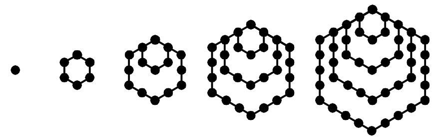
$$\frac{p^{a+1}-1}{p-1}=\frac{p^{st}-1}{p-1}=\left(\frac{(p^s)^t-1}{p^s-1}\right)\cdot\left(\frac{p^s-1}{p-1}\right)$$

必是兩個分別都大於 1 的整數的乘積；因此如果 $(a+1)$ 不是質數，$(p^{a+1}-1)/(p-1)$ 也必定不是質數。

練習題

以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

1. 找出所有擁有正好 30 個因數同時本身也是 30 的倍數的正整數。(答案：720, 1200, 1620, 4050, 7500, 11250)
2. 試證：若 a 與 b 互質，則 $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$。
3. 說明為什麼每個偶完美數表示成二進位數後由左而右一定是連續一些 1 緊接著連續一些 0，其中 1 的個數為質數，而 0 的個數則比 1 少一個。
4. 數列 1, 6, 15, 28, 45, 66,…所含的數稱為「六角數」(hexagonal number)；下圖說明了六角數名稱的由來：



1　6　15　28　45

試證：每個偶完美數都是六角數。

結語

一個可表為 (2^p-1) 且其中的 p 為質數的數通常稱為梅森數（Mersenne numbers），記

作 M_p ，因法國數學家（也是一位傳教士）Marin Mersenne（1588–1648）而得名。

當然， M_p 未必是質數，例如

$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$

$M_{23} = 2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \cdot 178481$

即不是質數；當 M_p 爲質數時，這種質數稱爲梅森質數（Mersenne primes）；世界上已知的最大質數常是梅森質數。由本文可知，每一個梅森質數都對應到一個偶完美數，因此每發現一個新的梅森質數就同時發現了一個新的偶完美數。

前面已經提過，隨著 n 的增大，$(2^{n+1} - 1)2^n$ 增加得相當快，因此儘管現代電腦的計算能力日新月異，在尋找新的梅森質數方面也確實提供了相當大的幫助，但是新的梅森質數（及偶完美數）並沒有因爲有了電腦的幫助而可以輕易地被找出來；到目前（2002 年 11 月）爲止，世界上已知的偶完美數的個數還不到 40 個。

下表統計了從歐幾里得的時代（約西元前三世紀）至今所找到的梅森質數的個數，其中從 1952 年開始的梅森質數都是由電腦幫忙找到的：

發現年代	個數
?? ~ 約 300 B.C.	4
約 300 B.C. ~ 1951	8
1952 ~ 1961	8
1962 ~ 1971	4
1972 ~ 1981	3
1982 ~ 1991	4
1992 ~ 2001	8

目前已知的梅森質數中最大的數爲 $(2^{13466917} - 1)$ ，因此已知的最大偶完美數爲 $(2^{13466917} - 1)2^{13466916}$ ，在十進制中，它總共有 8107892 個位數。

與完美數相關的研究在數學的發展史上曾經是相當熱門的領域，許多大數學家（如費馬與尤拉）曾經在研究完美數的過程中發現新的定理及証明技巧，其中某些發現（如費馬的小定理及尤拉對質數分布的分析等）對現代數論的發展有著深遠的影響。

世界上到底有沒有奇完美數呢？這個歷史悠久的難題從歐幾里得的年代延宕至今依然得不到確切的答案，不過經過了這麼多年的研究，數學家已經整理出一些任何一個奇完美數（如果存在的話）一定會具備的性質，例如：它一定會大於 10^{300} ，它一定會有大於 10^{20} 的質因數，它一定會有至少八個不同的質因數等。

除了奇完美數的個數外，偶完美數是否有無窮多個？梅森數中是否有無窮多個合數？這許多與完美數有關的問題目前「暫時」還沒有解答；他們正挑戰著現代的數學家，而且很可能將持續挑戰未來的數學家。

讓我們期盼在我們有生之年看得到這些問題能有「完美」的結局。

參考資料

1. 許介彥（2002），神奇的數字 9，科學教育月刊，第 246 期。
2. C. V. Eynden, *Elementary Number Theory*, 2nd edition, McGraw-Hill, 2001.
3. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford University Press, 1979.