

蜂巢細胞結構的行動網路—幾何問題探討

韓雅倫 厲家穎 李書霽 林瑋茹 陳柏安
高雄市立正興國民中學

摘要

現在社會每個人都隨身攜帶一隻手機，有事可隨時聯絡。從學校操場可以看到許多基地台，我們覺得要如何佈置基地台，產生最大涵蓋面積，這個問題很有興趣。

楊博士行動通信技術的資料，我們從中獲益極大，我們從資料中了解通信的蜂巢結構，及頻率重複使用的概念。頻率重複使用，其條件為兩兩相鄰細胞須使用不同頻率(同四色定理)而且使用相同頻率的細胞距離需相等。

有那些頻率數可供重複使用，我們找到 3、4、7、9、12、13、16、19、21、25、27、28、31、36、37、39、43、49……頻率數去重複使用，且滿足 $D = \sqrt{3N} R$ 。

由繪製的狀態圖中我們深深地感受到數學的深邃之美及規律的可愛。

關鍵詞：蜂巢細胞結構、行動網路

壹、前言

本件作品我們由幾何方向去探討生活中行動基地台細胞結構問題。在作品發展中，許多老師看過我們的作品並提出回響，例如高師大賴鵬仁老師覺得七細胞重複使用型態圖有問題、正興國中江盈柔老師告訴我們，用相同的周長來比較正三、四、六邊形涵蓋面積似乎不妥、許麗慧老師覺得原作品與五色定理的相關敘述並不恰當，我們在期刊投稿中審查委員也提出許多建議意見，這些寶貴意見幫助我們完成作品，我們從中受益良多。

作品發表的目地，首先我們希望通信領

域方面的讀者也能提供我們更多的回響，再來一般讀者對於行動通信第一個想法即是電磁波的問題，其實在這個領域有許多數學問題值得再探討例如：細胞分裂時的使用型態。作品中也有許多數學推廣的問題也希望讀者能共同一起研究、分享。

貳、研究動機

自古以來，人類對於蜜蜂的勤勞以及蜂巢的巧妙精準，無不讚揚有加。帕普斯說：「其實蜂巢是盛裝蜂蜜的庫房，他是由許多正六邊形，一個接著一個，緊密地擺列，中間沒有一點空隙。這種優美設計的最大優點是避

免雜物攙入，怕弄髒那些清潔產品。蜜蜂希望有勻稱規則的圖案，也是需要等邊、等長的圖形……鋪滿整個平面區域。蜜蜂憑著本能智慧選擇了正六邊形。」

現在社會每個人都隨身攜帶一隻手機，有事可隨時聯絡。從學校操場可以看到許多基地台，我們覺得要如何佈置基地台，產生最大涵蓋面積，這個問題很有興趣，課本第三單元『三角形與圓』主題 3“圓與正六邊形”老師正在教此單元，老師也鼓勵我們去探討。

參、研究目的

- 一、探討基地台在發射距離同樣遠的電磁波下如何佈置基地台，產生最大涵蓋面積。
- 二、對於無數多個的正六邊形細胞基地台，在極少數量頻率下，如果兩兩細胞使用不同頻率，探討使用相同頻率正六邊形細胞距離關係。
- 三、如果兩兩相鄰細胞使用不同頻率，且相同頻率細胞距離一定情況下，有那些頻率數可供重複使用。

肆、研究器材設備

電腦、印表機、方格紙、直尺、塑膠墊。

伍、研究過程與方式

- 一、為了研究正 n 邊形鋪滿平面的關係，我們翻遍全校圖書館的藏書加上我們的智慧我們終於找到其關係在“幾何的寶藏”

帕普斯說能鋪滿平面區域的正多邊形只有正三、四、六邊形其根據為

$$\text{正 } n \text{ 邊形內角和} = (n - 2) \times 180^\circ$$

$$\Rightarrow \text{每個內角度數為} = \frac{n - 2}{n} \times 180^\circ$$

要鋪滿平面區域不留空隙，

$$\text{正 } n \text{ 邊形內角的整數倍應為 } 360^\circ$$

設 k 個正 n 邊形在平面上的一點接合，

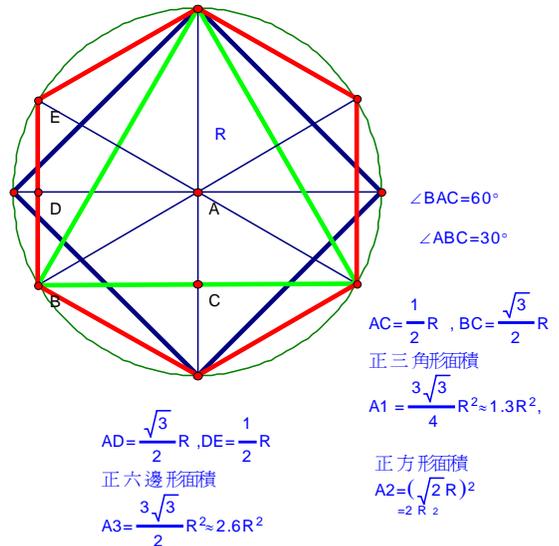
$$k \times \frac{n - 2}{n} \times 180^\circ = 360^\circ$$

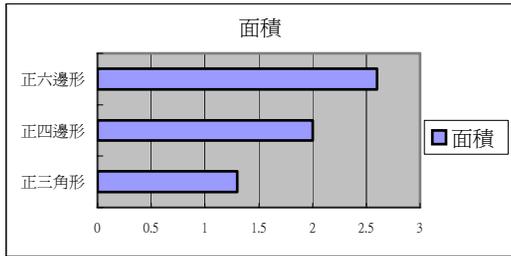
$$k \times \frac{n - 2}{n} = 2 \Rightarrow n = \frac{2k}{k - 2} = 2 + \frac{4}{k - 2}$$

因為 n 為正整數 $\therefore \frac{4}{k - 2}$ 也須為正整數

因此 $n = 3, 4$ 或 6

二、比較圓內正 n 邊形與面積關係

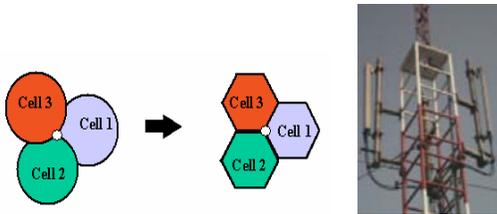




由上面我們很清楚發現，使用同樣多的原料，正六邊形比正三角形、正方形具有最大的面積，從而可以發射出最大的通信涵蓋面積，也說明了基地台細胞的佈置為何選擇了正六邊形的蜂巢結構。

三、我們費盡周章終於由東華大學楊慶隆博士行動通信技術的資料找到基地台佈置圖---蜂巢結構。

天線覆蓋範圍 白點為基地台 一座基地台有 3 支天線 cell 中文為細胞



(一) 楊博士行動通信技術的資料，我們從中獲益極大我們從資料中了解通信的蜂巢結構，及頻率重複使用的概念。

1. 首先我們知道對於無數多個的正六邊形細胞，如果相鄰細胞頻率相同會發生干擾，因此相鄰細胞頻率須不相同。問題是有幾萬個細胞，可是可以使用的頻率數量不但少而且要付非常貴的費用。那要如何解決這個問題了？

想到了嗎?沒錯！頻率重複使用，其條件

為兩兩相鄰細胞須使用不同頻率（與四色定理條件相同）而且使用相同頻率的細胞距離需相等。

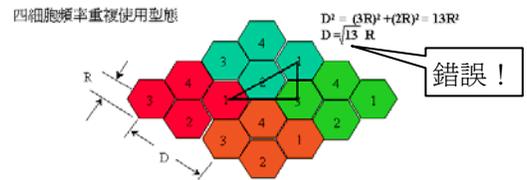
2. 現在我們要回饋給他的是 $D = \sqrt{12}R$ 並非

$$D = \sqrt{13}R$$

D: 為使用相同頻率正六邊形細胞距離

R: 正六邊形中心點到頂點距離或細胞的邊長。

下圖為楊博士行動通信技術的資料



因為 R 為正六邊形中心到頂點距離，

楊博士的 $D^2 = (3R)^2 + (2R)^2 = 13R^2$ 式子

中“(2R)”應為正六邊形中心點到邊長的高 H，

$$\text{又 } H = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$\text{因為 } D^2 = (3R)^2 + (2H)^2 = 9R^2 + \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} R\right)^2 = 12R^2$$

$$\therefore D = \sqrt{12}R$$

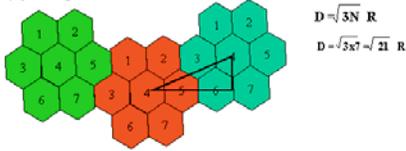
(二) 楊博士於文章中討論 4/7/12/21 頻率重複使用的問題，如果兩兩細胞使用不同頻率，也可用 7 個頻率去重複使用。

1. 這次楊博士使用一個神奇公式 $D = \sqrt{3N} R$ ，我們決定檢驗一下公式而且我們發現文中狀態圖有問題。

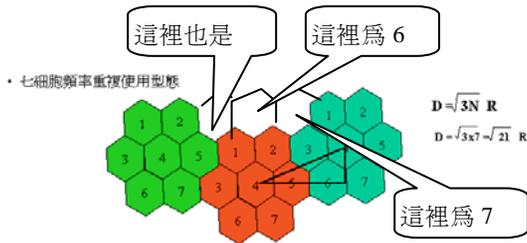
N: 為要使用頻率數

D: 為使用相同頻率正六邊形細胞距離

• 七細胞頻率重複使用型態

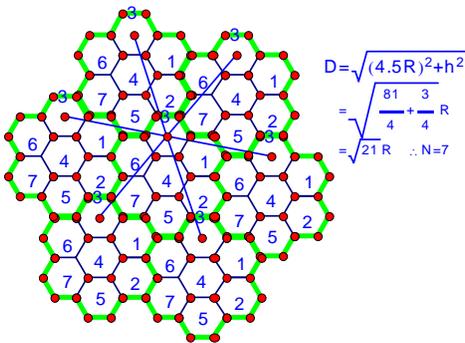


2. 你們有沒有發現前面七細胞頻率重複使用狀態圖形怪怪的。沒錯！有問題，問題在那裡？



正確的細胞重複使用狀態圖，如下圖且

$$D = \sqrt{3N} R = \sqrt{3 \times 7} R$$



- (1) 楊博士狀態圖中上方有三個空白細胞位置，若依頻率重複使用規則，左上 2 空白會出現“6”頻率相鄰重複使用。
- (2) 若在圖上再插入一組七細胞時，則多空出一細胞。
- (3) 請參考左圖正確狀態圖。

(三) 由於楊博士於文章中並無討論 12 個頻

率去重複使用情況，這任務就交給我們處理。

我們對於無數多個的正六邊形細胞，如果兩兩細胞細胞基地台使用不同頻率，也可用 12 個頻率去重複使用。如下圖 3.1

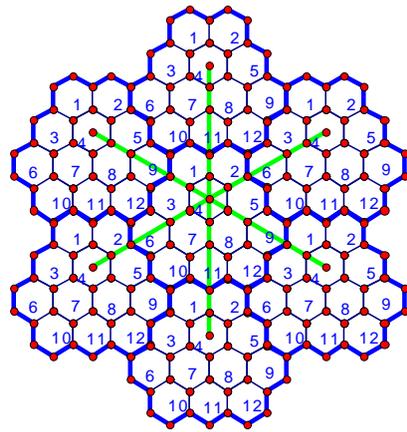


圖 3.1

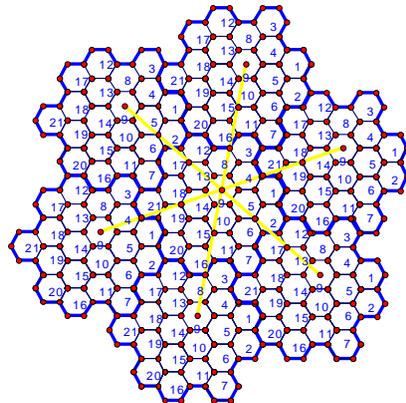


圖 3.2

這次我們直接用肉眼就知道 $D=6R$ ，若用公式亦可得知 $D = \sqrt{3 \times 12} R = 6R$ 。

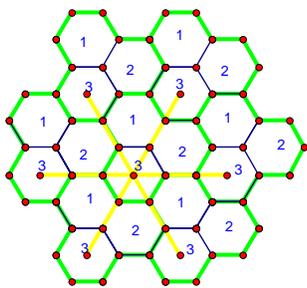
楊博士說無數多個的正六邊形細胞，如果兩兩細胞細胞使用不同頻率，也可用 21 個頻率去重複使用。如圖 3.2

$$D = \sqrt{3 \times 21} R = \sqrt{63} R$$

(四) 楊博士於文章內容中提到已知 4, 7,

12, 21 個頻率可重複使用，除了這四個數外，到底還有那些數也可以使用？這真是驚奇的發現了，雖然辛苦但好美！！

1. 首先不同 3 個頻率細胞也可重複使用，而且同編號距離相同，信不信看下圖 A。(ps 老師說當初他滿腦四色定理，所以他沒想到 3 也可以)



$$D = 3R = \sqrt{3 \times 3} R$$

$$N = 3$$

圖 A

2. 我們將全體組員所繪出的符合頻率重複使用狀態圖集中時，發現某一頻率與其相同頻率出現的位置，恰好在以該細胞中心點與其邊長為 D 正六邊形頂點上。圖 B 為我們發展的符合頻率重複使用數據的推算圖。

(1) 以圖的中心點為準，依次向外發展我們共

第 1 條線	N=3	$D = \sqrt{9} R$	第 2 條線	N=4	$D = \sqrt{12} R$	第 3 條線	N=7	$D = \sqrt{21} R$
第 4 條線	N=9	$D = \sqrt{27} R$	第 5 條線	N=12	$D = \sqrt{36} R$	第 6 條線	N=13	$D = \sqrt{39} R$
第 7 條線	N=16	$D = \sqrt{48} R$	第 8 條線	N=19	$D = \sqrt{57} R$	第 9 條線	N=21	$D = \sqrt{63} R$
第 10 條線	N=25	$D = \sqrt{75} R$	第 11 條線	N=27	$D = \sqrt{81} R$	第 12 條線	N=28	$D = \sqrt{84} R$
第 13 條線	N=31	$D = \sqrt{93} R$	第 14 條線	N=36	$D = \sqrt{108} R$	第 15 條線	N=37	$D = \sqrt{111} R$

畫了 7 層正六邊形。在第一層中 依頻率重複使用相鄰須不同頻率的規則，是不存在同頻率的細胞。 在第二層中，我們可以發現有兩種距離形態，如圖 B 中第一條線與第二條線。在第三層中，我們也可以發現有兩種距離形態，如圖 B 中第三條線與第四條線，依此方法繼續推展。

- (2) 下圖我們僅畫了 18 條線，若有興趣的讀者可依照我們的方法繼續畫下去可找出更多滿足細胞重複使用的數字。
- (3) 將每條線複製經旋轉 60 度時，你可以輕鬆完成該頻率數的狀態圖我們文中的圖就是依此畫出來的。
- (4) 下方表格距離的值，我們使用商高定理計算得知再對應其所對應狀態圖，可以看出 $D = \sqrt{3N} R$ 的關係。

第 16 條線	N=39	$D = \sqrt{117} R$	第 17 條線	N=43	$D = \sqrt{129} R$	第 18 條線	N=49	$D = \sqrt{147} R$
---------	------	--------------------	---------	------	--------------------	---------	------	--------------------

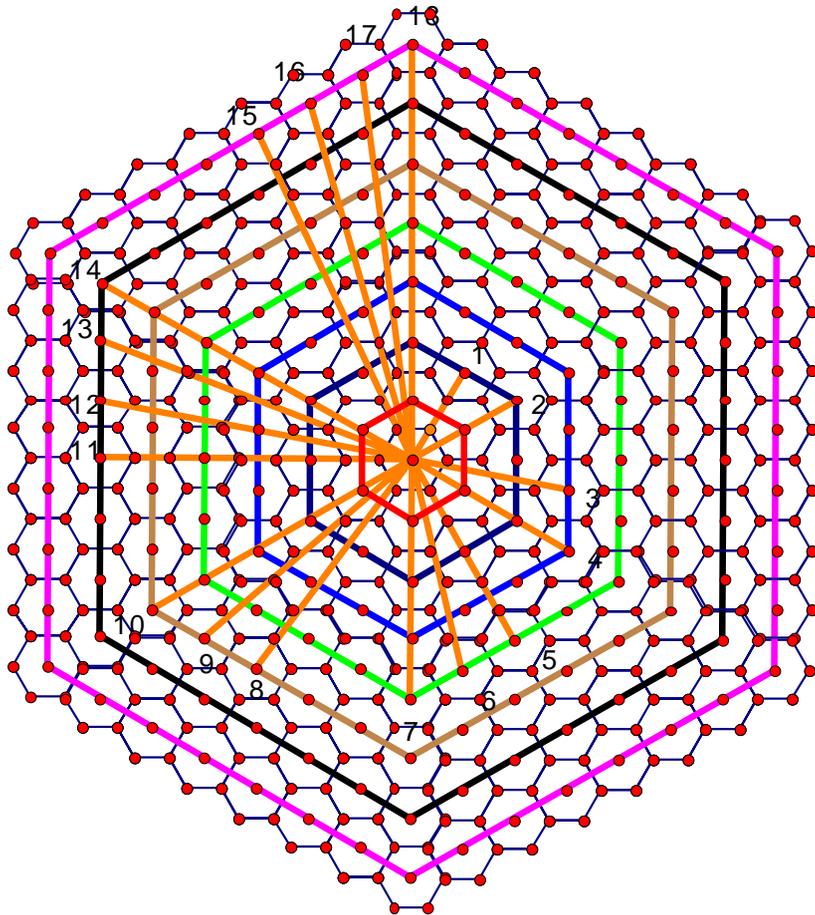


圖 B

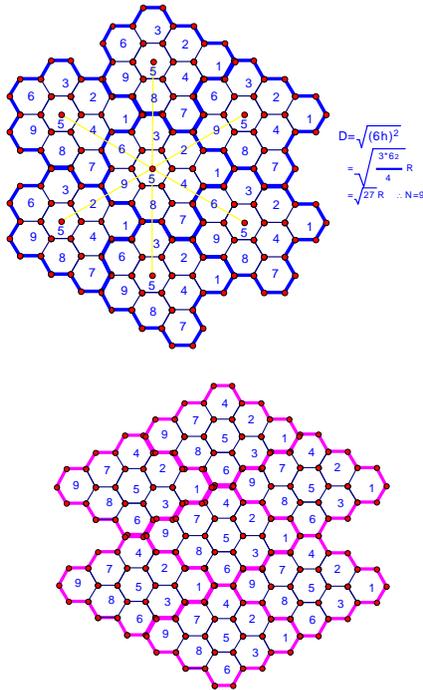
- 3.我們發現不僅 4, 7, 12, 21 個頻率可重複使用, 正確數據為 3、4、7、9、12、13、16、19、21、25、27、28、31、36、37、39、43、49.....太多了!
- 4.在我們作品發展中老師出一個怪問題—他說 5 應該也可以, 他以非常嚴肅的語氣說這是希伍德的五色定理, 讓我們傷腦筋好幾天。

原因

- (1) N=5 的細胞頻率重複使用可以滿足兩兩相鄰細胞須使用不同頻率的條件, 我們也完成其狀態圖, 但狀態圖中使用相同頻率細胞距離值並不相同, 不滿足細胞頻率重複使用條件。
- (2)在我們發展推算圖中(如圖 B), 邊長均為 R 的細胞, 任意兩兩不同細胞中點的距離值

不存在 $D = \sqrt{15}R$ 的這個距離值，也就是說 $N=5$ 的細胞狀態圖，無法滿足重複使用條件。

5.N 細胞的狀態圖並不僅是只有一種。例如 $N=9$ 時，狀態圖也有差丕！



(五) 現在有一鄉鎮都市，經評估通話使用量，因此決定每座微細胞正六邊形中心點到頂點距離或細胞的邊長為 500 公尺，為避免同頻干擾相同頻率細胞須相距 6 公里，請問讀者該城鎮應規劃為多少頻率重複使用？

$D=6$ 公里=6000 公尺

N =頻率重複使用數

$R=500$ 公尺

因為 $D = \sqrt{3NR}$

$$6000 = \sqrt{3N} \times 500$$

$$\therefore N = 48$$

$N=48$ ，也就是該城鎮可規劃為 48 頻率

重複使用狀態

“48”也是一個頻率重複使用數字，讀者請依照我們發展的推算圖(如圖 B)

在多畫一層又可找到 48、49、52、57、64 共五個頻率可重複使用數。

陸、研究結果

一、正六邊形比正三角形、正方形具有最大的面積域，從而可以發射出最大的通信涵蓋面積。也說明了基地台細胞的佈置為何選擇了正六邊形的蜂巢結構。

二、如果兩兩細胞使用不同頻率，若用 4 個頻率去重複使用於無數多個的正六邊形細胞基地台。 $D = \sqrt{12}R$ 並非 $D = \sqrt{13}R$
 D :為使用相同頻率正六邊形細胞距離。

三、對於無數多個的正六邊形細胞，如果兩兩細胞使用不同頻率，可用 3、4、7、9、12、13、16、19、21、25、27、28、31、36、37、39、43、49……個頻率重複使用。

驗證公式 $D = \sqrt{3N} R$

N :為要使用頻率數 非常正確。

	3 個頻率去重複使用	4 個頻率去重複使用
$D = \sqrt{3N} R$	$D = \sqrt{9}R$	$D = \sqrt{12} R$
7 個頻率去重複使用	12 個頻率去重複使用
$D = \sqrt{21}R$	$D = \sqrt{36} R$R

柒、討論

有那些頻率數一定可滿足頻率重複使用條件？

- 一、我們發現”平方數”除 1 以外 4、9、16、25、....這些頻率數均可頻率重複使用，而且繪製的狀態圖將外圍的細胞中點連線均可形成”菱形”。
- 二、我們也發現 $6N+1$ 例如 7、13、19、25、31、...這些頻率數均可頻率重複使用，而且繪製的狀態圖將外圍的細胞中點連線均可形成”正六邊形”。
- 三、其中”25”，”49”頻率數將外圍的細胞中點連線，可形成”菱形”或”正六邊形”。

捌、結論

我們從這次研究中探索到蜂巢結構行動網路頻率重複使用的狀態圖，對於以後的研究我們認為可以嘗試幾個方向。

- 一、已知 3、4、7、9、12、13、16、19、21、25、27、28、31、36、37、39、43、49.....個頻率去重複使用，可重複使用滿足

$D = \sqrt{3N} R$ ，這些數字的推算除了我們發展的方式外，是否有快速公式推算。

- 二、每個相同數量頻率重複使用的狀態圖，到底有幾種變化情形。

玖、參考資料及其它

1. 李毓佩著(2001) 幾何的寶藏 國際村 p67~p68
2. 東華大學楊慶隆博士行動通信技術 p27~p35
<http://www.sna.csie.ndhu.edu.tw/~cnyang/mobile/sld001.htm>
3. 羅浩源著(1997) 幾何、解析幾何及三角學 一版台北市九章出版社 p86~p87
4. 國中數學一下(2003) P43~P52，P135~P140(康軒文教)

(上承第 72 頁)

環保化學鞭炮之特點

1. 器材簡單、容易取得。
2. 成本低廉、可以自製。
3. 操作容易，安全性高。

4. 用藥很少，節省經費。
5. 可再使用，污染性低。
6. 頗具震撼，極富趣味。

結論

環保化學鞭炮是以化學電解原理為基礎，使用簡易的器材組成一套頗富趣味性及教學意義而且兼顧安全性與環保理念的超「ㄅ一尤、」科學教具，可以在化學教學上演示或在科學園遊會、趣味科玩上讓學童來動手做，以引起學童學習科學與動手做實驗的興趣，並由活動當中藉以啟發學童在科學

上的創造力。

參考資料

- 1.方金祥（民 88） 本刊，第 224 期，35-36 頁。
- 2.方金祥（民 89） 廣西師範大學學報（自然科學版《微型化學實驗教學專輯》），第 18 卷，第 1 期，132-135 頁。