中學生通訊解題第二十六期題目參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號 912601

(1) 試判斷 $2003\times2004\times2005\times2006+1$ 是否爲完全平方數？請詳述。

(2) 若一個數如上題形式（例：$4\times5\times6\times7+1$，$98\times99\times100\times101+1$），試證明此數是否爲完全平方數。

參考解答一：

(1)

$2003\times2004\times2005\times2006+1$

$=(2004^2-1)\times(2005^2-1)+1$

$=2004^2\times2005^2-(2004^2+2005^2)+2$

$2004^2+2005^2=(2005-2004)^2+2\times2004\times2005$

$=1+2\times2004\times2005$ 代入上式

得 $2004^2\times2005^2-(2004^2+2005^2)+2$

$=2004^2\times2005^2-(1+2\times2004\times2005)+2$

$=2004^2\times2005^2-2\times2004\times2005+1$

$=(2004\times2005-1)^2$

所以 $2003\times2004\times2005\times2006+1$ 是完全平方數。

(2)

令 a,b 爲整數且 b=a+1，將上題形式改寫爲

$(a-1)\times(b-1)\times(a+1)\times(b+1)+1$

依(1)作法得$(a^2-1)\times(b^2-1)+1$

$=a^2\times b^2-(a^2+b^2)+2$

$= a^2\times b^2-((b-a)^2+2ab)+2$

$=a^2\times b^2-(1+2ab)+2$

$= (ab)^2-2ab+1=(ab-1)^2$ 得證

所以形如 $k\times(k+1)\times(k+2)\times(k+3)+1$ 的數(k 爲整數)爲完全平方數。

參考解答二：

(1)

$2003\times2004\times2005\times2006+1$

$=(2003^2+3\times2003)\times(2003^2+3\times2003+2)+1$

$=(2003^2+3\times2003)^2+2(2003^2+3\times2003)+1$

$=(2003^2+3\times2003+1)^2$

所以 $2003\times2004\times2005\times2006+1$ 是完全平方數。

(2)

設此形式爲 $k\times(k+1)\times(k+2)\times(k+3)+1$，k 爲整數

$k\times(k+1)\times(k+2)\times(k+3)+1=k^4+6k^3+11k^2+6k+1$

設一整數爲k^2+ak+1，a爲整數

得$(k^2+ak+1)^2=k^4+2ak^3+(2+a^2)k^2+2ak+1$ 爲完全平方數

若$k^4+6k^3+11k^2+6k+1$ 爲完全平方數，

則a有解且$k^4+2ak^3+(2+a^2)k^2+2ak+1$ 與其對應的各項係數相等 => a=3

所以 $k\times(k+1)\times(k+2)\times(k+3)+1$ 爲k^2+3k+1 的完全平方數。

推廣：設 n 爲首數，m 爲公差，n,m 爲整數

$n\times(n+m)\times(n+2m)\times(n+3m)+m^4$

$=(n^2+3nm)\times(n^2+3nm+2m^2)+m^4$

$=(n^2+3nm)^2+2m^2(n^2+3nm)+m^4$

$=(n^2+3nm+m^2)^2$

則符合上述形式者皆爲完全平方數。

解題重點：

展開後用平方和的形式來觀察是否爲一完全平方數，再以未知數帶入整理出完全平方數

的樣子，反向來推敲若為一平方數則形式必相同(如解二)亦可。

評析：

本題徵答人數共有 194 人，答對者共 141 人，平均得分為 6.34 分。其中答題優良或解法富參考價值者有台北市興雅國中林昭平同學、台北縣江翠國中林志嘉同學、陳建宏同學、積穗國中蕭屹宏同學、福和國中張引碩同學、基隆市銘傳國中楊昀琪同學。

問題編號
912602

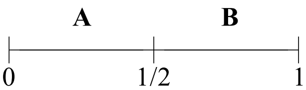
在數線上取出 2003 個相異點，使這些點皆落在 0 到 1 之間，為了方便起見，小武便將第 1 個點編號為a_1，第 2 個點編號為a_2，…，第 2003 個點編號為a_{2003}(這些點是隨機取出的，所以此編號沒有按照大小順序)，小雄想了想又將這 2003 個點從小排到大再編號，形成一組新的點列：b_1，b_2，…，b_{2003}，且滿足 $0< b_1<b_2<\cdots<b_{2003}<1$。這時一旁的小民說:「你們知道嗎？這兩組的數列所包含的數是一樣的。」大家都點點頭，小民接著又說:「而且一定可以找到一個a_n及b_k使得$(1-b_k)\times a_n \leq \frac{1}{4}$

唷！」哇！大家都愣住了，過一會兒大家都露出恍然大悟的表情。

請問:他們的理由是什麼呢？試證明之。 (提示：此題可用鴿籠原理)

參考解答一：

先將 0 到 1 的數線等分作兩段 AB 去討論。



(1) 若 2003 個點在AB兩段中皆有分布，則可取A段中的一點 a_n 及B段中的一點 b_k

=> $(1-b_k)\times a_n \leq \frac{1}{4}$ 成立。

(2) 若 2003 個點皆分布在A段中，則可取$a_n=b_k$

=> $(1-b_k)\times a_n \leq (1-b_k)\times b_k = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - b_k)^2$

$\leq \frac{1}{4}$ => $(1-b_k)\times a_n \leq \frac{1}{4}$ 成立。

(3) 若 2003 個點皆分布在 B 段中，

則同(2) => $(1-b_k)\times a_n \leq \frac{1}{4}$ 成立。

由(1)(2)(3)，$(1-b_k)\times a_n \leq \frac{1}{4}$ ，得證。

參考解答二：

$\{ a_1，a_2，\cdots，a_{2003}\}=\{ b_1，b_2，\cdots，b_{2003}\}$

從a_1，a_2，…，a_{2003}中任取一數a_n，必可從數列b_1，b_2，…，b_{2003}中找到一數b_k，使得$b_k \geq a_n$，

$1 \leq k \leq 2003$，$1 \leq n \leq 2003$

$(1-b_k)\times a_n \leq (1-b_k)\times b_k = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - b_k)^2$

$\because 0 \leq (\frac{1}{2} - b_k)^2 \quad \therefore (1-b_k)\times a_n \leq \frac{1}{4}$ ，得證。

解題重點：

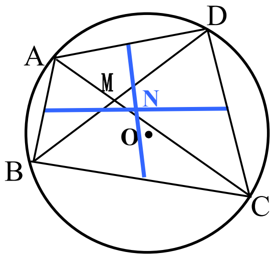
可用鴿籠原理分堆判斷，取得適當點予以證明。

評析：

本題徵答人數共有 27 人，其中全對者共 13 人。平均得分為 5.03 分。其中答題優良或解法富參考價值者有北市興雅國中林昭平同學、基市銘傳國中楊昀琪同學。

問題編號
912603

四邊形 ABCD 內接於一圓，O 為此圓圓心，M 為對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 之交點，N 為對邊中點連線的交點，如圖一。試證明 $\overline{OM} \geqq \overline{ON}$。



圖一

參考解答：

作 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 中點 E、F

連接四邊形 PQRS 與 QESF

=> PQRS 與 QESF 皆為平行四邊形

=> N 為 $\overline{EF}$ 的中點

=> $\overline{OE}+\overline{OF} \geqq 2\overline{ON}$ --------------------(1)

連接 $\overline{OE}$ 與 $\overline{OF}$

$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 為圓上兩弦且 E、F 分別為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 之中點

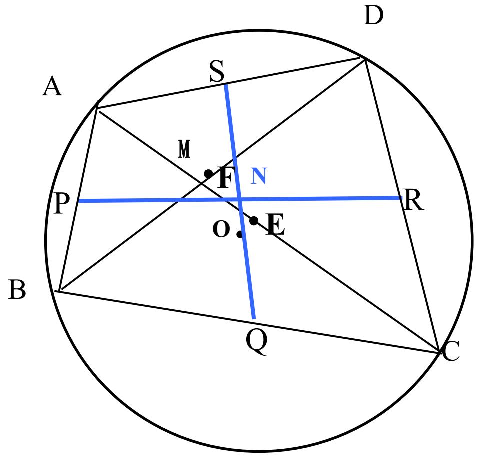
=> $\overline{AC} \perp \overline{OE}$ 且 $\overline{BD} \perp \overline{OF}$

=> $\overline{OM} \geqq \overline{OE}$，$\overline{OM} \geqq \overline{OF}$

=> $2\overline{OM} \geqq \overline{OE}+\overline{OF}$ --------------------(2)

由(1)(2) => $2\overline{OM} \geqq \overline{OE}+\overline{OF} \geqq 2\overline{ON}$

=> $\overline{OM} \geqq \overline{ON}$，得證。



圖一

解題重點：

以弦心距為最短距離可觀察出 $\overline{OM}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$ 三者間的大小關係，後由中點連線段平行底邊且為底邊長的一半得知 N 為 $\overline{SQ}$ 及 $\overline{PR}$ 的中點，再製造出平行四邊形並利用其特性得到 N 為 $\overline{EF}$ 的中點，得出 $\overline{ON}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$ 三者間的關係。

評析：

本題徵答人數共有 4 人，其中全對者共 2 人。平均得分為 3.50 分。其中答題優良或解法富參考價值者有台北縣福和國中劉軒志同學。

問題編號
912604

若 n 為一正整數，a_1、a_2、⋯、a_n 為 n 個不同的數。若將 a_1、a_2、⋯、a_n 重新排列成 b_1、b_2、⋯、b_n，試問：應如何排列才能使 $|b_1-b_2|+|b_2-b_3|+|b_3-b_4|+\cdots+|b_{n-1}-b_n|+|b_n-b_1|$ 之值為最大？

參考解答：

將 a_1、a_2、⋯、a_n 按遞增順序重新排列成 c_1、c_2、⋯、c_n，即 $c_1<c_2<\cdots<c_n$ 且 $\{a_1$、a_2、⋯、

$a_n\}=\{c_1$、c_2、⋯、$c_n\}$

若將 $|b_1-b_2|+|b_2-b_3|+|b_3-b_4|+\cdots+|b_{n-1}-b_n|+|b_n-b_1|$ 的絕對值去掉，

則會形如 $\pm(b_1-b_2)\ \pm(b_2-b_3)\ \pm(b_3-b_4)\ \pm\ \cdots\ \pm(b_{n-1}-b_n)\ \pm(b_n-b_1)$之代數式，且不論±如何取，必定會有 n 個“+”、n 個“−”。

(1)若 n 爲奇數

則$\pm(b_1-b_2)\ \pm(b_2-b_3)\ \pm\ \cdots\ \pm(b_{n-1}-b_n)\ \pm(b_n-b_1)$

$\leqq[2(c_n+c_{n-1}+\cdots+c_{(n+3)/2})+c_{(n+1)/2}]-[2(c_1+c_2+\cdots+c_{(n-1)/2})+c_{(n+1)/2}]$

$=[2(c_n+c_{n-1}+\cdots+c_{(n+3)/2})]-[2(c_1+c_2+\cdots+c_{(n-1)/2})]$

---(A)

(2)若 n 爲偶數

則$\pm(b_1-b_2)\ \pm(b_2-b_3)\ \pm\ \cdots\ \pm(b_{n-1}-b_n)\ \pm(b_n-b_1)$

$\leqq 2(c_n+c_{n-1}+\cdots+c_{(n+2)/2})-2(c_1+c_2+\cdots+c_{n/2})$

---(B)

(A)(B)兩式皆爲$\pm(b_1-b_2)\ \pm(b_2-b_3)\ \pm(b_3-b_4)\ \pm\ \cdots\ \pm(b_{n-1}-b_n)\ \pm(b_n-b_1)$中最大的前n項減去最小的後n項，所以可將(A)(B)兩式合併成一個式子表示：

$2(c_n+c_{n-1}+\cdots+c_{(n+1)-[n/2]})\ -\ 2(c_1+c_2+\cdots+c_{[n/2]})$，其中[x]指的是不大於x的最大整數。

$=>\pm(b_1-b_2)\pm(b_2-b_3)\pm(b_3-b_4)\pm\cdots\pm(b_{n-1}-b_n)\pm(b_n-b_1)$

$\leqq\ 2(c_n+c_{n-1}+\cdots+c_{(n+1)-[n/2]})\ -2(c_1+c_2+\cdots+c_{[n/2]})$

由於 $|b_1-b_2|+|b_2-b_3|+|b_3-b_4|+\cdots+|b_{n-1}-b_n|+|b_n-b_1|$ 爲相鄰二數之絕對值之和，要使此和愈大，則相鄰二數之差要愈大愈好，故考慮下列情形：

$b_1=c_n$, $b_2=c_1$, $b_3=c_{n-1}$, $b_4=c_2$, $b_5=c_{n-2}$, $b_6=c_3$,

--- (＊)

再以 n 來分別討論：

(3)若 n 爲奇數

$=>b_{2k+1}=c_{n-k}\quad ,\ 0\leqq k\leqq\frac{n-1}{2}$

$b_{2k}=c_k\quad ,\ 1\leqq k\leqq\frac{n-1}{2}$

$=>|b_1-b_2|+|b_2-b_3|+|b_3-b_4|+\cdots+|b_{n-1}-b_n|+|b_n-b_1|$

$=|c_n-c_1|+|c_1-c_{n-1}|+|c_{n-1}-c_2|+\cdots+|c_{(n-1)/2}-c_{(n+1)/2}|+|c_{(n+1)/2}-c_n|$

$=(c_n-c_1)+(c_{n-1}-c_1)+(c_{n-1}-c_2)+\cdots+(c_{(n+1)/2}-c_{(n-1)/2})+(c_n-c_{(n+1)/2})$

$=[2(c_n+c_{n-1}+\cdots+c_{(n+3)/2})+c_{(n+1)/2}]-[2(c_1+c_2+\cdots+c_{(n-1)/2})+c_{(n+1)/2}]$ =(A)式

(4)若 n 爲偶數

$=>b_{2k}=c_k\quad ,\ 1\leqq k\leqq\frac{n}{2}$

$b_{2k+1}=c_{n-k}\quad ,\ 0\leqq k\leqq\frac{n-2}{2}$

$=>|b_1-b_2|+|b_2-b_3|+|b_3-b_4|+\cdots+|b_{n-1}-b_n|+|b_n-b_1|$

$=|c_n-c_1|+|c_1-c_{n-1}|+|c_{n-1}-c_2|+\cdots+|c_{n-(n-2)/2}-c_{n/2}|+|c_{n/2}-c_n|$

$=(c_n-c_1)+(c_{n-1}-c_1)+(c_{n-1}-c_2)+\cdots+(c_{(n+2)/2}-c_{n/2})+(c_n-c_{n/2})$

$=2(c_n+c_{n-1}+\cdots+c_{(n+2)/2})-2(c_1+c_2+\cdots+c_{n/2})$

=(B)式

=>將a_1、a_2、⋯、a_n以(＊)的方式排序(若n爲奇數則按(3)；若n爲偶數則按(4))，即可使 $|b_1-b_2|+|b_2-b_3|+|b_3-b_4|+\cdots+|b_{n-1}-b_n|+|b_n-b_1|$ 產生最大值。

解題重點：

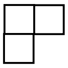
本題爲絕對值的簡單應用，$|a-b|$即爲 a、b 間的距離，欲使此數愈大，則距離愈遠愈佳。

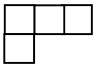
將題意轉化為排圓圈，使其相鄰之差額的和為最大。

評析：

本題徵答人數共有 29 人，其中全對者共 0 人。平均得分為 1.62 分。多數同學可想出排列方式但皆無詳細證明或解釋，嚴格來說本題答題品質偏低。本題無答題優良之學生。

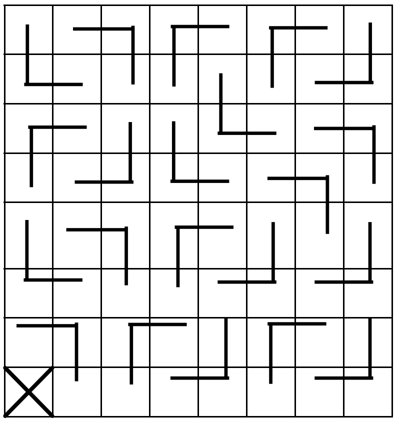
問題編號 912605

(1) 將 8×8 棋盤的一角剪去一個 1×1 正方形，試問：剩下的 63 個方格能否剪成 21 個  ？

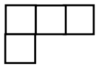
(2) 將 8×8 棋盤的一角剪去一個 2×2 正方形，試問：剩下的 60 個方格能否剪成 15 個  ？

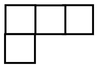
參考解答：

(1)可以，如圖所示即可。



(2) 先以右圖的方式將棋盤塗色。

將左下角剪去一 2×2 的正方形後，其餘將奇數排塗黑，則  不論如何剪，一定為一黑三白或一白三黑。

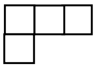
假設共可剪成 15 個 ，

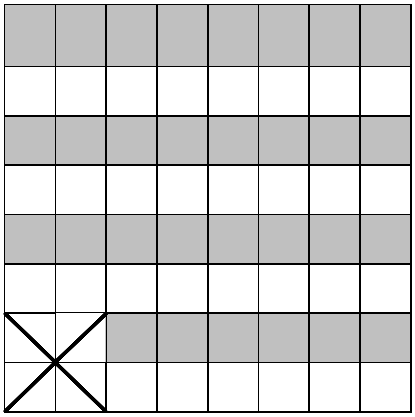
且共 x 個一白三黑、y 個一黑三白(xy 為整數)

$\Rightarrow x+y=15$

$3x+y=3y+x=30$

得 $x=y \Rightarrow 2x=15 \Rightarrow x=y=7.5$ →←

所以剪去 2×2 的正方形後，此棋盤無法剪成 15 個  。



解題重點：

分割欲排入的幾何圖形，以適當的著色方式輔助分割。

評析：

本題徵答人數共有 142 人，其中全對者共 41 人。平均得分為 3.50 分。其中答題優良或解法富參考價值者有台北市敦化國中<u>曾偉綸</u>同學。